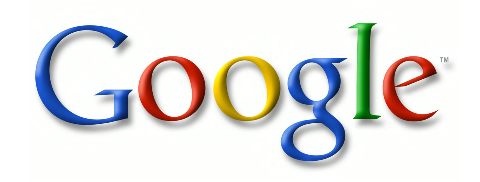



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
25 Feb. — 3 Apr., 1896

FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE



1890-91

# COURS D'ANALYSE

PROFESSÉ PAR

**M. DEMARTRES**

ET RÉDIGÉ PAR

**M. E. LEMAIRE**

## PREMIÈRE PARTIE

FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

*8, Rue de la Sorbonne, 8*

1892

1890-91

---

# COURS D'ANALYSE

---

## PREMIÈRE PARTIE

FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

## IV. Intégrales définies.





Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

dans un intervalle assez resserré pour que toutes les valeurs correspondantes de $f(x)$ diffèrent de $f(X)$ d'une quantité moindre que $\varepsilon$.

Pour démontrer la première partie adoptons d'abord un mode particulier de subdivision. Divisons $(a\ b)$ en deux parties égales puis chacune d'elles en deux parties égales et ainsi de suite. Supposons que, si loin que l'on pousse la subdivision, il y ait toujours au moins un intervalle partiel donnant lieu à une oscillation plus grande qu'un nombre fixe $\varepsilon$. Je dis que la fonction sera discontinue en un point au moins de $(a\ b)$. En effet, l'une au moins des moitiés de $(a\ b)$ jouit de la même propriété que $(a\ b)$ : si loin qu'on la subdivise, dans une des subdivisions la fonction aura une oscillation plus grande que $\varepsilon$. Soit $(a_1\ b_1)$ cette moitié. Il en est de même pour une moitié $(a_2\ b_2)$ de $(a_1\ b_1)$ et ainsi de suite. Nous sommes conduits à une suite d'intervalles.

$$(a\ b)\ (a_1\ b_1)\ (a_2\ b_2) \text{-------------} (a_n\ b_n)$$

dont chacun est une moitié du précédent.

Les nombres $a, a_1, a_2, \ldots\ldots$ forment une suite stationnaire ou croissante et demeurent tous inférieurs à $b$ ; $a_n$ tendra donc vers une limite $\alpha$, lorsque $n$ croîtra indéfiniment. D'ailleurs $b_n$ tendra vers cette même limite à cause de l'égalité.

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

Soient $M$ et $m$ les valeurs limites de $f(x)$ dans l'intervalle $(a_n\ b_n)$. Nous pourrons déterminer deux valeurs $x'$ et $x''$ de $(a_n\ b_n)$ telles que chacune des différences

$$M - f(x') \qquad\qquad f(x'') - m$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, $M - m$ étant plus grand que $\varepsilon$. On aura donc :

$$f(x') - f(x'') > \frac{\varepsilon}{3}$$

Comme $x'$ et $x''$ diffèrent entre eux et de $\alpha$ d'une quantité moindre que $\frac{b-a}{2^n}$ qu'on peut rendre aussi petite que l'on veut, la fonction est discontinue pour $x = \alpha$.

Si donc la fonction est partout continue, l'hypothèse faite est à rejeter et la première partie du théorème se trouve démontrée pour la subdivision binaire. Soit maintenant un mode quelconque de subdivision. Nous pourrons toujours faire en sorte que chacun des intervalles soit moindre que $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ et, par suite, compris tout entier dans un intervalle de la subdivision binaire d'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$ ; or, d'après ce que l'on vient de voir, on peut prendre $n$ assez grand pour que dans chacun de ceux-ci l'oscillation soit moindre que $\varepsilon$, si la fonction est continue ; il en sera de même a fortiori dans les intervalles de la subdivision considérée.

**Remarque.** — La propriété précédente, étant nécessaire et suffisante, peut être prise comme définition de la continuité dans un intervalle donné.

**III — Théorème.** — Une fonction, déterminée, finie et continue dans un intervalle donné, ne peut passer d'une valeur $A$ à une autre $B$ sans passer au moins une fois par toute valeur intermédiaire $C$.

Supposons pour fixer les idées $A < C < B$.

Décomposons encore $(ab)$ en $2^n$ intervalles égaux ; il n'y a lieu de démontrer le théorème que si aucune valeur de $\underline{x}$ séparant deux intervalles ne donne à la fonction la valeur $C$, et cela quelque grand que soit $\underline{n}$. Alors $f(\frac{a+b}{2})$ sera différent de $C$, et pour l'une des deux moitiés $(a,b_1)$ de $(ab)$ nous aurons $f(a_1) < C < f(b_1)$. De même pour l'une $(a_2b_2)$ des deux moitiés de $(a_1b_1)$ et ainsi de suite. On arrivera donc à une suite de nombres $a_1 a_2 \ldots a_n$. $b_1 b_2 \ldots b_n$ ayant une limite commune $\underline{\alpha}$ et pour lesquels on aura :

$$f(a_n) < C < f(b_n)$$

Or $f(a_n)$, $f(b_n)$ ayant pour limite commune $f(\alpha)$, à cause de la continuité, $f(\alpha)=C$.

Remarque. – La réciproque ne serait pas exacte.

IV. – Théorème – La fonction, supposée continue, atteint, une fois au moins, chacune de ses valeurs limites.

On raisonne de la même manière : si $f(a)$, $f(\frac{a+b}{2})$, $f(b)$ sont tous trois différents de la limite supérieure $M$, l'une au moins $(a,b_1)$ des deux moitiés de $(ab)$ donne lieu à la limite supérieure $M$. De même l'une au moins $(a_2b_2)$ des deux moitiés de $(a_1b_1)$. On est ainsi conduit à deux suites de nombres $a_n$, $b_n$ ayant une même limite $\underline{\alpha}$ et tels que dans l'intervalle $(a_n b_n)$ la limite supérieure soit égale à $M$. Ceci posé, il est clair, d'après ce qui précède, que l'on peut trouver, entre $a_n$ et $b_n$ un nombre $x_n$ satisfaisant à l'inégalité.

$$M - f(x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$x_n$ ayant d'ailleurs pour limite $\alpha$ on pourra prendre $n$ assez grand pour avoir, par suite de la continuité :

$$|f(x_n) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où l'on déduit $M - f(\alpha) < \varepsilon$. Donc le premier membre est nul puisqu'il ne peut être $< 0$ et qu'il est inférieur à tout nombre positif donné. Donc $f(\alpha) = M$. – Même démonstration pour la limite inférieure.

V. – Décomposons l'intervalle $(a\,b)$ en $n$ intervalles partiels, par des valeurs telles que

$$a\; x_1\; x_2 \;\ldots\ldots\; x_{n-1}\; b \quad (a = x_0 \;\; b = x_n)$$

Soit $\delta x_i$ l'amplitude de l'intervalle de rang $i$, $x_i - x_{i-1}$, soient $M_i$ et $m_i$ les limites de la fonction dans cet intervalle, $M_i - m_i$ ou $\omega_i$ l'oscillation correspondante. Considérons maintenant les deux sommes :

$$S_n = M_1\,\delta x_1 + M_2\,\delta x_2 + \cdots + M_n\,\delta x_n$$

$$s_n = m_1\,\delta x_1 + m_2\,\delta x_2 + \cdots + m_n\,\delta x_n$$

et cherchons ce qui arrive lorsqu'on augmente indéfiniment $n$, chacun des $\delta x$ tendant vers zéro. On a d'abord les relations évidentes :

$$(1) \qquad S_n - s_n = \omega_1\,\delta x_1 + \omega_2\,\delta x_2 + \cdots\cdots + \omega_n\,\delta x_n$$

$$(2) \qquad M\,(b-a) \geq S_n \geq s_n \geq m\,(b-a)$$

$M$ et $m$ étant les valeurs limites de la fonction dans l'intervalle total.

Formons une autre subdivision qui soit consécutive à la précédente c'est-à-dire qui résulte de la division de chacun des intervalles de la première et considérons la somme $S_n$ correspondante. La partie de cette somme qui correspond à l'intervalle primitif $(x_{i-1}, x_i)$ sera d'après la première inégalité (2) égale ou inférieure à $M_i\,\delta x_i$. D'où on conclut que la somme $S_n$ aura diminué ou sera restée stationnaire. On verra de même que la somme $s_n$ n'a pu qu'augmenter.

D'après cela, si on suppose une suite de subdivisions dont chacune soit

consécutive à la précédente et telles que $n$ augmente indéfiniment, les sommes $S_n$ forment une suite stationnaire ou décroissante et restent supérieures à $m(b-a)$ ; elles tendent donc vers une limite comprise d'après l'inégalité (2) entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. De même pour les sommes $s_n$ qui sont stationnaires ou croissantes en restant inférieures à $M(b-a)$.

Les deux limites seront d'ailleurs égales entre elles ; en effet d'après (1) on a

$$S_n - s_n \leqq \varepsilon \Sigma \delta x_i$$
$$\leqq \varepsilon (b-a)$$

$\varepsilon$ étant la plus grande des oscillations partielles. Comme $\varepsilon$ peut être aussi petit que l'on veut pour des valeurs suffisamment grandes de $n$, $S_n - s_n$ a nécessairement pour limite zéro quel que soit le mode de subdivision.

Considérons maintenant une suite quelconque de subdivisions, consécutives ou non. Soit

$$a, x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}, b$$

l'une d'elles. Introduisons un mode de subdivision auxiliaire. Par exemple divisons $(a\,b)$ en $2^n$ parties égales et soit

$$a, x'_1, x'_2, \ldots x'_{n'}, b$$

la subdivision obtenue. Formons en une troisième en rangeant par ordre de grandeur tous les $x$ et les $x'$ indistinctement. Cette dernière subdivision sera consécutive à chacune des deux précédentes, elle sera de la forme :

$$a, x'_1, x'_2, x_1 \ldots\ldots x'_{i-1}, x_2 x'_i \ldots b$$

Soient $S_n$, $s_n$, $S_{n'}$, $s_{n'}$, $S_{n''}$, $s_{n''}$ les trois couples de sommes correspondantes. On aura d'après ce que nous avons dit :

$$(3) \qquad S_n \geqq S_{n''} \geqq s_{n''} \geqq s_n$$
$$(4) \qquad S_{n'} \geqq S_{n''} \geqq s_{n''} \geqq s_{n'}$$

Si $L$ est la limite à laquelle conduit la subdivision en $2^n$ parties égales, il résulte de (4) que $S_{n''}$, $s_{n''}$ tendront vers cette même limite $L$. D'après cela l'inégalité (3) conduit à

$$S_n \geqq L \geqq s_n$$

et comme $S_n - s_n$ tend vers zéro, $S_n$ et $s_n$ auront pour limite $L$.

D'une manière plus générale, si $l_i$ désigne un nombre quelconque appartenant à l'intervalle $(m_i \; M_i)$, on a évidemment :

$$\Sigma m_i \delta x_i \leqq \Sigma l_i \delta x_i \leqq \Sigma M_i \delta x_i$$

et $\Sigma l_i \delta x_i$ aura aussi pour limite $L$. Donc enfin :

Théorème. — La somme $\Sigma l_i \delta x_i$ tend vers une limite finie et indépendante du mode de subdivision adopté, quand le nombre des intervalles partiels augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

Remarque. — L'opération précédente s'appelle une intégration, c'est une sommation d'un nombre infini d'infiniment petits. La limite $L$ s'appelle l'intégrale définie prise de $a$ à $b$.

Pour le moment nous nous contenterons de signaler les propriétés suivantes de l'intégrale définie, qui se présentent immédiatement :

1°. — Si on la désigne par $I_a^b$ on a évidemment :

$$I_a^b = - I_b^a$$

car cette propriété est évidente pour chacune des sommes $S_n$ dont $I_a^b$ est la limite

2°. — On a de même

$$I_a^b = I_a^c + I_c^b$$

c étant un nombre intermédiaire entre a et b. Cette dernière relation subsiste quand a, c, b, ne sont pas rangés par ordre de grandeur, pourvu que la fonction soit déterminée, finie, continue dans le plus grand des intervalles (a b) (b c) (c a). En effet on peut écrire :

$$I_a^c = I_a^b - I_c^b = I_a^b + I_b^c,$$

3°. — Observons enfin que l'inégalité (5) entraine la suivante :

$$m(b-a) \leq I_a^b \leq M(b-a)$$

En d'autres termes

$$I_a^b = \mu (b-a)$$

$\mu$ étant un nombre appartenant à l'intervalle (m M). Or d'après le théorème précédent la fonction atteint cette valeur $\mu$ pour une valeur au moins c comprise entre a et b. On a donc

$$I_a^b = (b-a) f(c) \qquad (a \leq c \leq b)$$

Notons enfin que la définition même que nous avons donnée de cette intégrale montre comment on pourrait calculer approximativement sa valeur numérique.

---

# Première Leçon.

## Dérivée et différentielle d'une fonction continue. Théorème des accroissements finis.

I — Dérivée — Une fonction étant déterminée, finie, continue dans un intervalle (a, b), soit x une valeur quelconque de la variable prise dans cet intervalle, la différence $f(x+h) - f(x)$ est infiniment petite en même temps que h. Il peut se faire que le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tende vers une limite finie et déterminée lorsque h tend vers zéro d'une manière quelconque ; si le fait se présente pour chacune des valeurs de x, cette limite sera une fonction de x, déterminée et finie. Nous l'appellerons la dérivée de f(x) et nous la représenterons par $f'(x)$. Il résulte de cette définition que la dérivée d'une constante est elle-même constante et égale à zéro.

Si u et v sont deux fonctions déterminées et finies dans l'intervalle (a b), il en est de même de $mu + nv$ (m et n étant des constantes), de $uv$, de $\frac{u}{v}$ pourvu toutefois, en ce qui concerne $\frac{u}{v}$, que v ne s'annule en aucun point de l'intervalle considéré. Si de plus u et v sont continus les égalités évidentes :

$$\Delta(mu+nv) = m\Delta u + n\Delta v \qquad \Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

montrent que les nouvelles fonctions sont également continues ; en outre, si $u$ et $v$ admettent des dérivées $u'$ et $v'$, il en sera de même des combinaisons précédentes, qui auront pour dérivées :

$$mu'+nv' \qquad uv'+vu' \qquad \frac{vu'-uv'}{v^2}$$

De là on déduit que, si on combine rationnellement un nombre limité de fonctions $u, v, w, \ldots$, satisfaisant aux conditions énoncées, on arrivera à une nouvelle fonction qui sera dans le même cas et dont la dérivée s'obtiendra par l'application plusieurs fois répétée des règles précédentes.

II — Fonctions de fonction. – Soit une fonction $u$, déterminée, finie, continue, et admettant une dérivée $u'$ dans l'intervalle $(a\,b)$, $m$ et $M$ ses valeurs limites, $f(u)$ une fonction satisfaisant aux mêmes conditions dans un intervalle comprenant $m$ et $M$, il est évident que $f(u)$ sera une fonction déterminée et finie dans l'intervalle $(a\,b)$. D'ailleurs de la relation

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

on conclut immédiatement que $f(u)$ est continue et admet une dérivée égale à $f'(u).u'$. C'est le théorème des fonctions de fonction.

Fonctions inverses. – Au lieu de l'équation $y = f(x)$ qui définit une fonction, considérons l'équation

$$x = f(y)$$

Soit $\alpha$ une valeur comprise entre $a$ et $b$, nous démontrerons plus tard qu'il existe une fonction et une seule de $x$, se réduisant à $\alpha$ pour $x = f(\alpha)$, déterminée, finie, continue et dérivable dans un intervalle $(a'\,b')$ convenablement restreint comprenant $\alpha$. Cela étant admis, il est facile d'obtenir la dérivée de cette fonction. En effet, la fonction $f(y)-x$ étant alors nulle dans l'intervalle $(a'\,b')$ et par suite constante, sa dérivée sera nulle dans le même intervalle et on aura, en appliquant la règle précédente.

$$y'.f'(y) = 1 \qquad y' = \frac{1}{f'(y)}$$

III — Fonctions simples. – Les fonctions $y=x$, $y=\sin x$, $y=e^x$ servent d'éléments pour constituer toutes celles que nous connaissons pour le moment. Elles sont déterminées, finies, continues, dérivables dans un intervalle quelconque $(a,b)$, quelque petit que soit $a$ et quelque grand que soit $b$, ou pour parler plus brièvement, entre $-\infty$ et $+\infty$; $\sin x$ a pour valeurs limites $-1$ et $+1$, $e^x$ a pour limite inférieure zéro ; quant à sa limite supérieure, elle est finie et égale à $e^b$ dans tout intervalle $(a\,b)$, mais on peut étendre suffisamment cet intervalle pour qu'elle dépasse toute quantité donnée : nous pouvons exprimer ce fait en disant que la limite supérieure est infinie[1]. Les trois fonctions précédentes ont pour dérivées

$$1, \qquad \cos x \text{ ou } \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad e^x$$

L'inversion conduit aux fonctions $\text{arc}\sin x$, $lx$.

L'égalité

$$\sin y = x$$

est vérifiée pour $y = k\pi$ $x=0$ ; à chaque valeur de $k$ correspond une fonction inverse

---

(1) En réalité on n'étudie jamais une fonction que dans un intervalle fini, dont on peut d'ailleurs augmenter autant qu'on veut l'amplitude.

définie dans l'intervalle $(-1,+1)$ comme plus haut : nous adopterons celle qui correspond à $k=0$, toutes les autres rentrant dans l'une des formules

$$(2k+1)\pi - y \qquad 2k\pi + y$$

D'ailleurs la formule

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

convient à un mode quelconque de détermination. De même l'équation

$$e^y = x$$

est vérifiée pour $y=0$ $x=1$. Il existe donc une fonction définie dans l'intervalle $(0+\infty)$ satisfaisant identiquement à l'équation précédente, et se réduisant à $0$ pour $x=1$.

C'est $Lx$, sa dérivée est $\frac{1}{e^y}$ ou $\frac{1}{x}$

En combinant rationnellement ces éléments simples, on aura une infinité de fonctions dont les dérivées pourront être obtenues par l'application des règles précédentes.

IV — Différentielle. — D'après la définition de la dérivée nous pouvons écrire :

$$f(x+h) - f(x) = h\,[f'(x)+\varepsilon]$$
$$= h\,f'(x) + h\varepsilon$$

$\varepsilon$ étant une quantité dépendant de $x$ et de $h$, mais tendant vers zéro en même temps que $h$. L'accroissement de la fonction se compose donc de deux parties dont la seconde $\varepsilon h$ est infiniment petite par rapport à la première, en général ; $h\,f'(x)$ est ce qu'on nomme la partie principale de l'accroissement ou la différentielle. On la représente par $df$ ou $dy$. Si, en particulier, on considère la fonction $y=x$ dont la dérivée est $1$, sa différentielle sera $h$, on pourra donc écrire

$$dy = f'(x)\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

La dérivée est donc le rapport des différentielles de la fonction et de la variable.

Cette définition n'introduit aucune idée nouvelle, mais elle fournit une notation très régulière et très symétrique, qui présente, comme on le verra, de sérieux avantages. Les formules fondamentales rappelées plus haut s'écrivent, dans la notation différentielle :

$$d(mu+nv) = m\,du + n\,dv \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$de^x = e^x dx \qquad d\sin x = \cos x\,dx \qquad dLx = \frac{dx}{x}$$

$$df(u) = f'(u)\,du$$

Quant à la dérivée d'une fonction inverse, elle est fournie par la même équation que celle de la fonction directe.

V — Représentation géométrique. — Supposons qu'on ait représenté la fonction par une courbe rapportée à des axes $OX$, $OY$.



Si la fonction est dérivable, la Courbe aura en chaque point $M$ une tangente bien déterminée dont le coëfficient angulaire sera égal à la dérivée.

Le coëfficient angulaire de la corde $MM'$ est, en effet $\frac{M'P' - MP}{PP'} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. En outre, si la tangente coupe

en $M$, l'ordonnée du point $M''$, $m'_1 H'$ sera égal à $MH$ multiplié par le coëfficient angulaire de la tangente : ce sera donc la différentielle $f'(x)\,dx$.

Enfin l'intégrale définie $I_a^b$ a une signification géométrique très simple. Si on divise le segment $a\,b$ en $n$ parties et qu'on construise les éléments $l_i\,\delta x_i$ de l'intégrale, chacun d'eux sera l'aire, divisée par $\sin\theta$, d'un parallélogramme ayant pour cotés $\delta x_i$ et $l_i$. Le théorème que nous avons établi exprime que la somme de ces parallélogrammes tend vers une limite déterminée $S$, quand $n$ augmente indéfiniment, les $\delta n$ tendant vers zéro. Cette limite, c'est par définition l'aire du trapèze curviligne $A\,a\,B\,b$. Elle est donnée par l'équation :

$$S = \sin\theta\, I_a^b$$

Observons que cette aire existe pour toute courbe représentant une fonction continue, qu'elle ait ou non une dérivée.

## VI — Théorème des accroissements finis. —

Considérons deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ déterminées, finies, continues, dérivables l'une et l'autre dans l'intervalle $(a, b)$ ; on pourra en déduire une autre fonction :

$$F(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]\,f(x) - [f(b) - f(a)]\,\varphi(x)$$

présentant les mêmes caractères ayant pour dérivée :

$$F'(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)]\,f'(x) - [f(b) - f(a)]\,\varphi'(x)$$

On voit immédiatement que cette fonction prend pour $x = a$ et $x = b$ la même valeur.

$$F(a) = F(b) = f(a)\,\varphi(b) - f(b)\,\varphi(a)$$
$$= A$$

Cela posé $F(x)$ est susceptible de deux valeurs limites $M$ et $m$. Admettons que l'une au moins $M$ par exemple, soit différente de $A$. Dans ce cas $F(x)$ passe par la valeur $M$ pour une valeur $c$, comprise entre $a$ et $b$ ; la différence $F(c+h) - F(c)$ sera négative ou nulle quel que soit le signe de $h$, donc les deux rapports

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} \qquad \frac{F(c-h) - F(c)}{h}$$

seront nuls ou de signes contraires ; la limite commune $F'(c)$ sera donc nulle et nous aurons, par suite :

$$[\varphi(b) - \varphi(a)]\,f'(c) - [f(b) - f(a)]\,\varphi'(c) = 0$$

Si on avait $M = m = A$, l'oscillation de $F$ dans l'intervalle $(a\,b)$ étant nulle, $F$ serait constant et l'on aurait

$$F'(c) = 0$$

$c$ étant n'importe quelle valeur comprise entre $a$ et $b$. L'égalité précédente est donc démontrée dans tous les cas.

Supposons que la dérivée $\varphi'$ ne s'annule pour aucun point de $(a\,b)$, on pourra écrire :

$$f(b) - f(a) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\varphi'(c)}\,f'(c)$$

c'est la formule générale des accroissements finis. $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire, sauf la restriction imposée à sa dérivée ; si par exemple, on prend : $\varphi(x) = x$, on aura : $f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)$.

Si $x$ et $x+h$ sont deux valeurs comprises entre $a$ et $b$ on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à l'intervalle $(x, x+h)$ et on aura :

$$f(x+h)-f(x)=h\,f'(x+\theta h)\quad(0<\theta<1)$$

ce qui est la forme ordinaire du théorème des accroissements finis.

On sait quelle est l'importance de ce théorème ; nous nous bornerons pour le moment à en déduire que si une fonction a une dérivée nulle en tout point de l'intervalle $(a,b)$ elle se réduit à une constante.

**Remarque** — Au point de vue géométrique, le théorème des accroissements finis a une interprétation très simple. Si on regarde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $f'(x)$ comme des coëfficients angulaires et que la courbe n'admette aucune singularité dans l'arc $AB$, il exprime qu'en un point au moins de cet arc la tangente sera parallèle à la corde $AB$

**VII — Fonction intégrale** — La fonction $f(x)$, qu'elle ait ou non une dérivée[1], est intégrable dans tout intervalle intérieur à $(a\,b)$, par exemple de $a$ à $x$. Cette intégrale $I_a^x$ est une fonction déterminée de $x$ dans l'intervalle $(a\,b)$ c'est ce qu'on appelle la fonction intégrale ou l'intégrale définie de $f(x)$. Si on suppose et on en a le droit $l_i=f(x_i)$ dans la définition de l'élément de cette intégrale, la valeur générale de cet élément sera $f(x)\,dx$ : nous représenterons l'intégrale par le symbole $\int_a^x f(x)\,dx$.

Cette fonction est déterminée et finie, nous allons prouver qu'elle est continue et dérivable. On a, en effet :

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+h} f(x)\,dx$$

La dernière intégrale est le produit de l'amplitude $h$ par $f(c)$, $c$ étant une constante comprise entre $x$ et $x+h$, donc on aura en appelant $F(x)$ l'intégrale définie

$$F(x+h)-F(x)=h\,f(x+\theta h)$$

$f(x)$ étant continu et fini, il en résulte immédiatement que $F(x)$ est continu et admet pour dérivée $f(x)$. On arrive ainsi par une autre voie au théorème des accroissements finis.

Si on appelle fonction primitive de $f(x)$ une fonction admettant $f(x)$ pour dérivée l'intégrale $\int_a^x f(x)dx$ fournit une fonction primitive. $F(x)$ sera une fonction primitive de $f(x)$. On en aurait une autre en remplaçant la limite inférieure $a$ par n'importe quel nombre compris entre $a$ et $b$. Il y a donc une infinité de fonctions primitives. Si $F(x)$ et $F_1(x)$ sont deux de ces fonctions la différence $F(x)-F_1(x)$, ayant une dérivée nulle se réduira à une constante, qui sera d'ailleurs arbitraire puisqu'elle ne peut influer sur la dérivée.

---

(1) 1° Il faut se garder de rejeter comme absurde la conception d'une fonction déterminée, finie, continue et n'ayant pas de dérivée. On peut obtenir, par exemple, et d'une infinité de manières une fonction déterminée, finie, continue et telle que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x+h)-f(x)}{-h}$ aient des limites différentes pour $h=0$ pour toute valeur commensurable de $x$.

(Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues : Annales de l'École Normale, 1875, page 93.

Donc : Toute fonction finie et continue admet une infinité de fonctions primitives se déduisant de l'une quelconque d'entre elles par l'addition d'une constante arbitraire.

Remarque — Nous ne nous occuperons pas des fonctions qui n'ont pas de dérivée. De plus nous admettons toujours que la fonction étudiée est finie, déterminée, continue et a une dérivée finie et déterminée. — Si cela n'avait pas lieu dans l'intervalle (a b), nous le subdiviserions en intervalles partiels, ou, pour parler plus exactement, nous supposerons toujours qu'on étende assez peu l'intervalle dans lequel se trouve comprise la valeur actuelle de $x$ pour qu'aucune des conditions précédentes ne cesse d'être vérifiée. — Cette réserve faite, nous pourrons nous abstenir de rappeler à chaque fois les conditions en question.

# Deuxième Leçon

## Fonctions de plusieurs variables — Fonctions composées — Fonctions implicites.

I —— Les notions précédentes s'étendent sans difficulté au cas de plusieurs variables indépendantes. Soient $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, $n$ variables indépendantes pouvant prendre tous les systèmes de valeurs tels que

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2 \ldots\ldots a_n \leq x_n \leq b_n$$

Les constantes $(a_1\, b_1)$ $(a_2\, b_2)$ ...... $(a_n\, b_n)$ déterminent le champ (C) dans lequel se meuvent ces variables. Si pour chaque système de valeur des $x$ appartenant au champ (C) une certaine quantité $y$ prend une valeur et une seule, ce sera, par définition, une fonction déterminée des variables $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$. Elle sera <u>finie</u> si toutes ses valeurs restent comprises entre deux nombres fixes A et B. Dans ce cas, il y aura une limite supérieure M, que la fonction pourra atteindre, ou dont elle pourra s'approcher indéfiniment, mais sans pouvoir la dépasser; et une limite inférieure m, au-dessous de laquelle elle ne s'abaissera jamais, tout en pouvant l'atteindre ou s'en approcher autant que l'on voudra.

On peut se faire du champ des variables une idée plus générale. Par exemple, si les variables sont au nombre de deux et qu'on les considère comme les coordonnées d'un point mobile d'un plan, le champ $(a_1\, b_1)(a_2\, b_2)$ est l'intérieur du parallélogramme limité par les quatre droites

$$x_1 = a_1 \quad x_1 = b_1 \qquad x_2 = a_2 \quad x_2 = b_2$$

Rien n'empêche de substituer à ce parallélogramme l'intérieur d'une courbe fermée de forme quelconque. De même le champ de trois variables étant représenté par un parallélipipède, on peut, plus généralement, considérer l'ensemble des

points intérieurs à une surface fermée.

II — Continuité — Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ un système de valeurs appartenant au champ donné, $h_1, h_2 \ldots\ldots h_n$, un système d'accroissements suffisamment petits pour que $\alpha_1+h_1, \alpha_2+h_2, \ldots\ldots \alpha_n+h_n$, y soient également contenus. Nous disons que la fonction

$$y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$

est continue pour $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots\ldots x_n = \alpha_n$ si à tout nombre positif $\mathcal{E}$, on en peut faire correspondre un autre $\eta$ tel qu'on ait

$$\left| f(\alpha_1+h_1, \alpha_2+h_2, \ldots\ldots \alpha_n+h_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n) \right| < \mathcal{E}$$

pour toutes les valeurs des $h$ comprises entre $-\eta$ et $+\eta$. Si cette propriété a lieu pour toutes les valeurs possibles de $\alpha$, la fonction sera dite continue dans le champ (C).

On pourrait généraliser sans difficulté les propriétés des fonctions continues d'une variable démontrées dans l'introduction en particulier celle qui se rapporte à l'intégration. Nous aurons plus tard à faire cette généralisation. Pour le moment, nous nous placerons à un autre point de vue.

Si on fixe toutes les variables, sauf une seule $x_i$, par exemple, on aura une fonction d'une seule variable ; toutes les fonctions ainsi obtenues seront déterminées et finies dans l'intervalle $(a_i\ b_i)$ ; on voit de plus qu'elles seront continues en chaque point $\alpha_i$ de cet intervalle, si la fonction donnée est continue dans le champ (C). En effet étant donné le nombre $\eta$ qui correspond, par hypothèse, à $\mathcal{E}$, si on prend $|h_i| < \eta$ et $h_1, h_2, \ldots h_n$ nuls, on retombe sur la définition de la continuité des fonctions d'une seule variable.

III — Dérivées partielles — Il pourra se faire que chacune des fonctions d'une seule variable dont nous venons de parler soit dérivable dans l'intervalle correspondant ; par exemple, $f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ aura une dérivée, dont l'expression dépendra, en général, de $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$. Si nous y remplaçons $\alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ par $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ nous aurons une nouvelle fonction de $n$ variables que nous représenterons par $f'(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ et qui sera la dérivée partielle par rapport à $x_1$. Nous supposerons toujours qu'il y a une dérivée partielle finie et déterminée par rapport à chacune des variables et que de plus chacune d'elles est continue. Si la fonction $f$ reste constante quand on fait varier $x_1$, il en sera de même de chacune des fonctions $f(x_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_n)$ donc $f'_{x_1}$ sera nul pour toutes les valeurs des $x$ contenues dans le champ donné.

Réciproquement, si on a identiquement

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \equiv 0$$

chacune des dérivées $f'_{x_1}(x_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n)$ sera nulle, donc la fonction restera constante quand on fixera $x_2, \ldots\ldots x_n$ et qu'on fera varier $x_1$.

Par analogie nous représenterons par $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée partielle $f'_{x_i}$. Il faut bien remarquer que ce symbole ne peut être confondu avec un quotient, la caractéristique $\partial$ n'indiquant par elle-même aucune opération définie.

IV — **Différentielle totale** — Nous appellerons différentielle totale et nous représenterons par $df$ ou $dy$ l'expression

$$df = h_1 f'_{x_1} + h_2 f'_{x_2} + \ldots\ldots + h_n f'_{x_n}$$

Si, en particulier, la fonction se réduit à $f = x_i$, on a

$$f'_{x_i} = 1$$

et les autres dérivées partielles sont nulles. D'où

$$dx_i = h_i$$

Nous pourrons donc écrire dans la notation différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Remarquons que $df$ ne représente pas la partie principale de l'accroissement de la fonction ; comme $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$ sont absolument indépendants les uns des autres, il est impossible de décomposer l'accroissement complet en deux parties dont l'une soit, dans tous les cas, infiniment petite par rapport à l'autre. La véritable analogie avec la différentielle d'une fonction d'une seule variable consiste en ce que :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction se réduise à une constante est que sa différentielle totale soit nulle pour tout système de valeurs de $dx_1, dx_2, \ldots\ldots dx_n$.

Ce fait résulte immédiatement de ce que nous avons vu plus haut § III. Il entraîne cette conséquence fondamentale qu'en différentiant totalement une identité on obtient une nouvelle identité

V — **Fonctions composées** — Soit $x$ une variable se mouvant dans l'intervalle $(a\,b)$, $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n$ des fonctions de cette variable, déterminées, finies continues et dérivables ; chacune d'elles aura des limites $m_1 M_1, m_2 M_2, \ldots m_n M_n$. Soit une fonction $f$ de $n$ variables, déterminée, finie, continue, ayant des dérivées continues dans le champ $m_1 M_1, \ldots\ldots m_n M_n$ : Il est bien évident que $f(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)$ sera une fonction déterminée et finie de $x$ dans l'intervalle $(a\,b)$. Nous allons prouver que cette fonction est continue et dérivable

Prenons, en effet, le cas de trois fonctions $u_1, u_2, u_3$, ce qui n'altère en rien la généralité du raisonnement : Soit $h$ un accroissement donné à $x$, $k_1, k_2, k_3$, les accroissements correspondants de $u_1, u_2, u_3$, $K$ l'accroissement correspondant de la fonction.

On aura :

$$K = f(u_1+h_1, u_2+h_2, u_3+h_3) - f(u_1+h_1, u_2+h_2, u_3)$$
$$+ f(u_1+h_1, u_2+h_2, u_3) - f(u_1+h_1, u_2, u_3)$$
$$+ f(u_1+h_1, u_2, u_3) - f(u_1, u_2, u_3)$$

D'où, en remarquant qu'une seule des variables reçoit dans chaque ligne un accroissement, et appliquant le théorème des accroissements finis.

$$K = h_1 f'_{u_1}(u_1+\theta_1 h_1, u_2, u_3) + h_2 f'_{u_2}(u_1+h_1, u_2+\theta_2 h_2, u_3)$$
$$+ h_3 f'_{u_3}(u_1+h_1, u_2+h_2, u_3+\theta_3 h_3)$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$, étant positifs et inférieurs à 1. Si $h$ tend vers zéro, il en est de même de $h_1, h_2, h_3$, les dérivées partielles étant continues tendent vers $f'_{u_1}, f'_{u_2}, f'_{u_3}$, donc $k$ tend vers zéro et $y$ est une fonction continue. Enfin si on divise par $h$ et qu'on passe à la limite on voit que $y$ admet une dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_3}\frac{du_3}{dx}$$

La définition précédente s'étend d'elle-même au cas de plusieurs variables indépendantes.

Soient $u_1, u_2, \dots u_p$ des fonctions de $x_1, x_2 \dots x_n$ définies dans un champ $(C)$ et admettant des valeurs limites $(m_1 M'_1, m_2 M'_2, \dots, m_p M'_p)$; soit, en outre, une fonction $f$ de $p$ variables déterminée, finie et continue, ayant des dérivées déterminées, finies et continues dans le champ $(m_1 M_1)(m_2 M_2)\dots(m_p M_p)$. Il est clair que $f(u_1, u_2, \dots u_p)$ sera une fonction de $x_1, x_2, \dots x_n$ déterminée et finie dans le champ $(C)$. Si on considère $x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$ comme constants et qu'on fasse varier $x_i$, la fonction ainsi définie aura une dérivée, qui sera la dérivée partielle $f'_{x_i}$ et aura pour expression : $$f'_{x_i} = f'_{u_1} u'_1 + f'_{u_2} u'_2 + \dots + f'_{u_p} u'_p$$
toutes les dérivées $u'$ étant partielles et prises par rapport à $x_i$. Toutes les fonctions obtenues en fixant toutes les variables à l'exception d'une seule sont donc continues dans le champ $C$ ; en outre elles ont des dérivées partielles. Si on multiplie l'égalité précédente par $dx_i$ et qu'on fait la somme des égalités analogues, on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n .$$

exactement comme si les $u$ étaient des variables indépendantes.

## VI — Fonctions implicites

— 1° Soit une fonction $f(x, y)$ de deux variables déterminée, finie, continue, ayant des dérivées partielles continues dans un champ $(C)$ et s'annulant pour $x=a$ $y=b$ sans que $f'_y$ s'annule pour ces mêmes valeurs. Nous démontrerons plus tard qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ se réduisant à $b$ pour $x=a$, déterminée, finie, continue et dérivable dans un intervalle $(a'b')$ comprenant $a$, telle que la fonction $f(x, \varphi)$ se réduise

identiquement à zéro dans cet intervalle. Cette fonction est ce qu'on nomme la fonction implicite, définie par l'équation

$$f(x, y) = 0$$

Il est aisé de calculer sa différentielle : si, en effet, on suppose $y$ remplacé par $\varphi$ dans $f$, la fonction composée $f$ étant une constante puisqu'elle reste égale à zéro, sa différentielle sera nulle, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0$$

d'où l'on déduit :

$$dy = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx$$

**Remarque** — Les fonctions inverses d'une seule variable sont un cas particulier des fonctions implicites.

2° La définition précédente s'étend sans peine au cas de plusieurs variables. Soit :

$$\begin{aligned} &f_1(u_1, u_2, \ldots\ldots u_p, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ &f_2(u_1, u_2, \ldots\ldots u_p, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_p(u_1, u_2, \ldots\ldots u_p, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0 \end{aligned}$$

un système de $p$ équations entre les $n+p$ variables $u_1, u_2 \ldots\ldots u_p, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ; nous supposons que les fonctions $f_1, \ldots f_p$, sont des fonctions déterminées, finies continues et dérivables par rapport aux $n+p$ variables dont elles dépendent dans un certain champ $C$.

Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, un système de valeurs satisfaisant aux équations (1), contenues dans le champ $C$ et n'annulant pas le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial u_1} & \frac{\partial f_p}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial u_p} \end{vmatrix}.$$

Ceci posé, nous démontrerons plus tard qu'il existe $p$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_p$ des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles se réduisent respectivement à $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$, pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ données aux $x$.

2° Elles sont déterminées, finies, continues, dérivables dans un champ $C'$ convenablement choisi et comprenant $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$

3° Pour toutes les valeurs de $x_1, x_2 \ldots x_n$ contenues dans le champ $C'$

les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_p$ s'annulent identiquement quand on y remplace les $u$ par les $\varphi$ correspondants.

Les fonctions $\varphi$ ainsi définies sont dites fonctions implicites. Il est aisé de calculer leurs différentielles totales et leurs dérivées partielles.

Si nous supposons, en effet que les $u$ soient remplacés par les fonctions $\varphi$, les $f$ deviennent des fonctions composées des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$, les composantes étant $u_1, u_2, \ldots u_p, x_1, \ldots x_n$. Comme, d'après ce qui précède, ces fonctions composées doivent être constamment nulles dans le champ $C'$, leurs différentielles totales sont nulles pour les mêmes valeurs des $x$ et on a alors:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p} du_p + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

la lettre $f$ étant affectée successivement des indices $1, 2, \ldots p$; donc: $du_1, du_2, \ldots du_p$ sont donnés par $p$ équations linéaires dont le déterminant est $J$. Or $J$ est supposé différent de zéro pour $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2 \ldots\ldots x_p = \alpha_p$ puisque $u_1, u_2 \ldots u_p$ se réduisent alors à $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$; Il reste différent de zéro dans toute l'étendue du champ $C'$, puisque dans ce champ les $\varphi$ ont des dérivées déterminées qui ne peuvent être données que par les équations précédentes. Donc enfin ces équations sont compatibles.

On en tire les différentielles totales de $u_1, u_2, \ldots u_p$, c'est-à-dire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$; les solutions sont de la forme: $d\varphi_i = A_1^i dx_1 + A_2^i + \ldots + A_j^i dx_j \ldots + A_n^i dx_n$.

Si on suppose $dx_j$ seul différent de zéro, on en déduira les dérivées partielles par des équations de la forme

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = A_j^i$$

La question de la différentiation des fonctions implicites est donc complètement résolue.

## VII — Fonctions inverses

— Considérons en particulier le cas où les équations (1) sont de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) - u_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) - u_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) - u_n = 0 \end{cases}$$

Les $u$ sont alors explicitement définies par rapport aux $x$; supposons que pour un système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ des $x$ le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. On pourra, d'après le théorème précédemment énoncé, considérer $x_1, x_2, \ldots x_n$ comme fonctions de $u_1, u_2, \ldots u_n$ pris pour variables indépendantes, fonctions définies par les équations (2) dans un champ $C$ comprenant les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ : on appelle ces fonctions les fonctions inverses des fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Leurs différentielles totales s'obtiennent immédiatement par l'application de la règle indiquée; on a, par exemple :

$$J\,dx_1 = \begin{vmatrix} du_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ du_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ du_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

On en déduira

$$J\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = A_j^i$$

$A_j^i$ étant le mineur correspondant à l'élément $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

**Remarques** —— Il est clair que si l'on part des fonctions simples.

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sin x \\ y = e^x \end{cases}$$

les fonctions composées, explicites ou implicites, formées avec ces éléments sont les plus générales que nous puissions concevoir tant que nous n'aurons pas défini des éléments nouveaux. Nous saurons calculer sans difficulté les différentielles et les dérivées partielles ou ordinaires de ces fonctions par les procédés donnés, pourvu que nous nous rappelions les formules

$$dx = dx$$
$$d\sin x = \cos x\, dx$$
$$d e^x = e^x dx$$

Or tous ces procédés se réduisent à l'emploi d'une seule formule, celle qui donne la différentielle totale d'une fonction composée.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial u_n} du_n$$

Cette règle, appliquée aux deux membres des équations qui définissent les fonctions, donnera leurs différentielles totales et leurs dérivées partielles.

Evidemment, un pareil calcul ne conduira jamais qu'à des fonctions de même nature que celles d'où on est parti, puisqu'il en est ainsi pour les fonctions simples. Pour arriver à des fonctions nouvelles, il faudra ou considérer un nombre infini de fonctions connues ou faire sur les fonctions

simples des opérations nouvelles, comme celle que nous avons appelée intégration.

**Remarque** — Nous nous abstiendrons à l'avenir de mentionner qu'une fonction est déterminée, finie, continue et admet des dérivées partielles présentant les mêmes caractères. Cela sera toujours sous-entendu ; en un mot, nous n'étendrons jamais nos raisonnements qu'à un champ suffisamment restreint pour que toutes ces conditions soient remplis.

---

# Troisième Leçon.

---

## Déterminants fonctionnels.

Reprenons les équations qui définissent $n$ fonctions de $n$ variables:

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots x_n) - u_1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots x_n) - u_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots x_n) - u_n = 0 \end{cases}$$

Nous avons vu l'importance du déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

On l'appelle le déterminant fonctionnel des $u$ par rapport aux $x$. On peut, pour abréger, le représenter par la notation

$$(2)\quad J = \frac{D(f_1, f_2 \dots\dots f_n)}{D(x_1, x_2 \dots\dots x_n)}$$

due à M. Bertrand et justifiée par l'analogie très remarquable qui existe entre le déterminant d'un système de fonctions et la dérivée d'une fonction d'une seule variable.(1)

Transformons d'abord le système des équations (1). L'une au moins des fonctions $f$ dépend de l'un au moins des $x$, par exemple $f_1$ dépend de $x_1$, on a donc

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

De la première équation nous pourrons donc déduire $x_1$ comme fonction de $n$ variables $u_1, x_2, x_3, \dots x_n$ ; et nous remplacerons $x_1$ par sa valeur dans les $n-1$ autres équations qui prendront la forme :

---

**Note** (1) Pour étudier à ce point de vue les déterminants fonctionnels, lire le 3ième chapitre du Traité de Calcul différentiel de M. Bertrand.

$$(3)\ldots\begin{cases} u_2 = F_2(u_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \\ u_3 = F_3(u_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = F_n(u_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \end{cases}$$

Il y aura au moins un des $F$ qui dépendra de l'un des $x$, sinon $u_2, u_3 \ldots u_n$ seraient fonctions de $u_1$ et nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi. Alors $F_2$, par exemple, satisfera à la condition

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0$$

et on pourra déduire de la première des équations (3) $x_2$ en fonction de $u_1, u_2, x_3, x_4 \ldots x_n$ et le substituer dans $F_3, F_4 \ldots F_n$.

En continuant aisi on arrivera à la forme [1]

$$(4)\ldots\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \\ u_2 = \varphi_2(u_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \\ u_3 = \varphi_3(u_1, u_2, x_3 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = \varphi_n(u_1, u_2 \ldots\ldots u_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

Nous supposons que nous n'avons pas été arrêtés avant la dernière opération; celle-ci ne préjuge rien sur la dernière fonction $\varphi_n$, puisqu'on ne cherche pas à résoudre l'équation correspondante. Dans ce cas le déterminant $J$ prend une forme remarquable. Supposons, en effet, qu'on ait substitué la fonction $\varphi_n$ à la fonction $f_n$ dans la dernière ligne de $J$ sans rien changer aux autres lignes. Un élément de cette ligne sera de la forme

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$$

le dernier terme étant nul tant que $i$ n'est pas égal à $n$.

Si nous multiplions les éléments des $n-1$ premières lignes respectivement par

$$-\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}, -\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2}, \ldots\ldots\ldots, -\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_{n-1}}$$

et que nous ajoutions toutes ces lignes à la dernière, nous aurons:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & & & \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$= J_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

$J_1$ étant le déterminant fonctionnel des $n-1$ fonctions $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ par rapport à

---

[1] Jacobi De det. funct. (Journal de Crelle T. XXII)

à $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, considerées comme seules variables indépendantes, $x_n$ y figurant à titre de simple paramètre. Raisonnant sur $J_1$ de la même manière, on aura :

$$J_1 = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} J_2$$

$J_2$ étant le déterminant de $f_1, f_2, \ldots f_{n-2}$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$ et ainsi de suite. Si on multiplie membre à membre toutes ces égalités, on a enfin :

$$(5) \qquad J = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}$$

le déterminant se trouve ramené à la forme monôme. Cette forme est commode d'abord pour le calcul même des déterminants fonctionnels ; en voici un exemple :

Considérons trois fonctions liées à trois variables $r, \theta\, \varphi$ par les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Choisissons l'ordre $x, z, y$ et écrivons :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = \frac{x}{\cos \varphi} \cot g\, \theta \\ y = x \,\mathrm{tg}\, \varphi \end{cases}$$

nous aurons évidemment :

$$\frac{D(x, z, y)}{D(r, \theta, \varphi)} = \sin \theta \cos \varphi \, \frac{(-x)}{\cos \varphi \sin^2 \theta} \, \frac{x}{\cos^2 \varphi}$$
$$= - \frac{x^2}{\sin \theta \cos^2 \varphi}$$
$$= - r^2 \sin \theta$$

d'où, en remarquant que la permutation de deux fonctions ou de deux variables change évidemment le signe du déterminant :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

II —— La forme précédente va encore nous permettre de démontrer le théorème suivant

Théorème — Si le déterminant d'un système de fonctions est identiquement nul, il existe entre ces fonctions une ou plusieurs relations identiques où ne figurent pas les variables, et réciproquement.

Supposons que $J$ soit identiquement nul. Si on ne peut pas mettre le système sous la forme (4), nous avons vu qu'il existe entre les $u$ des relations identiques. Si on peut conduire le calcul jusqu'au bout, aucune des quantités

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \cdots \cdots \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

n'est identiquement nulle ; on a donc, d'après l'hypothèse,

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = 0$$

On en conclut que $\varphi_n$ ne dépend que de $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$, ce qui donne une relation de la forme annoncée. Réciproquement, supposons que les fonctions $u$ ne soient

pas indépendantes et soit

$$(6) \qquad F(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n) = 0$$

la relation correspondante. Nous déduirons de là $n$ identités de la forme.

$$(7) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = 0$$

Ce sont des équations linéaires et homogènes par rapport à

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial u_n}$$

quantités qui ne peuvent pas être toutes nulles, le premier membre de l'identité (6) ne pouvant être une constante. Donc le déterminant des équations (7) doit être identiquement nul et ce déterminant n'est autre que $J$. Nous aurons fréquemment l'occasion de nous servir de ce théorème.

III — Supposons que $f_1, f_2, \ldots f_n$ soient des fonctions composées, $u_1, u_2, \ldots u_n$ étant les $n$ fonctions composantes.

On aura, par la définition du déterminant fonctionnel et par le théorème des fonctions composées,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

En se reportant à la règle qui donne le produit de deux déterminants, on en déduit immédiatement :

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

formule analogue à celle qui donne la dérivée d'une fonction de fonctions.

IV — Considérons enfin les fonctions $u_1, u_2, \ldots u_n$ implicitement définies par $n$ équations

$$\begin{cases} \varphi_1(u_1, u_2, \ldots u_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(u_1, u_2, \ldots u_n; x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(u_1, u_2, \ldots u_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

avec la condition

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(u_1, u_2, \ldots u_n)} \neq 0$$

Cherchons le déterminant

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

Supposons les $u$ remplacés par leurs valeurs dans les $\varphi$ qui sont nuls identiquement; nous aurons, en différentiant, $n$ équations de la forme :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} du_n = -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right)$$

d'où on déduit $n^2$ relations telles que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

où on doit affecter $\varphi$ et $x$ successivement des indices $1, 2, \dots n$. On déduit de là, en se reportant à la règle de multiplication des déterminants

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(u_1, u_2, \dots u_n)} \quad \frac{D(u_1, u_2, \dots u_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

D'où

$$(-1)^n \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(u_1, u_2, \dots u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2 \dots u_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

formule qui donne le déterminant d'un système de fonctions implicites.

En particulier, si on considère un système de fonctions inverses, c'est-à-dire telles que

$$\varphi_i = f_i(u_1, u_2, \dots u_n) - x_i,$$

on en déduit :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = -1$$

et

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots x_n)}{D(u_1, u_2 \dots u_n)} ; \quad \frac{D(u_1, u_2, \dots u_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} = 1$$

Toutes ces règles de calcul des déterminants fonctionnels sont dues à Jacobi (Dét. funct. §8 et suivants).

Comme application, reprenons les équations :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

vérifiées pour

$$x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0 \quad r = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \varphi = 0$$

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta$$

se réduit à $+1$ pour ces valeurs particulières. Il existe donc trois fonctions $r, \theta, \varphi$ de $x, y, z$ se réduisant à $1, \frac{\pi}{2}, 0$ pour $x = 1 \quad y = 0 \quad z = 0$.

Pour ces fonctions nous aurons :

$$\frac{D(r,\theta,\varphi)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}$$

Mais on a d'autre part :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = r^2 \\ x^2+y^2 = r^2 \sin^2\theta \end{cases}$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = r \sin\theta$$

et

$$\frac{D(r,\theta,\varphi)}{D(x,y,z)} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}}$$

---

# Quatrième Leçon

## Dérivées et Différentielles des divers ordres des fonctions d'une seule variable

---

I —— Considérons une fonction $f(x)$, qui admette une dérivée $f'(x)$. Celle-ci pourra, à son tour, admettre une dérivée $f''(x)$ et ainsi de suite. Après $n$ dérivations on arrive ainsi à une fonction $f^{(n)}(x)$, qu'on appelle la dérivée $n^{ième}$ de $f(x)$. Nous allons démontrer une propriété de cette fonction qui la relie à $f(x)$ d'une façon plus immédiate.

Soit $\Delta f$ l'accroissement de $f(x)$ correspondant à un accroissement $h_1$ de la variable

$$\Delta f = f(x+h_1) - f(x)$$

Si dans cette formule nous donnons à $x$ un nouvel accroissement $h_2$, $\Delta f$ prendra un accroissement $\Delta . \Delta f$ ou $\Delta^2 f$, que nous appelons différence seconde de $f$ : on a

$$\Delta^2 f = f(x+h_1+h_2) - f(x+h_2) - f(x+h_1) + f(x)$$

De là on déduirait de même la différence troisième correspondant à l'accroissement $h_3$ et ainsi de suite. Remarquons que $\Delta^2 f$ ne dépend pas de l'Ordre dans lequel on a introduit les accroissements successifs $h_1$ et $h_2$. Donc, en partant de $\Delta^{n-2} f$, on pourra intervertir l'ordre des deux derniers accroissements pour obtenir $\Delta^n f$ et par suite l'ordre de deux accroissements consécutifs : il en résulte enfin que $\Delta^n f$ est indépendant de l'Ordre dans lequel on a introduit les accroissements $h_1, h_2, \dots h_n$. On a, par exemple,

$$\Delta^n f = \Delta^p \Delta^q f \qquad (p+q=n)$$

Introduisons dans l'expression de la différence $n^{ième}$ la dérivée $n^{ième}$. Si nous considérons un premier accroissement $h$, donné à la

variable $x$ nous avons :

Posons :
$$\Delta f = f(x+h_1) - f(x)$$
$$\varphi(x) = f(x+h_1) - f(x)$$

On en déduit
$$\varphi'(x) = f'(x+h_1) - f'(x)$$
et d'après le théorème des accroissements finis
$$\varphi'(x) = h_1 f''(x+\theta_1 h_1) \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

On a de même
$$\Delta^2 f = \varphi(x+h_2) - \varphi(x)$$
$$= h_2 \varphi'(x+\theta_2 h_2) \qquad 0 < \theta_2 < 1$$
ou d'après l'expression de $\varphi'(x)$
$$\Delta^2 f = h_1 h_2 f''(x+\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2)$$

Démontrons que l'on a, en général, la relation :

(1) $$\Delta^{(n)} f = h_1 h_2 \dots h_n f^{(n)}(x+\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \dots + \theta_n h_n)$$

il nous suffit, pour cela, de l'admettre pour $n$ et de la démontrer pour $n+1$, puisqu'elle est vraie pour $n = 2$.

Introduisons un nouvel accroissement $h_{n+1}$. On a :
$$\Delta^{n+1} f = \Delta^n \varphi$$
et, d'après la formule (1) supposée exacte
$$\Delta^{n+1} f = h_1 h_2 \dots h_n \varphi^{(n)}(x+\theta_1 h_1 + \dots + \theta_n h_n)$$

Ceci posé, revenons à la formule qui définit $\varphi(x)$ pour la différentier $n$ fois.
$$\varphi'(x) = f'(x+h_{n+1}) - f'(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+h_{n+1}) - f^{(n)}(x)$$
$$= h_{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1} h_{n+1}) \qquad 0 < \theta_{n+1} < 1$$

Remplaçons dans cette relation $x$ par $x+\theta_1 h_1 + \dots + \theta_n h_n$
$$\Delta^{n+1} f = h_1 h_2 \dots h_{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \dots + \theta_{n+1} h_{n+1})$$

C'est la relation (1) étendue à la valeur $n+1$ ; cette relation (1) est donc démontrée.

Si $f^{(n)}$ est continu, la formule (1) montre que, lorsque $h_1, h_2 \dots h_n$ tendent vers zéro, le rapport
$$\frac{\Delta^n f}{h_1 h_2 \dots h_n}$$
tendra vers une limite, qui sera $f^{(n)}(x)$.

Nous avons dans cette démonstration supposé que $x$ variait suivant une loi quelconque ; il peut, par exemple, dépendre d'une variable $t$ : dans ce cas on n'est pas le maître des accroissements successifs de $x$. Si, au contraire $x$ est la variable indépendante, on peut lui donner des accroissements successifs tout à fait arbitraires ; nous conviendrons de les prendre égaux entre eux.

On aura, dans ces conditions :

$$\lim \frac{\Delta^n f}{h^n} = f^{(n)}(x)$$

ce qui pourra s'écrire

$$\Delta^n f = h^n f^{(n)}(x) + h^n \mathcal{E}$$

$\mathcal{E}$ tendant vers zéro en même temps que $h$. Ainsi lorsque l'on donne à $x$ un accroissement quelconque, la $n^{ième}$ différence de la fonction se compose de deux parties, une première dite partie principale, qui est, en général, infiniment petite de l'ordre $n$ par rapport à $h$, et une autre, infiniment petite par rapport à la première, en général. On appelle la partie principale différentielle $n^{ième}$ de la fonction et on la représente par $d^n y$. On a donc

$$d^n y = h^n f^{(n)}(x)$$

et d'autre part :

$$h = dx$$

d'où l'on conclut :

$$d^n y = dx^n f^{(n)}(x)$$

ou

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

$x$ étant la variable indépendante.

Remarque — On aurait d'ailleurs pu définir la différentielle seconde comme la différentielle de la différentielle première, la différentielle troisième comme la différentielle de la seconde et ainsi de suite. En effet, en différentiant les deux membres de l'égalité

$$dy = f'(x)\, dx$$

où $dx$ est une constante, on a

$$d(dy) = f''(x)\, dx^2$$
$$= d^2 y$$

puis en différentiant

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2$$

on obtient

$$d(d^2 y) = f'''(x)\, dx^3$$
$$= d^3 y \qquad \text{etc} \ldots$$

II — Si on applique de proche en proche les procédés indiqués pour trouver la différentielle première, on aura, sans règle nouvelle, les différentielles d'ordre quelconque. Examinons quelques cas simples.

1° Polynômes entiers — On a d'une manière générale

$$d^n(u + v + w + \ldots\ldots + t) = d^n u + d^n v + d^n w + \ldots + d^n t$$

Un polynôme entier est une somme de termes tels que $A_{m-p} x^p$ ; la différentielle première de ce terme est $p A_{m-p} x^{p-1} dx$, la seconde $p(p-1) A_{m-p} x^{p-2} dx^2$, etc..., la $p^{ème}$ $1.2 \ldots . p A_{m-p} dx^p$. C'est une constante, donc toutes les

différentielles suivantes sont nulles. Si nous supposons qu'on ait un polynôme du $m^{ème}$ degré, chaque dérivation ayant pour effet de diminuer le degré d'une unité, la dérivée d'Ordre $m$ est une constante $1.2.3 \ldots m A_0$, et les suivantes sont nulles. La série des dérivées est donc limitée et leur nombre égal au degré degré du polynôme.

Cette propriété caractérise un polynôme du $m^{ème}$ degré. En effet, la dérivée d'ordre $m+1$ étant nulle, celle d'ordre $m$ est une constante $\alpha_0$. Le terme $\alpha_0 x$, a pour dérivée $\alpha_0$; par suite, la fonction la plus générale qui a $\alpha_0$ pour dérivée, et en particulier la dérivée d'ordre $m-1$, en diffère par une constante et est $\alpha_0 x + \alpha_1$. La dérivée d'ordre $m-2$ est de même $\alpha_0 \frac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \alpha_2$ et ainsi de suite. D'une manière générale, la dérivée d'ordre $m-p$ est un polynôme du degré $p$ et la fonction elle-même est un polynôme de degré $m$.

2° — Fonctions de fonctions. — Soit une fonction

$$y = f(u)$$

$u$ étant une fonction de $x$. Le théorème des fonctions de fonctions donne

$$dy = f'(u)\,du$$

Différentions les deux membres de cette égalité, nous obtenons:

$$d^2y = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u.$$

$du$ n'étant plus constant; puis, en différentiant encore:

$$d^3y = f'''(u)\,du^3 + 3f''(u)\,du\,d^2u + f'(u)\,d^3u$$

Il est facile de prévoir la forme de $d^n y$. Ce sera un polynôme homogène et de degré $n$ par rapport aux indices différentiels; dans les coëfficients, les indices des dérivées de $f(u)$ se succèdent d'une façon simple. L'expression générale se simplifie si $u$ est linéaire en $x$.

$$u = ax + b$$
$$du = a\,dx$$

$du$ est constant comme si $u$ était la variable indépendante. Donc:

$$\frac{d^n y}{du^n} = f^{(n)}(u)$$

3° — Fonctions rationnelles — Nous savons qu'on peut donner à une fonction rationnelle la forme d'un polynôme entier augmenté d'une somme de fractions simples.

Dérivons donc celles-ci; elles sont de la forme $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$. Posons

$$y = (x-a)^{-\alpha}$$

Nous en tirons

$$y' = -\alpha\,(x-a)^{-\alpha-1}$$
$$y'' = -\alpha\,(-\alpha-1)(x-a)^{-\alpha-2}$$

et ainsi de suite

$$y^{(n)} = (-1)^n \alpha.(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,(x-a)^{-\alpha-n}$$

Considérons maintenant les fractions correspondantes à des racines imaginaires

comme
$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^\beta}$$

La règle de la dérivée d'un quotient donnera les dérivées de cette expression de proche en proche, mais il est impossible d'entrevoir ainsi leur loi de formation. On peut tourner la difficulté de la manière suivante. La dérivation d'une fonction entière ou rationnelle donne lieu à une suite d'opérations régulières et déterminées. Nous pouvons considérer ces opérations comme définissant les dérivées et perdre de vue leur définition analytique. Dans ces conditions, si nous transformons la fraction donnée et que nous la dérivions sous sa nouvelle forme, comme sa dérivée d'ordre n est unique, nous retrouverons, en réduisant les résultats, une expression identique à la dérivée d'Ordre n. Décomposons la fraction en fractions imaginaires, sans nous inquiéter des imaginaires, de la forme suivante:

$$\frac{A_\beta+iB_\beta}{(x-a+bi)^\beta}+\frac{A_\beta-iB_\beta}{(x-a-bi)^\beta}$$

Dérivons algébriquement ces deux fractions, on passe de la première à la seconde en changeant $i$ en $-i$ et de même d'une dérivée à l'autre; donc en combinant les résultats, les imaginaires disparaîtront et nous aurons la dérivée cherchée. Soit par exemple,

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

On a

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$$

ou

$$2iy=\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}$$

$$2iy^{(n)}=(-1)^n\,1.2.\ldots.n\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

Le second membre contiendra, si on réduit les fractions au dénominateur commun $(1+x^2)^{n+1}$ $2i$ en facteur et l'expression de $y^{(n)}$ sera dégagée d'imaginaires;

4° — Fonctions transcendantes — Considérons

$$y=\sin x$$

Nous savons que l'on a

$$y'=\cos x$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Puisqu'il suffit d'ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, nous obtiendrons:

$$y^{(n)}=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Soit maintenant

$$y=\cos x$$
$$y'=-\sin x$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

par suite

$$y^{(n)}=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Comme $e^x$ se reproduit par la dérivation, sa dérivée $n^{ème}$ sera $e^x$.

Les dérivées des fonctions inverses des fonctions simples sont un peu plus compliquées. Considérons le logarithme népérien

$$y = L\,x$$

On a

$$y' = \frac{1}{x}$$

La dérivée d'ordre $n$ de $y$ ou la dérivée d'ordre $n-1$ de $\frac{1}{x}$ est

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{1.2.\ldots.(n-1)}{x^n}$$

Passons à la fonction

$$y = \text{Arc tg}\, x$$

Comme nous avons

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

nous devons, pour avoir dérivée d'Ordre $n$, prendre la dérivée d'ordre $n-1$ de $\frac{1}{1+x^2}$, ce qui donne

$$2i\,y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,1.2.\ldots(n-1)\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

Pour faire disparaître les imaginaires, mettons en évidence le module et l'argument :

$$x + i = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Nous déduisons de là :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ 1 = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$\rho = \sqrt{1+x^2} \qquad \varphi = \text{arc cot}\, x$$

Cela posé, la formule de Moivre donne :

$$\frac{1}{(x+i)^n} = \rho^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$$

$$\frac{1}{(x-i)^n} = \rho^{-n}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

et il vient

$$2i\,y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{1.2.\ldots.(n-1)}{\rho^n}\,2i\sin n\varphi$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{1.2.\ldots.(n-1)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\,\sin(n\,\text{arc cotg}\,x)$$

III — Dès qu'on n'a plus affaire à des fonctions simples, les résultats se compliquent de plus en plus. Un cas où on peut néanmoins formuler le résultat final est celui d'un produit de fonctions simples. Soit, par exemple,

$$y = u\,v\,w$$

$$dy = v\,w\,du + w\,u\,dv + u\,v\,dw$$

Différentions

$$d^2y = v\,w\,d^2u + w\,u\,d^2v + u\,v\,d^2w + 2\,w\,du\,dv + 2u\,dv\,dw + 2v\,dw\,du$$

On voit que la différentielle d'Ordre $n$ est évidemment homogène et du degré $n$ par rapport aux indices différentiels, en convenant d'attribuer l'indice zéro à

à une fonction qui n'est pas différentiée.

De plus les coëfficients de chaque terme dans son expression générale sont de pures constantes qui ne dépendent en aucune manière des fonctions $u, v, w$.

On a dans ces conditions

$$(1) \qquad d^n y = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\, d^\alpha u\, d^\beta v\, d^\gamma w \qquad \alpha+\beta+\gamma=n$$

Il suffit alors de choisir les fonctions d'une manière particulière pour obtenir les coëfficients de la formule de Leibnitz. Supposons qu'on ait pris :

$$u = x^\alpha \qquad v = y^\beta \qquad w = z^\gamma$$

On en déduira

$$y = x^n$$

Le premier membre de l'égalité (1) sera

$$1.2\ldots\ldots.n\, dx^n$$

Quant au second, si on considère un terme dans lequel l'indice de $u$ soit supérieur à $\alpha$, il disparaît ; si l'indice de $u$ est inférieur à $\alpha$, il faudra que l'indice de $v$, par exemple, soit supérieur à $\beta$ et le terme disparaît encore ; il ne reste que le terme en $dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma$ ou

$$A_{\alpha\beta\gamma}\, \alpha!\ dx^\alpha \beta!\ dy^\beta \gamma!\ dz^\gamma$$

L'égalité (1) donnera donc

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{P_n}{P_\alpha P_\beta P_\gamma}$$

$P_i$ désignant le nombre des permutations de $i$ lettres.

Nous concluons de là que les coëfficients du développement sont ceux du développement de $(u+v+w)^n$. On a donc la formule symbolique

$$d^n(u\, v\, w\ldots) = (du + dv + dw + \ldots\ldots)^n$$

à la condition de convenir qu'après avoir effectué les calculs dans le second membre, on remplacera $du^p$ par $d^p u$, le symbole $d^o u$ représentant $u$ et les fonctions $u, v, w$, entrant dans tous les termes.

La formule précédente est connue sous le nom de formule de Leibnitz

---

# Cinquième Leçon.

---

## Dérivées partielles et différentielles de divers ordres des fonctions de plusieurs variables.

---

I —— Dérivées d'ordre supérieur —— Je considère une fonction de $n$ variables indépendantes, $f(x, y, z\ldots)$ Ses dérivées partielles $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots\ldots$ sont des fonctions des mêmes variables. Si nous les supposons continues

chacune d'elles pourra admettre n dérivées partielles qu'on appellera dérivées seconde de la fonction. Chaque dérivée seconde pourra de même, si elle est continue, admettre n dérivées qui seront les dérivées troisièmes, et ainsi de suite. Le nombre des dérivées de l'ordre p est donc $n^p$. Ce nombre se trouve réduit, parce que les expressions analytiques des dérivées ne sont pas toutes distinctes, comme le montre le théorème suivant.

Théorème — La valeur d'une dérivée partielle d'un ordre quelconque ne dépend que du nombre de fois qu'on a dérivé par rapport à chaque variable et en aucune façon de l'ordre dans lequel on a effectué les dérivations.

Soit, en effet, f une fonction où x et y sont les seules variables. Posons :

$$(1) \qquad \begin{cases} f'_x = \varphi(x,y) \\ f'_y = \psi(x,y) \end{cases}$$

et démontrons que l'on a

$$(2) \qquad \varphi'_y = \psi'_x$$

Il en résultera que, dans le cas de deux dérivations, nous pourrons intervertir leur ordre ; donc, dans le cas de plusieurs, l'ordre des deux dernières, de deux consécutives et enfin de deux quelconques. Supposons que l'on attribue à x l'accroissement h et appelons $\Delta_x f$ l'accroissement correspondant de f.

$$(3) \qquad \Delta_x f = f(x+h, y) - f(x,y)$$

Donnons de même un accroissement k à y

$$(4) \qquad \Delta_y \Delta_x f = f(x+h, y+K) - f(x, y+K) - f(x+h, y) + f(x,y)$$

Exprimons cet accroissement à l'aide des dérivées partielles ; appliquons à l'égalité (3) le théorème des accroissements finis.

$$\Delta_x f = h\,\varphi(x+\theta h, y) \qquad 0 < \theta < 1$$

Nous avons, par suite,

$$\Delta_y \Delta_x f = h\left[\varphi(x+\theta h, y+K) - \varphi(x+\theta h, y)\right]$$
$$= h\,h\,\varphi'(x+\theta h, y+\lambda K) \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$\frac{\Delta_y \Delta_x f}{hK} = \varphi'_y(x+\theta h, y+\lambda K)$$

Si nous avions introduit d'abord l'accroissement h nous aurions eu évidemment

$$\frac{\Delta x \Delta y f}{Kh} = \psi'_x(x+\theta_1 h, y+\lambda_1 K) \qquad \begin{array}{l} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \lambda_1 < 1 \end{array}$$

Or la symétrie du second membre de (4) montre que les premiers membres des deux dernières égalités sont identiques, donc les seconds

$$\varphi'_y(x+\theta h, y+\lambda k) = \psi'_x(x+\theta_1 h, y+\lambda_1 k)$$

Si nous supposons les dérivées partielles continues, comme l'équation subsiste quelque petits que soient h et k nous aurons à la limite : $\varphi'_y(x,y) = \psi'_x(x,y)$. C.Q.F.D.

D'après cela, il suffira, pour représenter une dérivée d'ordre quelconque, d'indiquer le nombre de fois qu'on a dérivé par rapport à chaque variable. Nous représenterons la dérivée d'ordre $i$ par $f^{(i)}_{x^p y^q z^r \dots}$ ou mieux par $\frac{\partial^i f}{\partial x^p dy^q dz^r \dots}$ avec $p+q+r+\dots = i$. Il ne faut attacher à ce dernier signe aucune autre signification, celle de quotient par exemple, le symbole $\partial$ n'ayant par lui-même aucun sens. Le nombre des dérivées d'Ordre $p$ est égal au nombre de combinaisons complètes de $n$ objets $p$ à $p$ $\frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{1.2\dots\dots p}$

## II — Différentielles

À la notion des dérivées se rattache immédiatement celle des différentielles. Nous avons pour la différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \dots\dots\dots$$

Supposons qu'on donne aux variables un système d'accroissements égaux aux premiers, hypothèse légitime puisque les variables sont indépendantes. Le second membre est une fonction de $x, y, z \dots$ seulement, $dx, dy, dz \dots$ étant des constantes; il a donc, pour ce système d'accroissements, une différentielle, la différentielle totale du second ordre de $f$:

$$d^2f = dx\, d\frac{\partial f}{\partial x} + dy\, d\frac{\partial f}{\partial y} + dz\, d\frac{\partial f}{\partial z} + \dots\dots$$

$$d^2f = dx\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dz + \dots\right) + dy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}dx \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dz + \dots\right) + \dots$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \dots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz + \dots\dots\dots$$

De nouveaux accroissements égaux aux premiers nous donneront la différentielle d'ordre 3 qui aura la forme

$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 + \dots + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\,\partial x}dy^2dx + \dots + 6\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \dots$$

On voit de suite la forme de la différentielle d'ordre $p$.

$$d^pf = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma\dots} \frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \dots} dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \dots \qquad \alpha+\beta+\gamma+\dots = p$$

$A_{\alpha\beta\gamma\dots}$ étant des constantes indépendantes de la nature de $f$.

Pour les obtenir prenons le cas particulier

$$f(x, y, z\dots) = e^{x+y+z+\dots}$$

la différentielle totale est alors:

$$df = e^{x+y+z+\dots}(dx + dy + dz + \dots\dots\dots)$$

Nous retombons sur la fonction, au facteur constant près $dx + dy + dz + \dots$, que chaque différentiation introduira une fois, donc:

$$d^pf = (dx + dy + dz + \dots)^p e^{x+y+z+\dots\dots\dots}$$

Comme nous avons $\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \dots} = e^{x+y+z+\dots}$

la différentielle s'écrit encore

$$d^p f = \left(\Sigma A_{\alpha\beta\gamma\ldots} \, dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \ldots\right) e^{x+y+z}$$

Egalons ces deux valeurs et enlevons le facteur $e^{x+y+z+\ldots}$

$$\Sigma A_{\alpha\beta\gamma\ldots} \, dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \ldots = (dx+dy+dz+\ldots)^p$$

Les A sont donc les coëfficients de la $p^{\text{ème}}$ puissance d'un polynôme

$$A_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}$$

et l'expression de la différentielle d'ordre p est donnée par la formule symbolique

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \ldots\ldots\right)^p f$$

où on convient de développer le premier membre conformément à la règle d'élévation aux puissances des polynômes et d'y considérer les exposants comme des indices de dérivation.

Nous remarquerons que la différentielle ne peut se mettre que d'une manière sous la forme

$$\Sigma C_{\alpha\beta\gamma\ldots} \, dx^\alpha dy^\beta dz^\gamma \ldots$$

Si donc nous avons une telle expression de la différentielle, nous en déduirons

$$C_{\alpha\beta\gamma\ldots} = A_{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots\ldots}$$

et

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots} = C_{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}{p!}$$

Ainsi, de la différentielle d'Ordre p on peut déduire chacune des dérivées partielles de cet ordre.

III — Fonctions composées — Cherchons les différentielles totales d'Ordre quelconque d'une fonction composée

$$H = f(u, v, w, \ldots)$$

$u, v, w, \ldots$ étant les composantes, $x, y, z \ldots$ les variables indépendantes.

Différentions l'équation :

$$dH = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \ldots\ldots\ldots$$

nous avons

$$d^2 H = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} dw^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du\, dv + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} dv\, dw + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v + \frac{\partial f}{\partial w} d^2 w + \ldots\ldots$$

En continuant ainsi les résultats se compliqueront, $du, dv, \ldots$ n'étant pas des constantes.

Quand $u, v, w, \ldots$ sont linéaires par rapport aux variables dont ils dépendent,

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots\ldots\ldots$$
$$du = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz + \ldots\ldots$$

$dx, dy, dz \ldots$ étant des constantes, $du$ est une constante et la différentielle totale a même forme que si $u, v, w, \ldots$ étaient les variables indépendantes

$$d^p H = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \frac{\partial}{\partial w} dw + \ldots\right)^p f(u, v, w, \ldots)$$

On en déduira les dérivées partielles d'Ordre $p$.

## IV — Fonctions implicites

— Soit enfin un système d'équations :

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \ldots u_p, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, \ldots u_p, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(u_1, u_2, \ldots u_p, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

définissant un système de fonctions implicites $u_1, u_2, \ldots u_p$ ; par suite leur déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_p}{\partial u_1} & \frac{\partial f_p}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial u_p} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Pour calculer les dérivées partielles des $u$ jusqu'à l'ordre $k$, différentions $k$ fois chaque équation

$$\begin{cases} (1) \quad df_1 = 0 \quad df_2 = 0 \ldots\ldots df_p = 0 \\ (2) \quad d^2 f_1 = 0 \quad d^2 f_2 = 0 \ldots\ldots d^2 f_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^k f_1 = 0 \quad d^k f_2 = 0 \ldots\ldots d^k f_p = 0 \end{cases}$$

en regardant les $f$ comme des fonctions composées de $x_1, x_2 \ldots x_n$, les composantes étant $u_1, u_2, \ldots u_p, x_1, x_2, \ldots x_n$. On a pour $df$ l'expression

$$(A) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p} du_p = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p\right).$$

(A) devient lorsqu'on affecte $f$ des indices $1, 2, \ldots k$ un système d'équations linéaires au déterminant $J$ par rapport aux inconnues $du_1, du_2, \ldots du_p$. On peut donc les résoudre.

Pour former le système (2) différentions (A):

$$(B) \quad \frac{\partial f}{\partial u_1} d^2u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} d^2u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p} d^2u_p + \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} du_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} du_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial u_p^2} du_p^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} du_1 du_2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial x_1} du_1 dx_1 + \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \ldots = 0,$$

affectons $f$ des indices $1, 2, \ldots p$ et remplaçons $du_1, du_2, \ldots du_p$ par les valeurs trouvées précédemment, qui sont homogènes en $dx_1, dx_2, \ldots dx_p$. Nous obtenons un système d'équations linéaires en $d^2u_1, d^2u_2, \ldots d^2u_p$, au même déterminant $J$ et dont le terme

indépendant des inconnues est homogène et du second degré en $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$.

En général, après $k$ différentiations, on arrivera à un système d'équations en $d^k u_1, d^k u_2, \ldots d^k u_p$, dont chacune sera de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} d^k u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} d^k u_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial u_p} d^k u_p + \varphi_k = 0$$

$\varphi_k$ étant un polynôme, qui, dès qu'on y a remplacé les différentielles d'ordre inférieur à $k$ par leurs valeurs, devient une forme homogène et du degré $k$ en $dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Le déterminant de ces équations est $J$ et on en tire

$$d^k u_i = \Sigma A^i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k$$

d'où on déduit, d'après une remarque précédente,

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = A^i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n} \frac{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!}{k!}$$

Pour terminer, donnons un exemple. L'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

définit une fonction implicite $z$ de $x$ et de $y$, tant que le point $(x, y)$ reste intérieur au cercle

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = a^2$$

Ce cercle remplace le rectangle qui, pour les fonctions de deux variables, représente le champ et dont les côtés ont pour équations

$$x = \alpha \qquad x = \beta \qquad y = \gamma \qquad y = \delta$$

si le champ est $(\alpha \beta)$ $(\gamma \delta)$

Différentions trois fois l'équation (1)

$$(2) \qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

$$(3) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 + z\,d^2z = 0$$

$$(4) \qquad 3\,dz\,d^2z + z\,d^3z = 0$$

Ces équations vont nous donner les dérivées partielles des trois premiers ordres. De (2) nous tirons :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

(3) s'écrit

$$z^2(dx^2 + dy^2) + (x\,dx + y\,dy)^2 + z^3 d^2z = 0$$

et donne

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}$$

(4) devient

$$3(x\,dx + y\,dy)\left[z^2(dx^2 + dy^2) + (x\,dx + y\,dy)^2\right] + z^5 d^3z = 0$$

d'où

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -3x\frac{x^2 + z^2}{z^5} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{y(x^2 + z^2) + 2x^2 y}{z^5}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -3y\frac{y^2 + z^2}{z^5} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{x(y^2 + z^2) + 2xy^2}{z^5}$$

# Sixième Leçon

## Changement de Variables.

On peut être amené dans le courant d'une question à changer les variables primitives pour d'autres. Les expressions différentielles se transforment alors par l'application pure et simple des procédés ordinaires du calcul différentiel. Il suffit d'appliquer les formules relatives aux fonctions composées et aux différentielles totales. Il est bon, néanmoins de passer en revue les cas les plus importants pour indiquer une marche régulière. Nous distinguerons quatre cas suivant qu'on considère une seule ou plusieurs variables indépendantes et qu'on change de variables seulement ou de variables et de fonction

I — Considérons une fonction V qui dépend de $x$, de $y$ et des dérivées de $y$ par rapport à $x$ jusqu'à l'ordre $n$

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

Soit une quantité $t$ liée d'une manière quelconque à $x$. Il s'agit d'exprimer V en fonction de $t$ et des dérivées de $y$ par rapport à $t$. Affranchissons-nous de la restriction en vertu de laquelle $x$ est la variable indépendante : $\frac{dy}{dx}$ restera alors un quotient de différentielles, mais il n'en sera plus de même de

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

qui représenteront simplement les dérivées

$$y''_{x^2}, y'''_{x^3}, \ldots, y^{(n)}_{x^n}$$

Pour chercher leur expression, la variable étant quelconque, différentions $\frac{dy}{dx}$, nous obtenons:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2}$$

et, en divisant par $dx$ les deux membres

$$y''_{x^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

Nous avons, en opérant de même sur cette égalité,

$$y'''_{x^3} = \frac{dx^3(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3dx^2 d^2x(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^7}$$

$$= \frac{dx(dx\, d^3y - dy\, d^3x) - 3d^2x\,(dx\, d^2y - dy\, d^2x)}{dx^5}$$

En continuant ainsi, nous exprimerons les dérivées de $y$ au moyen des différentielles de $y$ et de $x$ par des fonctions homogènes et de degré zéro par rapport aux indice de différentiation. Différentions $n$ fois la relation (1) $\quad x = \varphi(t)$
qui lie $x$ et $t$, en regardant $t$ comme la variable indépendante;

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$

$$d^2x = \varphi''(t)\, dt^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^nx = \varphi^{(n)}(t)\, dt^{(n)}$$

Il n'entre pas d'autres différentielles de $x$ dans les expressions considérées : si on y remplace celles-ci par leurs valeurs $y_{x^r}^{(r)}$ devient une fraction dont les deux termes sont du même degré, ou, en divisant haut et bas par une puissance convenable de $dt$, du degré zéro. C'est dire qu'il n'y entre que des facteurs de la forme $\frac{d^i y}{dt^i}$, ou les dérivées de $y$ par rapport à $t$. Il suffira pour achever la substitution de porter dans V les valeurs ainsi obtenues.

La relation (1) donne $x$ explicitement : elle pourrait être remplacée par une relation qui définirait $x$ implicitement et pourrait même contenir $y$ comme

$$\varphi(x, t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x, t, y) = 0$$

La méthode resterait la même. On part des mêmes expressions des dérivées de $y$, on calcule encore les différentielles de $x$ en différentiant $n$ fois la relation, comme on l'a vu dans le calcul des différentielles d'une fonction implicite, on porte les $y^{(i)}$ dans V et il reste à en éliminer $x$ à l'aide de l'équation $\varphi = 0$, ce qui est une opération purement algébrique.

Exemple — Soit à transformer la fonction :

$$V = (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2 y$$

par la formule :

$$x = \sin t$$

Différentions deux fois cette relation, en supposant $dt$ constant :

$$dx = \cos t\, dt$$

$$d^2x = -\sin t\, dt^2$$

Il vient, par suite :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{\cos t\, dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y\, dx - dy\, d^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{d^2y . \cos t . dt + dy . \sin t\, dt^2}{\cos^3 t\, dt^3}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\sin t}{\cos^3 t}\frac{dy}{dt}$$

La fonction transformée est

$$V = \frac{d^2y}{dt^2} + a^2 y$$

II — Supposons qu'on donne les équations

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi(x, y, t, u) = 0 \\ \psi(x, y, t, u) = 0 \end{cases}$$

liant à $x$ et $y$ deux variables $u$ et $t$. Si $y$ est une fonction de $x$, on peut imaginer qu'o élimine $x$ entre ces équations ; il resterait une relation entre $u$ et $t$, ce qui montre que

peut alors être regardée comme une fonction de $t$. La considération d'une quelconque des formules (3) montre alors que $x$, et par suite, $y$ sont fonctions de $t$. $V$ peut donc être exprimé en fonction de $t$, de $u$ et des dérivées de $u$ par rapport à $t$. Il s'agit de trouver cette expression. Pour cela, on remplace les dérivées de $y$ par les rapports différentiels et, dans ceux-ci, $dy, d^2y, \dots d^ny$; $dx, d^2x, \dots d^nx$ par leurs valeurs en fonction de $dt, du, d^2u, \dots d^nu$. On obtient ces valeurs en différentiant $n$ fois les équations (3) et en résolvant les relations obtenues : le déterminant $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}$ est supposé différent de zéro, sinon $x$ et $y$ ne pourraient être exprimés en $t$ et $u$. $V$ devient donc fonction de $x$ et $y$ donnés par (3) et des dérivées de $u$ par rapport à $t$.

Exemple — Prenons la fonction

$$V = \frac{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}$$

avec les formules

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Différentions les deux fois, $\theta$ étant la variable indépendante, et $r$ la nouvelle fonction :

$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2x = \cos\theta\, d^2r - 2\sin\theta\, d\theta\, dr - r\cos\theta\, d\theta^2 \\ d^2y = \sin\theta\, d^2r + 2\cos\theta\, d\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta^2 \end{cases}$$

On déduit de là :

$$\begin{aligned} dx\,d^2y - dy\,d^2x &= \sin\theta\cos\theta\, dr\, d^2r + 2\cos^2\theta\, dr^2 d\theta - 3r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta^2 - r\sin^2\theta\, d^2r\, d\theta + r^2\sin^2\theta\, d\theta^3 \\ &\quad - \sin\theta\cos\theta\, dr\, d^2r + 2\sin^2\theta\, dr^2 d\theta + 3r\sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta^2 - r\cos^2\theta\, d^2r\, d\theta + r^2\cos^2\theta\, d\theta^3 \\ &= 2dr^2 d\theta - r\,d^2r\, d\theta + r^2 d\theta^3 \end{aligned}$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Or $V$ s'écrit :

$$V = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - dy\,d^2x}$$

et devient

$$V = \frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2dr^2 d\theta - r\,d^2r\, d\theta + r^2 d\theta^3} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - r r'' + r^2},$$

les dérivées de $r$ étant prises par rapport à $\theta$.

III — Nous arrivons au cas où l'on a plusieurs variables indépendantes ; prenons en trois, par exemple, ce qui ne diminue en rien la généralité des raisonnements. Considérons une fonction $V$ dépendant de $x, y, z$, d'une fonction $H$ de ces variables et d'un certain nombre de dérivées partielles de $H$

$$V = f\left(x, y, z, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \dots\dots \frac{\partial^n H}{\partial z^n}\right)$$

Soient, de plus, trois quantités $u, v, w$ liées à $x, y, z$ par les relations

$$(4)\begin{cases} \varphi(u, v, w, x, y, z) = 0 \\ \psi(u, v, w, x, y, z) = 0 \\ \chi(u, v, w, x, y, z) = 0 \end{cases}$$

D'après cela, $x, y, z$ étant fonctions de $u, v, w$, nous nous proposons d'exprimer V en fonction de $u, v, w$, $H$ et des dérivées partielles de $H$ par rapport à $u, v$, et $w$. Il suffirait pour cela d'appliquer le théorème des fonctions composées à $H$, fonction de $x, y, z$ par l'intermédiaire des fonctions composantes $u, v, w$ : on en déduirait les dérivées partielles de $H$ par rapport aux $x$ au moyen des dérivées par rapport aux $u$. Il existe un procédé plus commode. Admettons que les dérivées premières et secondes de $H$ entrent seules. On verra très aisément comment se continuerait le calcul, s'il y avait des dérivées d'ordre supérieur à 2.

Prenons $x, y, z$ comme variables indépendantes et écrivons les identités

$$(6)\quad \frac{\partial H}{\partial u}du + \frac{\partial H}{\partial v}dv + \frac{\partial H}{\partial w}dw = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz$$

$$(7)\quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2}dw^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial v\partial w}dv\,dw + 2\frac{\partial^2 H}{\partial w\partial u}dw\,du + 2\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}du\,dv + \frac{\partial H}{\partial u}d^2u + \frac{\partial H}{\partial v}d^2v + \frac{\partial H}{\partial w}d^2w$$

$$= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z}dy\,dz + 2\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial x}dz\,dx + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}dx\,dy$$

Différentions deux fois les équations (4) en supposant constants $dx, dy, dz$ ; la résolution de deux systèmes d'équations linéaires donnera $du, dv, dw, d^2u, d^2v, d^2w$ en fonction de $dx, dy, dz$. Portons-les dans les identités précédentes ; les deux membres de chacune deviennent des fonctions de $dx, dy, dz$ ; si nous les identifions, nous obtiendrons

$$\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}$$

au moyen de

$$\frac{\partial H}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial v}, \frac{\partial H}{\partial w}, \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}.$$

et nous pourrons les porter dans V.

La solution serait la même si $H$ entrait dans (4)

Exemple — Soient les formules

$$\begin{cases} u = \alpha + ax + a'y + a''z \\ v = \beta + bx + b'y + b''z \\ w = \gamma + cx + c'y + c''z \end{cases}$$

Le déterminant fonctionnel coïncide avec le déterminant de résolution de ces équations. La différentiation donne

$$\begin{cases} du = a\,dx + a'dy + a''dz \\ dv = b\,dx + b'dy + b''dz \\ dw = c\,dx + c'dy + c''dz \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2u = 0 \\ d^2v = 0 \\ d^2w = 0 \end{cases}$$

Il vient

$$\frac{\partial H}{\partial u}(a\,dx+a'dy+a''dz)+\frac{\partial H}{\partial v}(b\,dx+b'dy+b''dz)+\frac{\partial H}{\partial w}(c\,dx+c'dy+c''dz)=\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{\partial H}{\partial y}dy+\frac{\partial H}{\partial z}dz$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}&=a\frac{\partial H}{\partial u}+b\frac{\partial H}{\partial v}+c\frac{\partial H}{\partial w}\\ \frac{\partial H}{\partial y}&=a'\frac{\partial H}{\partial u}+b'\frac{\partial H}{\partial v}+c'\frac{\partial H}{\partial w}\\ \frac{\partial H}{\partial z}&=a''\frac{\partial H}{\partial u}+b''\frac{\partial H}{\partial v}+c''\frac{\partial H}{\partial w}\end{aligned}\right.$$

On a ensuite :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(a\,dx+a'dy+a''dz)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(b\,dx+b'dy+b''dz)^2+\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}(c\,dx+c'dy+c''dz)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}(b\,dx+b'dy+b''dz)(c\,dx+c'dy+c''dz)+2\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}(c\,dx+c'dy+c''dz)(a\,dx+a'dy+a''dz)$$

$$+2\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}(a\,dx+a'dy+a''dz)(b\,dx+b'dy+b''dz)=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 H}{\partial v\partial w}dv\,dw+2\frac{\partial^2 H}{\partial w\partial u}dw\,du+2\frac{\partial^2 H}{\partial u\partial v}du\,dv$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}&=a^2\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+b^2\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+c^2\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+2bc\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}+2ca\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+2ab\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}&=a'^2\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+b'^2\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+c'^2\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+2b'c'\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}+2c'a'\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+2a'b'\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}&=a''^2\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+b''^2\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+c''^2\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+2b''c''\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}+2c''a''\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+2a''b''\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial z}&=a'a''\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+b'b''\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+c'c''\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+(c'b''+b'c'')\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial u}+(a'c''+c'a'')\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+(b'a''+a'b'')\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial x}&=a''a\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+b''b\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+c''c\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+(c''b+bc'')\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}+(a''c+ca'')\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+(b''a+ab'')\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}&=aa'\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}+bb'\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}+cc'\frac{\partial^2 H}{\partial w^2}+(cb'+bc')\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial w}+(ac'+ca')\frac{\partial^2 H}{\partial w\,\partial u}+(ba'+ab')\frac{\partial^2 H}{\partial u\,\partial v}\end{aligned}\right.$$

Supposons qu'il existe entre $a, a', a'', b, b', b'', c, c'c''$ les mêmes relations qu'entre les cosinus de trois droites rectangulaires, les axes de coordonnées étant rectangulaires, et soit à transformer la fonction

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2$$

que Lamé a appelée le paramètre différentiel du premier ordre. On obtient dans ces conditions,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial w}\right)^2$$

L'expression analytique de ce paramètre n'est pas altérée par la substitution orthogonale. Il en est de même du paramètre du 2° ordre

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

IV — Nous arrivons enfin au cas où V dépend de plusieurs variables indépendantes et d'une fonction H de ces variables et où on change à la fois les variables et la fonction. Limitons encore ce cas à trois variables et au second ordre

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ H,\ K)=0 \\ \psi(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ H,\ K)=0 \\ \chi(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ H,\ K)=0 \\ \varpi(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z,\ H,\ K)=0 \end{cases}$$

Nous voulons remplacer les dérivées de $H$ par rapport à $x, y, z$ par les dérivées de $K$ par rapport à $u, v, w$.

Différentions une première fois les équations (8) en tenant compte de ce que nous avons

$$\begin{cases} dH=\dfrac{\partial H}{\partial x}dx+\dfrac{\partial H}{\partial y}dy+\dfrac{\partial H}{\partial z}dz \\ dK=\dfrac{\partial K}{\partial u}du+\dfrac{\partial K}{\partial v}dv+\dfrac{\partial K}{\partial w}dw \end{cases}$$

Entre les quatre relations obtenues, éliminons $du, dv, dw$ ; nous obtenons un résultant homogène et du premier degré en $dx, dy, dz$. Si nous écrivons que c'est une identité, nous aurons trois relations contenant

$$\frac{\partial H}{\partial x},\ \frac{\partial H}{\partial y},\ \frac{\partial H}{\partial z}$$

au premier degré et que nous pouvons résoudre. Différentions une seconde fois en considérant $dx, dy, dz$ comme constants et en remarquant que l'on a

$$\begin{cases} d^2H=\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx^2+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}dy^2+\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}dz^2+\dfrac{2\partial^2 H}{\partial x\partial y}dx\,dy+\dfrac{2\partial^2 H}{\partial y\partial z}dy\,dz+\dfrac{2\partial^2 H}{\partial z\partial x}dz\,dx \\ d^2K=\dfrac{\partial^2 K}{\partial u^2}du^2+\dfrac{\partial^2 K}{\partial v^2}dv^2+\dfrac{\partial^2 K}{\partial w^2}dw^2+2\dfrac{\partial^2 K}{\partial v\partial w}dv\,dw+\dfrac{2\partial^2 K}{\partial w\partial u}dw\,du+\dfrac{2\partial^2 K}{\partial u\partial v}du\,dv+\dfrac{\partial K}{\partial u}d^2u+\dfrac{\partial K}{\partial v}d^2v+\dfrac{\partial K}{\partial w}d^2w \end{cases}$$

Remplaçons $du, dv, dw$ par leurs valeurs tirées des relations précédentes et entre les quatre équations obtenues éliminons $d^2u, d^2v, d^2w$. Le résultant est homogène et du second degré en $dx, dy, dz$ ; nous écrivons que c'est une identité et nous avons 6 équations du premier degré en

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\frac{\partial^2 H}{\partial y^2},\frac{\partial^2 H}{\partial z^2},\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial x},\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}$$

V — Les équations (8) peuvent être elles-mêmes des relations différentielles. C'est ce qui arrive dans l'exemple suivant:

Transformation de Legendre — Considérons une fonction $z$ de deux variables indépendantes $x$ et $y$. Posons, pour abréger,

$$(1)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=p \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$$

Prenons pour variables indépendantes $p$ et $q$ et pour fonction $\underline{u}$ définie par l'équation

$$(2)\quad u = px + qy - z$$

Les équations (1) et (2) sont celles qui définissent la transformation. En les différentiant une première fois, on trouve, après réduction :

$$(3)\left\{\begin{array}{l} dp = r\,dx + s\,dy \\ dq = s\,dx + t\,dy \\ \dfrac{\partial u}{\partial p}dp + \dfrac{\partial u}{\partial q}dq = x\,dp + y\,dq \end{array}\right.$$

Nous n'avons pas à chercher $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui sont donnés par (1) ; mais nous pouvons remarquer que la dernière équation écrite nous fournit $x$ et $y$ explicitement

$$(4)\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\partial u}{\partial p} \\ y = \dfrac{\partial u}{\partial q} \end{array}\right.$$

Différentions une seconde fois en regardant $x$ et $y$ comme constants

$$\left\{\begin{array}{l} d^2p = \dfrac{\partial r}{\partial x}dx^2 + 2\dfrac{\partial r}{\partial y}dx\,dy + \dfrac{\partial s}{\partial y}dy^2 \qquad \left(\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\partial s}{\partial x}, \dfrac{\partial s}{\partial y} = \dfrac{\partial t}{\partial x}\right) \\ d^2q = \dfrac{\partial s}{\partial x}dx^2 + 2\dfrac{\partial s}{\partial y}dx\,dy + \dfrac{\partial t}{\partial y}dy^2 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}dq^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dp\,dq + d^2p\dfrac{\partial u}{\partial p} + d^2q\dfrac{\partial u}{\partial q} = dx\,dp + dy\,dq + x\,d^2p + y\,d^2q \end{array}\right.$$

Cette dernière relation s'écrit, d'après (4) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}dq^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}dp\,dq = dx\,dp + dy\,dq$$

Si on y remplace $dp$, $dq$, $d^2p$, $d^2q$ par leurs valeurs, l'identification donne

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2}r^2 + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}rs + \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}s^2 = r \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2}rs + \dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}(rt+s^2) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}st = s \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2}s^2 + \dfrac{2\,\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}st + \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}t^2 = t \end{array}\right.$$

Le déterminant de ces équations est $(rt-s^2)^3$ : il s'annule en même temps que $rt-s^2$, qui est le déterminant des deux premières équations (3) ou le déterminant fonctionnel de $p$ et $q$. On doit donc le supposer différent de zéro, sinon $p$ et $q$ seraient fonctions l'un de l'autre et on ne pourrait les prendre pour variables indépendantes.

La résolution du système (5) donne

$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2}}{t} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}}{r} = -\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}}{s} = \frac{1}{rt-s^2}$$

Chacun des rapports précédents est égal à

$$\sqrt{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\cdot\frac{\partial u^2}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}{rt-s^2}}$$

On en déduit :

$$rt-s^2=\frac{1}{\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2}$$

et, enfin,

$$t=\frac{1}{H}\,\frac{\partial u^2}{\partial p^2}\qquad s=-\frac{1}{H}\,\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}\qquad r=\frac{1}{H}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

en posant :

$$H=\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}$$

---

# Septième Leçon.

## Retour sur la Théorie des Séries numériques.

I —— On a considéré jusqu'ici les fonctions obtenues en composant de toutes les manières possibles un nombre limité de fonctions simples. La théorie des séries dont les termes sont des fonctions permet de combiner par addition une infinité de fonctions connues. Nous reprendrons d'abord sur certains points la théorie élémentaire des séries numériques.

Caractère général de convergence. Dire qu'une série est convergente, c'est dire qu'à tout nombre positif $\varepsilon$ on peut faire correspondre un entier $n$ tel que pour toute valeur de $n$ égale ou supérieure à $K$ on ait, en désignant par $S$ la somme de la série et par $S_n$ celle des $n$ premiers termes.

$$|S-S_n|<\varepsilon$$

Si alors $p>0$ on aura en même temps.

$$|S-S_{n+p}|<\varepsilon$$

d'où on déduira

$$|S_{n+p}-S_n|<2\varepsilon$$

C'est ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que la somme $S_{n+p}-S_n$ tend vers 0 quel que soit $p$, $n$ croissant indéfiniment.

La réciproque est vraie. En effet, supposons qu'à tout nombre $\varepsilon$ corresponde un nombre entier $K$ tel qu'on ait l'inégalité précédente pour toute valeur de $n$ et de $n+p$ supérieure à $K$. Si nous prenons arbitrairement $\varepsilon$, toutes les sommes d'indices $\geqslant K$ seront comprises entre les deux nombres $a=S_K-2\varepsilon$

$b = S_k + 2\varepsilon$. Soit maintenant un nombre quelconque intermédiaire entre a et b, par exemple $\frac{a+b}{2}$; si, quelque grands que soient les indices, il se trouve des sommes les unes inférieures, les autres supérieures à $\frac{a+b}{2}$, comme d'autre part elles peuvent différer deux à deux aussi peu que l'on voudra, $S_n$ aura évidemment $\frac{a+b}{2}$ pour limite et la série sera convergente. Sinon $S_n$ finira, pour des valeurs suffisamment grandes de n, par rester compris dans l'une $(a_1 b_1)$ des moitiés de $(a\,b)$. On pourra raisonner sur $(a_1 b_1)$ comme sur $(a\,b)$ et ainsi de suite. Supposons, pour nous placer dans le cas le plus défavorable, que cette opération se prolonge indéfiniment. On sera alors conduit à deux suites de nombres $a, a_1, a_2, \ldots a_m$, $b, b_1, b_2, \ldots b_m$, définissant un même nombre $\alpha$ parfaitement déterminé; à partir de n suffisamment grand $S_n$ restera compris entre $a_m$ et $b_m$. Donc $S_n$ a pour limite $\alpha$ et la convergence de la série est démontrée.

II — Nous rappellerons, sans les démontrer les théorèmes suivants:

1° — Si les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, si de plus, les valeurs absolues de ces termes décroissent constamment et tendent vers zéro, la série est convergente.

2° — Si la série formée par les valeurs absolues des termes d'une série est convergente, il en est de même de la série proposée.

De là l'utilité d'étudier d'abord les caractères de convergence des séries à termes positifs.

**Série à termes positifs** — 3° — Si une pareille série est convergente, il en sera de même a fortiori de toute autre dont les termes sont respectivement moindres.

Si une pareille série est divergente, il en sera de même a fortiori de toute autre dont les termes sont respectivement plus grands.

En comparant, d'après cette règle, la série proposée à une progression géométrique qui est convergente ou divergente suivant que la raison est ou n'est pas inférieure à 1, on obtient les résultats suivants.

4° — Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par rester supérieur à un nombre K plus grand que 1, la série est divergente.

5° — Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par rester inférieur à un nombre K plus petit que 1, la série est convergente. En général, au lieu de considérer le nombre K, on cherche à évaluer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, lorsque n augmente indéfiniment; il y a convergence si cette limite est plus petite que 1, divergence si elle est plus grande que 1; doute dans les autres cas.

6° — L'expression $u_n^{\frac{1}{n}}$ donne lieu à deux théorèmes analogues. Remarquons en passant que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite $l$ $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ a aussi une limite et que cette limite est $l$. En effet, à partir d'une certaine valeur de n, qu'on pourra supposer égale à 1 en négligeant les termes en nombre fini qui précèdent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera compris entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre positif quelconque.

On aura donc la suite d'inégalités

$$l-\varepsilon < \frac{u_1}{u_0} < l+\varepsilon,\quad l-\varepsilon < \frac{u_2}{u_1} < l+\varepsilon,\quad \ldots\ldots,\quad l-\varepsilon < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l+\varepsilon$$

ou, en multipliant membre à membre

$$(l-\varepsilon)\, u_0^{\frac{1}{n}} < u_n^{\frac{1}{n}} < (l+\varepsilon)\, u_0^{\frac{1}{n}}$$

Comme $u_0^{\frac{1}{n}}$ tend évidemment vers l'unité, $u_n^{\frac{1}{n}}$ finit par rester compris entre deux nombres, l'un inférieur, l'autre supérieur à $l$ et différant entre eux aussi peu que l'on veut.

La réciproque ne serait pas vraie; $u_n^{\frac{1}{n}}$ peut avoir une limite sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en ait une.

Il en est ainsi, par exemple, pour la série

$$a + ab + a^2b + ab^2 + a^2b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont la loi de formation est évidente. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, alternativement égal à $a$ et $b$, n'a aucune limite déterminée. Considérons, au contraire, $u_n^{\frac{1}{n}}$: le terme de rang $n$ est de la forme

$$a^{\frac{n+i}{3}} \quad \text{ou} \quad b^{\frac{n+j}{3}}$$

$i$ et $j$ étant deux des nombres $0, 1, 2, 3$ et $4$.

On a donc

$$u_n^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{i}{3}}\, b^{\frac{j}{3}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim u_n^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{3}}$$

7° — La série

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots\ldots\ldots$$

est divergente si $\alpha$ est inférieur ou égal à 1, convergente si $\alpha$ est supérieur à 1.

III — A ces résultats nous ajouterons les suivants, qui sont un peu moins élémentaires.

8° Théorème — Etant données deux séries à termes positifs,

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

$$(2) \quad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n + \ldots\ldots$$

si l'on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et que la première soit divergente, il en sera de même de la seconde.

Si au contraire on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$

et que la première série soit convergente, il en sera de même de la seconde.

Dans le second cas, par exemple, on peut écrire

$$\frac{v_1}{v_0} \leqslant \frac{u_1}{u_0} \qquad \frac{v_2}{v_1} \leqslant \frac{u_2}{u_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{v_n}{v_{n-1}} \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

ou, en multipliant ces inégalités membre à membre,

$$\frac{v_n}{v_0} \leqslant \frac{u_n}{u_0} \qquad v_n \leqslant \frac{v_0}{u_0} u_n$$

d'où résulte évidemment la propriété énoncée.

La première partie se démontrerait de la même manière.

9° — Théorème — (Règle de Gauss). — Si le rapport d'un terme quelconque

au précédent a la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + A_1 n^{\lambda-1} + \dots\dots\dots\dots}{n^\lambda + a_1 n^{\lambda-1} + \dots\dots\dots\dots}$$

il faut et il suffit, pour que la série soit convergente, que l'on ait

$$A_1 - a_1 + 1 < 0$$

Si, en effet, nous effectuons la division jusqu'au second terme nous mettrons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{A_1 - a_1}{n} + \frac{\theta}{n^2}$$

$\theta$ ayant une limite finie pour $n$ infini. Comparons à la série dont le terme général est

$$v_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

nous aurons

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

nous verrons bientôt qu'on peut écrire

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{g}{n^2}$$

$g$ ayant également une limite finie. Ceci posé nous aurons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{A_1 - a_1 + \alpha}{n} + \frac{\theta - g}{n^2}$$

et, à partir d'une certaine valeur de $n$ le second membre a le signe de $A_1 - a_1 + \alpha$.

Si $A_1 - a_1 + 1 < 0$, il est clair qu'on peut choisir $\alpha$ plus grand que 1, et cependant assez voisin de 1 pour que $A_1 - a_1 + \alpha$ soit également négatif ; mais alors la série auxiliaire étant convergente et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ plus petit que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ la série donnée sera convergente.

De même si $A_1 - a_1 + 1 > 0$, on peut prendre $\alpha$ assez peu inférieur à l'unité pour que $A_1 - a_1 + \alpha$ soit également positif ; et le raisonnement précédent montre que la série est divergente.

Si enfin $A_1 - a_1 + 1 = 0$, on peut prendre comme série auxiliaire celle dont le terme général est $\frac{1}{n+h}$, $h$ étant une constante quelconque. — Cette série est toujours divergente, quelque soit $h$, car on finit toujours par avoir $n + h < 2n$ d'où $\frac{1}{n+h} > \frac{1}{2n}$ et le terme général devient supérieur à la moitié de celui de la série harmonique.

Dans ces conditions :

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n-1+h}{n+h} = 1 - \frac{1}{n+h} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{h}{n^2} - \frac{h^2}{n^2(n+h)}$$

D'ailleurs, si on prend un terme de plus dans le développement de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{K}{n^2} + \frac{g}{n^3}$$

$K$ étant une constante, $g$ une variable qui a une limite finie. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{K-h}{n^2} + \frac{g}{n^3} - \frac{h^2}{n^2(n+h)}$$

Il est clair qu'il suffit de prendre $h$ inférieur à $K$ pour qu'à partir d'un certain moment, le second membre devienne positif ; donc la série est divergente.

IV — Convergence absolue — Séries doubles — Deux séries ayant pour terme général $u_n$ et $v_n$ sont dites composées des mêmes termes lorsque, quelque grand que soit $n$, on peut trouver un nombre $n'$ tel que parmi les $n'$ premiers termes de la seconde série se trouvent les $n$ premiers termes de la première et inversement. Altérer l'ordre des termes d'une série, c'est la remplacer par une autre composée des mêmes termes.

Une série convergente est dite absolument convergente lorsque ses termes pris en valeur absolue, forment une série convergente.

Théorème — Lorsqu'une série est absolument convergente, on peut modifier comme on veut l'ordre des termes, sans altérer, ni la convergence, ni la somme de la série.

En effet, désignons par $P_n$, $-Q_n$ la somme des termes positifs et celle des termes négatifs contenus dans la somme $S_n$ des $n$ premiers termes de la série. Par hypothèse, lorsque $n$ augmente indéfiniment $P_n + Q_n$ tend vers une limite déterminée $L$. Or dans ces conditions $P_n$ et $Q_n$ ne peuvent aller qu'en augmentant ; comme ils ne peuvent ni l'un ni l'autre dépasser $L$ ; ils tendent vers des limites $P$ et $Q$. Donc $S_n$ a pour limite $P - Q$ et la série proposée est convergente. Supposons qu'on altère l'ordre des termes d'une manière quelconque et ne considérons que la série formée par les termes positifs. Quelque grand que soit $n'$ on pourra trouver un nombre $n$ tel que les $n'$ premiers termes de la la série modifiée figurent tous dans les $n$ premiers termes de la série primitive.

On aura, dans ces conditions, en appelant $P'_{n'}$ la somme qui se rapporte à la nouvelle série,

$$P'_{n'} \leq P_n$$

et, par suite,

$$P'_{n'} \leq P.$$

Mais quand $n$ augmente indéfiniment $P'_{n'}$ ne peut qu'augmenter, donc $P'_{n'}$ a une limite $P'$ et $P'$ ne peut dépasser $P$. On verrait de même que $P$ ne peut dépasser $P'$, donc $P'$ est égal à $P$. De même $Q'_{n'}$ aura pour limite $Q$ ; par suite $S'_{n'}$ aura une limite égale à $P - Q$. Ainsi la convergence subsiste et la somme reste la même.

On donne le nom de séries semi-convergentes à celles dont la convergence dépend de l'ordre des termes

Par exemple, la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots$$

est convergente, mais les valeurs absolues de ses termes forment la série harmonique. Or il est facile de faire voir qu'en groupant convenablement des termes on peut faire qu'elle ait une infinité de sommes différentes.

**Séries doubles** — Il est souvent très utile d'introduire des séries d'une espèce plus générale que les séries linéaires considérées jusqu'à présent. Imaginons deux axes de cordonnées $Ox$ et $Oy$ et menons deux suites de droites parallèles à ces deux axes et équidistantes, nous diviserons ainsi l'angle formé par la partie positive des axes en une infinité de cases dans chacune desquelles on peut inscrire une quantité $u_j^i$ comme l'indique la figure ci-jointe, les indices $i$ et $j$ étant proportionnels respectivement à l'abcisse et à l'ordonnée de la case correspondante. On aura formé ainsi ce qu'on appelle une série double. Dans chaque ligne horizontale se trouvera une série linéaire ; supposons que chacune de ces séries soit convergentes et soient

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_4^1$ | | | |
| $u_3^1$ | $u_3^2$ | | |
| $u_2^1$ | $u_2^2$ | $u_2^3$ | |
| $u_1^1$ | $u_1^2$ | $u_1^3$ | $u_1^4$ |

$$H_1\,,\ H_2\,,\ \ldots\ldots\ldots\ H_n\,,\ \ldots\ldots\ldots$$

les sommes correspondantes. Si la série

$$H_1 + H_2 + \ldots\ldots\ldots + H_n + \ldots\ldots\ldots$$

est convergente et admet une somme $H$, nous dirons que la série double est convergente et a pour somme $H$ quand on l'évalue par lignes horizontales.

Supposons tous les termes positifs ou nuls et la série convergente par lignes horizontales. Considérons les termes qui appartiennent à la colonne verticale de rang $j$: Il est évident que l'ensemble de ses $K$ premiers termes est plus petit que la somme

$$H_1 + H_2 + \ldots\ldots\ldots + H_K$$

et a fortiori que $H$. Donc pour cette série verticale la somme des $K$ premiers termes a une limite quand $K$ augmente indéfiniment. Soit $V_j$ cette limite et considérons la somme $V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_l$. Il est clair que cette somme va en croissant avec $l$. D'ailleurs, en raisonnant sur l'ensemble des $l$ premières colonnes comme nous l'avons fait pour une colonne unique, on voit que cette somme est toujours inférieure à $H$, donc elle a une limite $V$ au plus égale à $H$. Ainsi la série est convergente quand on l'évalue par colonnes verticales. On voit d'ailleurs, à cause de la symétrie qu'on ne peut pas avoir $H > V$. Donc $H$ est égal à $V$. On peut imaginer une infinité d'autres modes d'évaluation. Prenons par exemple un rectangle compris entre les axes, la verticale de rang $n$ et l'horizontale de rang $p$ et supposons que $n$ et $p$ augmentent indéfiniment suivant une loi quelconque. La somme des termes contenus dans le rectangle peut évidemment s'écrire :

$$H_1 + H_2 + \ldots\ldots\ldots + H_p - \varepsilon$$

$\varepsilon$ étant une quantité positive qui tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment. Si donc nous augmentons indéfiniment $n$ et $p$, la somme des termes contenus dans le rectangle aura une limite et cette limite sera encore $H$.

D'une manière générale considérons une suite de courbes $C_1\,,\ C_2\,,\ \ldots\ldots\ C_n$ s'étendant graduellement et indéfiniment sur le plan, c'est-à-dire de telle sorte :

1º que $C_n$ comprenne toute case intérieure à $C_{n-1}$

2º que pour une valeur suffisamment grande de $n$, $C_n$ puisse envelopper toutes les cases que l'on voudra

Appelons $S_1, S_2, \ldots S_n$ les sommes des termes correspondants ; je dis que $S_n$ a encore une limite et que cette limite est $H$.

Supposons que $C_n$ soit une courbe fermée, par exemple le quadrant circulaire ayant pour centre l'origine. Dans ces conditions, quelque grand que soit $n$, on peut envelopper la courbe dans un rectangle qui contiendra plus de termes qu'elle ; $n$ augmentant indéfiniment $S_n$ qui va en croissant sera inférieur à la somme des termes contenus dans le rectangle et, par suite, aura une limite au plus égale à $H$.

D'autre part cette courbe $C_n$ augmentant indéfiniment, on pourra prendre $n$ assez grand pour qu'elle contienne toutes les cases d'indices supérieurs à un nombre quelconque $K$, donc la somme $S_n$ sera supérieure à celle des termes contenus dans un rectangle dont les dimensions iront en augmentant indéfiniment. Donc $S$ est au moins égal à $H$ ; $S$ est, par suite, rigoureusement égal à $H$.

Si la courbe $C_n$ est une courbe ouverte, c'est-à-dire contenant une infinité de cases, il s'agit d'abord de prouver que $S_n$ existe. Pour cela il suffit de fermer la courbe par deux droites parallèles à $Ox$ et $Oy$. La somme des termes contenus dans la courbe ainsi limitée ira en croissant quand on éloignera de plus en plus ces droites. Le raisonnement précédent montre qu'elle a une limite, et c'est cette limite que nous désignerons par $S_n$.

Ceci posé, faisons augmenter $n$, $S_n$ ira en croissant et, comme il est inférieur à $H$, il aura une limite qui ne pourra pas dépasser $H$. D'autre part la courbe $C_n$ s'étendant indéfiniment, on pourra toujours lui inscrire un rectangle de l'espèce considérée plus haut et dont les dimensions seront aussi grandes que l'on voudra. On en conclut que la limite de $S_n$ est au moins égale à $H$, donc elle est égale à $H$.

Ainsi, quelles que soient les courbes d'évaluation la série sera toujours convergente et aura toujours même somme.

Théorème — Lorsque les valeurs absolues des termes d'une série double[1] forment une série convergente, la série proposée est convergente et a une somme déterminée quel que soit le mode de sommation.

En effet le raisonnement précédent subsiste sans modification si la série double est formée de termes positifs ou nuls. Soit alors une courbe $C_n$ tracée sur le plan $P_n$, $-Q_n$ la somme des termes positifs, et celle des termes négatifs contenus dans $C_n$ ; $P_n + Q_n$ sera la somme des valeurs absolues de tous les termes contenus dans $C_n$ ; $n$ augmentant indéfiniment $P_n + Q_n$ tend par hypothèse vers une limite finie, et cela en croissant ; donc $P_n$ et $Q_n$ tendent vers des limites $P$ et $Q$ ; donc la somme algébrique des termes contenus dans $C_n$ a pour limite $P - Q$. D'ailleurs il est évident que $P$ et $Q$ sont indépendants du mode de sommation ; il suffit pour le voir de se représenter un

(1) évaluée par lignes horizontales. On peut d'ailleurs démontrer un théorème un peu plus général. (Voir Briot et Bouquet, Fonctions elliptiques, p. 106).

série double auxiliaire qui serait composée des termes positifs de la première, et où on aurait remplacé chaque terme négatif par un zéro. P serait la somme de cette série double et par suite indépendant du mode de sommation ; de même pour Q.

**Multiplication de deux séries.** Comme application, proposons-nous de multiplier l'une par l'autre les deux séries absolument convergentes :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

Il est naturel, par analogie avec le produit de deux polynômes, de former la série double

| O | | | | | x |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1 v_1$ | $u_1 v_2$ | $u_1 v_3$ | $u_1 v_4$ | .................... | $u_1 v_n$ |
| $u_2 v_1$ | $u_2 v_2$ | $u_2 v_3$ | $u_2 v_4$ | .................... | $u_2 v_n$ |
| $u_3 v_1$ | $u_3 v_2$ | $u_3 v_3$ | $u_3 v_4$ | .................... | $u_3 v_n$ |
| y | | | | | |

Si on l'évalue par lignes horizontales après avoir remplacé chaque terme par sa valeur absolue, elle est évidemment convergente et a pour somme $\Sigma |u_n| \times \Sigma |v_n|$.

Dès lors elle reste convergente quand on rend à chaque terme le signe qui lui convient et on peut prendre n'importe quel mode d'évaluation ; si par exemple on prend pour courbe $C_n$ une triangle isocèle rectangle ayant deux côtés sur OX et OY et dont l'hypoténuse s'éloigne indéfiniment on voit immédiatement qu'en posant

$$w_1 = u_1 v_1 \qquad w_2 = u_1 v_2 + v_2 u_1 \qquad w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1$$

La série

$$w_1 + w_2 + w_3 \cdots \quad \cdots + w_n + \cdots$$

est convergente et la somme est bien le produit des deux séries données, comme on le voit en l'évaluant par lignes horizontales.

# Huitième Leçon

## Séries de fonctions - Séries entières

**I — Convergence uniforme** — Supposons maintenant que la série soit de la forme

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots\cdots + f_n(x) + \cdots$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, .... $f_n(x)$ étant des fonctions déterminées et finies dans l'intervalle $(a b)$.

Si pour une certaine valeur de $x$ la série est convergente, à tout nombre $\underline{\varepsilon}$ correspondra un entier $\underline{K}$, tel que l'on ait, en conservant les notations précédentes et en appelant $S(x)$ la somme de la série :

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de $\underline{n}$ égales ou supérieures à K. Ce nombre K dépendra en général de la valeur de $x$. Si on prend la plus petite valeur qu'il puisse avoir pour chaque valeur de $x$, K se trouvera déterminé en fonction de $x$ ; s'il arrive que cette fonction $K(x)$ reste finie dans l'intervalle $(a\,b)$, en prenant un entier $k$ plus grand que la limite supérieure, on voit que l'inégalité précédente sera vérifiée ; quel que soit $x$, pour toute valeur de $n$ égale ou supérieure à K. On dit alors que la série est uniformément convergente dans l'intervalle $(a\,b)$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'à tout nombre $\varepsilon$ corresponde un nombre K tel qu'on ait, quel que soit $x$ et quel que soit $p$, pour $n \geq K$ :

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Théorème —— Lorsque les termes d'une série uniformément convergente sont continus, la somme de la série est aussi une fonction continue pour les mêmes valeurs de $x$.

En effet, soit $\varepsilon$ un nombre positif quelconque nous pouvons déterminer un nombre entier K tel que l'on ait pour $n$ égal ou supérieur à K

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

quel que soit $x$. Par suite, si $x+h$ est une seconde valeur contenue aussi dans l'intervalle $(a\,b)$, on aura en même temps :

$$|S(x+h) - S_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Le nombre $k$ étant une fois déterminé, de cette manière, nous pourrons trouver un nombre $\eta$ tel que l'accroissement de chacune des $n$ premières fonctions lorsqu'on passe de $x$ à $x+h$ soit $< \frac{\varepsilon}{3n}$ pour que toute valeur de $h$ comprise entre $-\eta$ et $+\eta$. On aura alors, pour ces mêmes valeurs de $h$,

$$|S_n(x+h) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ceci posé de l'égalité

$$\begin{aligned} S(x+h) - S(x) = {} & S(x+h) - S_n(x+h) \\ & + S_n(x+h) - S_n(x) \\ & + S_n(x) - S(x) \end{aligned}$$

et des inégalités précédentes, on déduit immédiatement

$$|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon \qquad |h| < \eta$$

ce qui démontre le théorème.

La fonction $S(x)$, étant continue, est intégrable dans l'intervalle $(ab)$. Il en est de même des différents termes de la série $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$

Théorème — Si on intègre chacun des termes de la série entre deux mêmes limites $x_0$ et $X$, la série des intégrales est convergente et a pour somme :

$$\int_{x_0}^{X} S(x)\,dx.$$

En effet, posons en général

$$u_n = \int_{x_0}^{X} f_n(x)\,dx.$$

et soit $\Sigma_n$ la somme des n premières intégrales. Nous aurons

$$\int_{x_0}^{X}\left[S(x) - S_n(x)\right]dx = (X - x_0)\left[S(\xi) - S_n(\xi)\right]$$

$\xi$ étant un nombre compris entre $x_0$ et $X$. Si nous supposons que n augmente indéfiniment, le second membre a pour limite zéro. D'une manière plus précise, si on se donne un nombre $\mathcal{E}$, il existe un nombre $K$ tel que le second membre soit inférieur à $(X - x_0)\mathcal{E}$ et par suite à $(b-a)\mathcal{E}$, pour toute valeur de n égale ou supérieure à $K$. D'autre part le premier membre peut évidemment s'écrire

$$\int_{x_0}^{X} S(x)\,dx - \Sigma_n$$

On aura donc, pour n égal ou supérieur à $K$

$$\left|\int_{x_0}^{X} S(x)\,dx - S_n\right| < (b-a)\,\mathcal{E}$$

ce qui démontre évidemment le théorème.

Comme le nombre $K$ a été déterminé indépendamment de $X$ et de $x_0$, il en résulte que, si l'on considère comme variable une des deux limites, $X$, par exemple, la convergence est uniforme par rapport à cette limite dans l'intervalle $(ab)$

Théorème — Lorsque les termes d'une série convergente ont des dérivées continues, si la série des dérivées est uniformément convergente, sa somme est égale à la dérivée de la somme de la première série

En effet soit $f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots\ldots$ la suite des dérivées. Intégrons de $x_0$ à $x$, d'après le théorème précédent, puisque cette série est uniformément convergente. Nous aurons en désignant par $\varphi(x)$ sa somme.

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = \left[f_1(x) - f_1(x_0)\right] + \left[f_2(x) - f_2(x_0)\right] + \ldots$$

En effet, la parenthèse de rang n s'annulant pour $x = x_0$ et ayant pour dérivée $f_n'(x)$ est bien égale à l'intégrale correspondante.

Le second membre s'évalue sans difficulté. La somme des n premiers termes est égal à $S_n(x) - S_n(x_0)$, et quand n augmente indéfiniment, elle tend vers $S(x) - S(x_0)$. On a, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = S(x) - S(x_0)$$

si maintenant nous dérivons les deux termes, nous avons

$$\varphi(x) = f'(x)$$

ce qu'il fallait prouver.

II — Séries entières — Les plus importantes des séries de fonctions sont les séries entières, c'est-à-dire de la forme :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

les $a$ étant des constantes.

Considérons le terme général $a_n x^n$. Si, pour une certaine valeur $X$, ce terme reste fini, il tendra vers zéro pour toute valeur de module moindre à cause de l'égalité :

$$a_n x^n = a_n X^n \left(\frac{x}{X}\right)^n$$

On voit de même que, s'il cesse de tendre vers zéro pour la valeur $X$, il augmente indéfiniment pour toutes les valeurs de module plus grand. Si donc on fait croître $|x|$ d'une manière continue, il y aura une première valeur $R$ de ce module pour laquelle le terme général cessera de tendre vers zéro, à moins que $a_n x^n$ ne tende vers zéro pour toute valeur de $x$. Il est évident, d'après ce qui précède, qu'en dehors de l'intervalle $(-R, +R)$ la série sera divergente. Je dis maintenant qu'elle sera convergente pour toutes les valeurs de $x$ telles que l'on ait $|x| < R$. Cela résulte du théorème suivant dû à Abel.

Théorème — Si pour une certaine valeur $x$ le terme général conserve une valeur finie la série est absolument convergente pour toute valeur de module moindre.

En effet, nous remarquerons que, si l'on multiplie les termes d'une série absolument convergente par des quantités qui restent finies quel que soit $n$, la nouvelle série est absolument convergente. Ce lemme, qui est d'un emploi fréquent, est à peu près évident, car en désignant par $M$ une limite supérieure des multiplicateurs, le terme général de la nouvelle série a un module plus petit que le terme correspondant de la série proposée multiplié par $M$. Ceci posé, supposons que pour $x = X$ les termes d'une série entière conservent une valeur finie et prenons la progression géométrique

$$1 + \frac{x}{X} + \left(\frac{x}{X}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{x}{X}\right)^n + \ldots\ldots$$

qui est absolument convergente pour toute valeur de $x$, de plus petit module que $X$. Si l'on multiplie son terme général par $a_n X^n$, qui conserve une valeur finie par hypothèse, on retombe sur la série proposée qui est dès lors absolument convergente pour les valeurs considérées de $x$.

En particulier, si la série est convergente pour $x = X$, elle est convergente pour toutes les valeurs de module moindre puisque $a_n X^n$ tend vers zéro. La quantité $R$ dont nous avons parlé plus haut s'appelle le rayon de convergence de la s[érie]. Il peut être nul c'est-à-dire que pour toute valeur différente de zéro $a_n x^n$ pe[ut]

ne pas tendre vers 0. La série est alors divergente pour toute valeur de $x$ différente de zéro ; c'est le cas de la série

$$1+x+h\,x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+n^n x^n+\ldots\ldots\ldots$$

Il peut se faire que $R$ soit infini. La série est alors convergente pour toutes les valeurs possibles de $x$, c'est le cas de la série exponentielle

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots\ldots$$

Enfin $R$ pourra n'être ni nul ni infini ; c'est le cas de la série

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots\ldots$$

car le terme général tend vers zéro ou l'infini suivant que $|x|$ est inférieur ou supérieur à 1. Le rayon de convergence est ici l'unité. La série est d'ailleurs divergente pour $x=1$ convergente pour $x=-1$.

Abel a donné un second théorème plus complet dont la démonstration repose sur le lemme suivant :

**Lemme** — Soit $v_1, v_2, \ldots v_n$, une suite de quantités quelconques, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, des multiplicateurs en nombre égal, tous positifs et tels que chacun d'eux soit au plus égal au précédent. On a

$$\varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\varepsilon_n v_n=\varepsilon_1 H$$

H étant intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des sommes

$$s_1=v_1\ ;\ s_2=v_1+v_2\ ;\ s_3=v_1+v_2+v_3\ldots\ldots\ s_n=v_1+v_2+\ldots v_n$$

En effet, on peut écrire l'expression proposée sous la forme

$$\varepsilon_1 s_1+\varepsilon_2(s_2-s_1)+\ldots\ldots\ldots+\varepsilon_{n-1}(s_{n-1}-s_{n-2})+\varepsilon_n(s_n-s_{n-1})$$

et ensuite sous la forme

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,s_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\,s_2+\ldots\ldots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\,s_{n-1}+\varepsilon_n\,s_n.$$

D'après nos hypothèses, tous les coefficients de $s_1, s_2, \ldots s_n$, sont nuls ou positifs. Si alors on désigne par $S$ et $s$ les deux sommes extrêmes en sorte qu'on ait

$$s \leqq s_i \leqq S$$

et qu'on multiplie chacune de ces inégalités par le coefficient correspondant, on aura en ajoutant

$$\varepsilon_1 s \leqq \varepsilon_1 v_1+\varepsilon_2 v_2+\ldots\ldots+\varepsilon_n v_n \leqq \varepsilon_1 S,$$

ce qui démontre évidemment le théorème.

Revenons à la série entière

$$a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots\ldots+a_n x^n+\ldots\ldots\ldots$$

Posons d'une manière générale

$$v_i=a_{n+i}\,X^{n+i} \qquad\qquad \varepsilon_i=\left(\frac{x}{X}\right)^i.$$

$X$ étant une valeur pour laquelle la série est convergente et $x$ une valeur de module moindre ou égal.

Les $\varepsilon$ satisferont aux conditions du lemme précédent pourvu que $x$ soit

compris entre $0$ et $X$, ou égal à $X$, et l'on aura, quel que soit $p$,

(1) $$\nu_1\varepsilon_1 + \nu_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots + \nu_p\varepsilon_p = \varepsilon_1 H$$

$H$ étant intermédiaire entre la plus grande et la plus petite des sommes $S_{n+i}(X) - S_n(X)$. Or cette somme générale, quel que soit $i$, tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment puisque la série est convergente pour $x = X$. On peut donc, à tout nombre positif $\varepsilon$, faire correspondre un entier $K$ tel que $\varepsilon_1 H$ soit constamment inférieur à $\varepsilon$ pour toutes les valeurs de $n$ égales ou supérieures à $K$, et cela quel que soit $p$. Mais on voit immédiatement que le premier membre est égal à $S_{n+p}(x) - S_n(x)$. Donc la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de $x$ considérées c'est-à-dire telles que l'on ait $0 < \frac{x}{X} \leq 1$.

Si l'on rapproche ce théorème du précédent, on voit que pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $0$ et $-X$ la série est encore convergente, mais on ne peut rien dire de la valeur $-X$. Si maintenant on réunit les deux théorèmes, on arrive à la proposition suivante :

**Théorème** — Si une série entière est convergente pour une valeur $X$ attribuée à la variable, elle est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de $x$ satisfaisant à l'inégalité $-1 < \frac{x}{X} \leq 1$.

Sa somme est, par suite, une fonction continue pour les mêmes valeurs de $x$, et cette continuité s'étend jusqu'à $X$ inclusivement.

**III. Intégration et dérivation des séries** — La série entière étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions continues dans l'intervalle $(-R, +R)$ pourra être intégrée dans le même intervalle d'après le théorème précédent. On obtiendra ainsi une suite ascendante de séries toutes uniformément convergentes dans le même intervalle, la $p^{ième}$ commençant par un polynôme de degré $p-1$ à coefficients arbitraires.

Considérons maintenant la série des dérivées :

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \qquad + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

Soit $X$ un nombre dont le module soit compris entre $|x|$ et $R$, $R$ étant toujours le rayon de convergence de la série donnée ; supposons-le de même signe que $x$, la série

$$1 + 2\frac{x}{X} + 3\left(\frac{x}{X}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1} +$$

est convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite $\frac{x}{X}$ qui est $< 1$. Cette série est à termes positifs ; si nous multiplions le terme général par $a_n X^{n-1}$, nous reproduirons la série des dérivées ; or ce multiplicateur reste fini car il est égal au nombre fixe $\frac{1}{X}$ multiplié par le terme général $a_n X^n$ d'une série convergente.

Ainsi la série des dérivées sera convergente au moins dans tout l'intervalle $-R, +R$ ; elle y sera, par suite, puisqu'elle est entière, uniformément convergente ; d'après un théorème précédent, sa somme sera la dérivée de $S(x)$.

En raisonnant sur la série dérivée comme sur la précédente, on aura une

nouvelle série dérivée et ainsi de suite indéfiniment.

Il faut bien remarquer que le rayon de convergence $R$ de la série donnée est aussi le rayon de convergence de toutes celles qui s'en déduisent par intégration ou par dérivation. Soit, par exemple $R_1$ le rayon de convergence d'une des séries intégrales, il ne peut être inférieur à $R$ d'après ce qui précède; s'il lui était supérieur, la série donnée se déduisant de celle-ci par une suite de dérivations serait convergente dans l'intervalle $-R_1, +R_1$, plus étendue que son domaine de convergence; donc $R_1 = R$.

En résumé, une série entière engendre, par dérivation, et par intégration, une infinité de séries ayant le même rayon de convergence, et dont les sommes sont les intégrales et les dérivées de la somme de la première.

## IV — Séries de Taylor et de Mac Laurin

— La fonction $f(x)$ étant représentée par la série

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

convergente dans un intervalle donné, nous pouvons chercher la relation entre ses coefficients et la fonction elle-même; pour cela différentions $n$ fois et faisons $x = 0$ il vient

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot 1.2.3 \ldots n.$$

L'équation précédente peut donc s'écrire:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots$$

Chaque dérivée par ce seul fait qu'elle est développable en série entière, est déterminée, finie, continue et dérivable pour toutes les valeurs de $x$ telles que $|x| < R$; les coefficients sont donc ici tous finis et bien déterminés; la formule générale que nous venons d'établir est ce qu'on appelle la série de Mac Laurin; il résulte de ce qui précède qu'une même fonction ne peut admettre qu'un seul développement en série entière, dans un intervalle donné.

On peut démontrer plus directement l'existence de la dérivée.

Soient $x$ et $x+h$ deux valeurs comprises entre $-R$ et $+R$; remplaçons $x$ par $x+h$, et développons chaque terme par la formule du binôme, nous aurons ainsi la série double

$$\begin{array}{l}
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots \\
\quad + a_1 h + 2a_2 hx + 3a_3 hx^2 \ldots\ldots + n a_n h x^{n-1} + \ldots\ldots \\
\quad\quad + a_2 h^2 + 3a_3 h^2 x \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} a_n h^2 x^{n-2} + \ldots \\
\quad\quad\quad + h^3 \qquad + \ldots\ldots \\
\qquad\qquad + \ldots\ldots
\end{array}$$

Si on l'évalue par colonnes verticales, elle est convergente et reproduit simplement $f(x+h)$; d'ailleurs elle reste convergente quand on y remplace $x$, $h$ et les $a$ par leurs valeurs absolues, car la série dont le terme général est $a_n \{|x| + |h|\}^n$ n'est autre que la série donnée pour la valeur $|x| + |h|$ et celle-ci sera encore dans l'intervalle $-R + R$, si $|h|$ est suffisamment petit; la série linéaire correspondante

sera donc absolument convergente.

Donc notre série double est absolument convergente, nous pouvons dès lors l'évaluer par lignes horizontales et si nous posons :

$$f_1(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$
$$f_2(x) = 2a_2 + 2.3.a_3 x + \dots$$

et ainsi de suite, nous obtenons

$$f(x+h) = f(x) + h f_1(x) + \frac{h^2}{1.2} f_2(x) \dots \quad \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f_n(x) + \dots$$

D'où on déduit immédiatement, en tenant compte de la continuité des séries entières

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x)$$

$f_1(x)$ est donc la dérivée de $f(x)$.

D'ailleurs $f_2$ se déduit de $f_1$, comme $f_1$ de $f$, donc $f_n$ est en général la $n^{ème}$ dérivée de $f(x)$ et on a la formule :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots\dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(x) + \dots$$

c'est la série de Taylor ; elle n'est ni plus ni moins générale que celle de Mac Laurin qu'elle reproduit d'ailleurs en y faisant $x=0$ $h=x$. Son rayon de convergence par rapport à $h$ est au moins égal à $R-|x|$.

---

# Neuvième Leçon.

---

## Développement d'une fonction en série entière. — Formule de Taylor.

I — Nous avons étudié les propriétés d'une fonction représentée dans un intervalle donné par une série entière. On peut se demander maintenant dans quel cas et dans quelles limites une fonction $f(x)$ donnée est susceptible d'un développement de cette forme. La réponse à cette question exige la considération des fonctions de variable imaginaire. Pour le moment remarquons seulement qu'en supposant le développement possible, il le sera dans un intervalle $(-R+R)$, dans lequel la fonction devra être déterminée, finie et continue, et avoir une infinité de dérivées jouissant des mêmes propriétés. — Si donc $\alpha$ est, en grandeur absolue, la plus petite valeur de $x$ pour laquelle ces conditions cessent d'être remplies, on est assuré que $R$ ne peut dépasser $|\alpha|$ ; et il n'y a lieu de chercher à résoudre le problème que pour les valeurs de $x$ telles qu'on ait $|x| < |\alpha|$

Les conditions précédentes ne sont d'ailleurs nullement suffisantes ; par exemple elles sont remplies dans tout intervalle par la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ qui n'est développable cependant que dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Il est naturel, en supposant une fonction développable de chercher une expression de la différence entre la fonction et la somme des $n$ premiers termes de la série. Soit, en général, une fonction $f(x)$, déterminée, finie, continue et dérivable ainsi que ses $n$ premières dérivées dans un intervalle comprenant $a$ et $a+h$; proposons-nous de calculer :

$$R_n = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \dots - \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a)$$

Posons $a+h=b$ et considérons la fonction :

$$F(x) = f(b) - f(b-x) - \frac{x}{1} f'(b-x) - \frac{x^2}{1.2} f''(b-x) - \dots - \frac{x^n}{1.2\dots n} f^{n}(b-x)$$

On a évidemment :

$$F(0)=0 \qquad\qquad F(h)=R_n$$

De plus $F(x)$ est une somme de termes dérivables et on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis ce qui donne :

$$(1) \qquad R_n = F(h) - F(0) = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{\varphi'(\varepsilon h)} F'(\varepsilon h)$$

$\varepsilon$ étant un nombre compris entre 0 et 1, $\varphi$ une fonction arbitraire astreinte seulement à ce que sa dérivée ne s'annule pour aucune valeur de $x$ comprise entre 0 et $h$. Calculons donc $F'(x)$. On peut disposer ainsi le calcul :

$$F'(x) = +f'(b-x) + \frac{x}{1} f''(b-x) + \frac{x^2}{1.2} f'''(b-x) + \dots\dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(b-x) + \frac{x^n}{1.2\dots n} f^{(n+1)}(b-x)$$

$$- f'(b-x) - \frac{x}{1} f''(b-x) - \frac{x^2}{1.2} f'''(b-x) - \dots\dots - \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n)}(b-x)$$

$$= \frac{x^n}{1.2\dots n} f^{(n+1)}(b-x)$$

Revenons à la formule (1) elle s'écrit alors :

$$R_n = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{\varphi'(\varepsilon h)} \cdot \frac{\varepsilon^n h^n}{1.2\dots n} f^{(n+1)}(b-\varepsilon h)$$

ou, en remplaçant $1-\varepsilon$ par $\theta$ qui est également compris entre 0 et 1.

$$(2) \qquad R_n = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{\varphi'[(1-\theta)h]} \frac{(1-\theta)^n h^n}{1.2\dots n} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

C'est la formule de Taylor qui est, à un certain point de vue, une extension du théorème des accroissements finis. La fonction $\varphi$ étant arbitraire, sauf la restriction imposée à sa dérivée, faisons $\varphi(x)$ égal à $x^{p+1}$

$$\varphi(0)=0 \qquad\qquad \varphi'(x) = (p+1)x^p$$

La formule (2) devient

$$(3) \qquad R_n = \frac{h^{p+1}}{(1-\theta)^p h^p} \frac{(1-\theta)^n h^n}{1.2\dots n\,(p+1)} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$$= \frac{(1-\theta)^{n-p} h^{n+1}}{1.2\dots n\,(p+1)} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Il suffit, pour les applications que nous avons en vue, de considérer des formes particulières. La première due à Lagrange correspond au cas où $p$ est égal à $n$

$$(4) \qquad \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \qquad f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

La seconde due à Cauchy correspond au cas de $p=0$

$$(5) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n} \qquad f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Si dans ces résultats on fait $a=0$ $h=x$, on a la formule suivante, dite formule de Mac Laurin

$$(6) \qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+R_n$$

avec

$$(4') \qquad R_n = \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{(n+1)}(\theta x)$$

$$(5') \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{1.2\ldots n}f^{(n+1)}(\theta x)$$

II — Supposons que la fonction $f(x)$ admette une suite infinie de dérivées dans un intervalle comprenant 0 et $x$. On pourra pousser aussi loin que l'on voudra le développement fourni par la formule de Mac-Laurin. On pourra en d'autres termes constituer la série de Mac-Laurin. Si l'on désigne par $S_n$ la somme des $n$ premiers termes, la formule de Mac-Laurin pourra s'écrire, $R_n$ étant donné par les formules (4') (5'):

$$S_n = f(x) - R_n$$

Si donc $R_n$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, la série sera convergente et aura pour somme $f(x)$. De là un procédé régulier pour développer une fonction en série entière. De plus, cette méthode a l'avantage de fournir une expression de l'erreur commise en s'arrêtant après un terme de rang donné dans la série.

Si l'on remarque que $\frac{x^n}{1.2\ldots n}$ tend vers 0, comme terme général d'une série convergente, quelque soit $x$, on voit que si $f^{(n)}(x)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre 0 et $x$, $R_n$ tendra vers zéro.

1° $f(x)=e^x$. Nous avons, dans ce cas,

$$f^{(n)}(x)=e^x \qquad f^{(n)}(0)=1$$

La série de Mac-Laurin est

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots\ldots$$

On a, d'ailleurs, (formule 4')

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}e^{\theta x}$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $e^{\theta x}$ conserve une valeur finie, comprise entre 1 et $e^x$. Par conséquent, $R_n$ tend vers zéro et on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots\dots\dots$$

2° $f(x) = \sin x$. On a :

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2}$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{1.2\dots(n+1)} \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right]$$

$\sin n\frac{\pi}{2}$ est alternativement égal à 0, 1, 0, −1, 0, 1, 0, −1 etc .....

La série prend la forme

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2\dots(2n+1)} + \dots\dots\dots$$

Lorsque $n$ croît indéfiniment le premier facteur de $R_n$ tend vers zéro, le second reste compris entre −1 et +1 ; $R_n$ tend donc vers zéro, d'où

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \dots\dots\dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\dots(2n+1)} + \dots\dots$$

Le reste est une fraction du premier terme négligé

3° $f(x) = \cos x$ On trouve de même : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2\dots 2n} + \dots$

Les développements de $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ sont valables pour toutes les valeurs de $x$.

4° $f(x) = (1+x)^m$ Nous laissons de côté le cas où $m$ est un entier positif : alors le développement est limité et on a la formule du binôme. En général on a :

$$f^{(p)}(x) = m(m-1)\dots\dots(m-p+1)(1+x)^{m-p}$$
$$f^{(p)}(0) = m(m-1)\dots\dots(m-p+1)$$

Les dérivées de $f(x)$ sont infinies pour $x = -1$ dès que $m-p$ est négatif, ce qui finit toujours par arriver à partir d'une certaine valeur de $p$. Nous devrons donc au moins limiter le développement à l'intervalle $(-1+1)$.

Considérons la série de Mac-Laurin

$$1 + \frac{m}{1}x \quad \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots\dots p}x^p + \dots\dots$$

Le rapport d'un terme au précédent a pour expression $\frac{m-p}{p+1}x$ et sa limite est $x$ lorsque $p$ augmente indéfiniment. Donc, dans l'intervalle en question, sauf peut-être pour $x = \pm 1$, la série est convergente. Elle pourrait avoir une somme différente de $(1+x)^m$. Nous prendrons le reste sous la forme de Cauchy(3)

Nous aurons :

$$R_n = x\left[\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1\,2\dots n}x^n\right](1-\theta)^n(1+\theta x)^{m-n-1}$$

La partie entre crochets est le terme général de la série dérivée, que nous savons être convergente. Donc, ce premier facteur tend vers zéro. Les autres facteurs

peuvent se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \quad (1+\theta x)^{m-1}$$

Quand $n$ augmente indéfiniment, $\theta$ restant compris entre 0 et 1, $1+\theta x$ ne s'annule jamais, donc le dernier facteur conserve une valeur finie. Quant à l'autre facteur, il reste aussi fini parce que $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ ne peut jamais dépasser l'unité en valeur absolue. On a donc

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots p}x^p + \ldots\ldots\ldots$$

pour toute valeur de $x$ comprise entre $-1$ et $+1$.

Etudions maintenant les valeurs $-1$ et $+1$.

$x = -1$ Pour $x = -1$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p-m}{p+1}$

La règle de Gauss donne comme condition de convergence

$$m > 0$$

D'ailleurs quand $m$ est positif $(1+x)^m$ reste continu et fini pour $x = -1$ et on a, par le théorème d'Abel

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs positives de $m$.

Soit enfin $x = -1$. Le rapport d'un terme au précédent est $\frac{m-p}{p+1}$. Il finit par devenir et reste négatif, en sorte que les termes de la série au bout d'un certain temps sont alternés de signes. Si $m$ est égal à $-1$, les termes sont égaux en valeur absolue et la série se réduit à

$$1-1+1-1+1-\ldots\ldots\ldots$$

Elle est évidemment divergente

Si $m < -1$, on a $p-m > p+1$

Les termes vont en croissant et la série est divergente

Si $m > -1$, les termes sont en décroissant, et comme ils sont alternés de signes, il suffit, pour établir la convergence, de montrer que leur valeur absolue tend vers zéro. Soit $u_n$ la valeur absolue du terme général, en sorte qu'on ait

$$u_{n+1} = u_n \frac{n-m}{n+1} = u_n \left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)$$

Si on considère la série dont le terme général est $v_n = \frac{1}{n^{m+1}}$, ce terme général tend vers zéro, bien que la série puisse être divergente (1). Si l'on démontre qu'on

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

(1) Picard - Cours d'Analyse - Page 14

$u_n$ tendra vers zéro, puisque, en vertu d'un raisonnement déjà fait, $u_n$ finira par devenir inférieur au produit de $v_n$ par un facteur constant. Or on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{m+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{m+1}$$

On peut ici appliquer la formule du binôme puisque $\frac{1}{n+1}$ est plus petit que 1 et on a, en s'arrêtant au second terme,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1 - \frac{m+1}{n+1}$$

et le théorème est démontré.

En résumé, la formule du binôme s'applique dans les cas suivants

| | |
|---|---|
| $-1 < x < 1$ | $m$ quelconque |
| $x = -1$ | $m > 0$ |
| $x = 1$ | $m + 1 > 0$ |

et seulement dans ces cas.

III —— La même méthode fournirait sans difficulté le développement des fonctions

$$y = L(1+x) \qquad y = \text{arc tg}\, x \qquad y = \text{arc sin}\, x$$

au moins pour les deux premières dont nous avons calculé (p. 27) les dérivées d'ordre $n$. Mais il est plus commode ici d'opérer autrement ; on développe la dérivée et on revient à la fonction par une intégration.

1° On a d'abord

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$$

Le rayon de convergence est 1 ; d'ailleurs il n'y a pas lieu d'aborder la question en dehors de l'intervalle $(-1+1)$ puisque $L(1+x)$ est infini pour $x = -1$. Intégrons de 0 à $x$ :

$$(1) \quad L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Pour $x = 1$ la série reste convergente ; à cause de la continuité (Théorème d'Abel), on a :

$$L\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

Pour $x = -1$ il y a divergence ; d'ailleurs $L(1+x)$ devient infini. En somme la formule (1) est valable pour $-1 < x \leq 1$.

Cette formule permet de calculer les logarithmes des nombres entiers. En supposant $\frac{h}{N} < 1$ on a

$$L\left(\frac{N+h}{N-h}\right) = L\left(1+\frac{h}{N}\right) - L\left(1-\frac{h}{N}\right) = 2\left[\frac{h}{N} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{N^3} + \frac{1}{5}\frac{h^5}{N^5} + \ldots\right]$$

ou en posant $N - h = a$

$$L(a+2h) - La = 2\left[\frac{h}{a+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(a+h)^3} + \dots\dots\right]$$

formule qui donnera, de proche en proche, les logarithmes de tous les nombres impairs, à partir de 3. On aura d'ailleurs $L(3) = L2 + L\left(1+\frac{1}{2}\right)$; on pourra donc en particulier obtenir les logarithmes de tous les nombres premiers.

Nous voyons en même temps comment un développement en série entière permet de calculer de proche en proche, les valeurs de la fonction, pour des valeurs de $x$ extérieures à l'intervalle de convergence.

2° Intégrons maintenant de 0 à $x$, le développement :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\dots\dots$$

il vient

$$(2)\quad \operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\dots$$

Le rayon de convergence est encore égal à 1. La série étant formée seulement de puissances impaires de $x$, comme on devait s'y attendre, il suffit de la considérer pour des valeurs positives de $x$. Pour $x = 1$, elle est convergente, et on a, en raison de la continuité

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots$$

Cette formule est due à Leibnitz ; elle est trop lentement convergente pour servir utilement au calcul de $\pi$ ; la formule (2) appliquée à des valeurs convenablement choisies, fournit des développements très rapidement convergents. Nous citerons le suivant

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots\right)$$

qu'on déduit de l'égalité facile à vérifier :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

3° Si nous développons $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme, nous aurons :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}\,x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^6 + \dots\dots + \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\,x^{2n} \quad \dots$$

D'où en intégrant, à partir de 0 :

$$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots\dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\dots$$

développement valable de $-1$ à $+1$. Pour $x = 1$, il y a encore convergence car le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}$$

La règle de Gauss donne ici

$$A - a + 1 = 1 - \frac{10}{4} + 1 < 0$$

On en conclut :

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} + \dots\dots$$

$x = -1$ donnerait le même résultat, la série étant impaire.

IV — On peut souvent opérer le développement par la méthode des coefficients indéterminés. — Par exemple si on pose

$$\cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n + \dots\dots$$

$$\sin x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots + b_n x^n + \dots\dots$$

on a, en traduisant les deux relations :

$$d \cos x = -\sin x \, dx \qquad d \sin x = \cos x \, dx$$

$$(n+1)\, a_{n+1} = -b_n \qquad (n+1)\, b_{n+1} = a_n .$$

On en déduit

$$(n+2)\, a_{n+2} = -b_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1} \qquad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

et de même :

$$b_{n+2} = -\frac{b_n}{(n+1)(n+2)}$$

D'autre part $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ ; d'où l'on conclut immédiatement :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots\dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots\dots\dots\dots$$

Ces séries convergentes pour toute valeur de $x$ sont les seules qui puissent répondre à la question. — Il reste à s'assurer que leurs sommes sont bien $\cos x$, $\sin x$ ; si on désigne par $\varphi$ et $\psi$ ces deux sommes, elles vérifient les relations

$$\varphi' = -\psi \qquad \psi' = \varphi \qquad \varphi(0) = 1 \qquad \psi(0) = 0$$

Des deux premières on déduit

$$\varphi \varphi' + \psi \psi' = 0 \qquad \varphi^2 + \psi^2 = \text{Const.}$$

et par suite $\varphi^2 + \psi^2 = 1$. Donc $\varphi$ et $\psi$ sont le cosinus et le sinus d'une même fonction $y$. On a alors d'après la relation $\varphi' = -\psi$

$$-y' \sin y = -\sin y \qquad y' = 1 \qquad y = x + c$$

et comme $\sin y$ doit s'annuler pour $x = 0$, $y = x + 2K\pi$, donc enfin $\varphi = \cos x$ $\psi = \sin x$

V — Nous terminerons en donnant l'extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction déterminée, finie, continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n$ inclusivement, dans un champ donné $(C)$ et admettant des dérivées partielles d'ordre $n+1$. $a, b, c$, $a+h, b+k, c+l$ étant deux systèmes de valeurs appartenant au champ $(C)$, la fonction

$$\varphi(t) = f(a+ht, b+kt, c+lt)$$

satisfait évidemment dans l'intervalle (01) aux conditions nécessaires pour qu'on puisse la développer par la formule de Mac Laurin, on aura donc :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} + \frac{\varphi''(0)}{1.2} + \dots\dots\dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1.2\dots n} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{1.2\dots(n+1)} \qquad (0 < \theta < 1)$$

D'ailleurs $\varphi(t)$ est une fonction composée et les fonctions composantes sont linéaires ; on aura donc, (page 32)

$$\varphi^{(i)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{i} f(a+ht, b+kt, c+lt)$$

On aura donc enfin :

$$f(a+h, b+k, c+l) = f(a,b,c) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right) f(a,b,c) \dots + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n(n)} f(a,b,c) + R_n$$

avec :

$$R_n = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) \qquad 0 < \theta < 1$$

C'est la formule de Taylor pour trois variables ; le raisonnement et le résultat sont évidemment valables pour un nombre quelconque de variables

---

# Dixième Leçon.

## Variation d'une fonction. — Maxima et Minima.

I. ——— Le Théorème des accroissements finis conduit à une méthode régulière pour étudier la marche d'une fonction dans un intervalle donné $(a\,b)$, à la condition que, dans cet intervalle, la fonction soit, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, déterminée finie et continue, et que de plus elle admette une dérivée, déterminée et finie. Si alors $x$ et $X$ sont deux nombres compris entre $a$ et $b$ on a :

$$(1) \qquad f(X) - f(x) = (X-x) f'(\xi) \qquad x \leq \xi \leq X$$

Nous en avons déduit que la condition $f'(x) \equiv 0$ est nécessaire et suffisante pour que la fonction reste constante dans l'intervalle $(a\,b)$.

Supposons maintenant que la dérivée soit constamment positive sauf pour des valeurs isolées de $x$ pour lesquelles elle puisse s'annuler on aura alors.

$$(2) \qquad f(X) \geq f(x)$$

d'après l'égalité (1). Nous supposons pour fixer les idées $x < X$. La fonction ne peut rester constante dans l'intervalle $(x X)$ ; donc il existe au moins une valeur $x'$ comprise entre $X$ et $x$ et telle que l'on ait $f(X) - f(x') \neq 0$. Mais d'après l'inégali[té] (2) appliquée à chacun des intervalles $(X\,x')$ $(x'\,x)$, on voit que $f(X)$, $f(x')$ $f(x)$ so[nt] rangés par ordre de grandeur ; on doit donc rejeter la relation (2) le signe $=$

et on a

$$f(X) > f(\alpha)$$

Si donc on appelle croissante ou décroissante une fonction telle que son accroissement, dans un intervalle donné, soit de même signe que celui de la variable, ou de signe contraire, on est conduit au théorème suivant :

La dérivée étant supposée ne s'annuler que pour des valeurs isolées de la variable, la fonction est croissante tant que la dérivée ne devient pas négative, décroissante tant que la dérivée ne devient pas positive.

D'après cela, on devra d'abord chercher les valeurs pour lesquelles la dérivée change de signe. Elles séparent des intervalles partiels dans chacun desquels la fonction variera dans le même sens.

Exemple — Supposons qu'on ait courbé suivant un arc de cercle un fil de longueur donnée $2l$ ; le segment compris entre cet arc et sa corde aura une aire $S$ dont on peut se proposer d'étudier la variation.

Si on désigne par $x$ le demi-angle au centre sous-tendu par le fil, $x$ pourra varier de $0$ à $\pi$ ; on obtient immédiatement, pour l'aire en question :

$$S = l^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin x \cos x\right) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

On a donc à étudier la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin x \cos x$$

La dérivée peut s'écrire

$$f'(x) = 2\cos x\,(\sin x - x\cos x)\,\frac{1}{x^3}$$

Les deux derniers facteurs sont constamment positifs, $x$ variant de $0$ à $\pi$ ; le premier $2\cos x$ est positif de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, négatif de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$

Donc $S$ va en croissant de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, décroît ensuite ; en d'autres termes, si on donne successivement au fil toutes les formes possibles, depuis le segment de droite jusqu'au cercle complet, l'aire du segment augmente jusqu'au moment où l'on a un demi cercle, et diminue ensuite.

II — On dit que la fonction $f(\alpha)$ passe par un maximum pour $x = \alpha$, lorsqu'on peut trouver un nombre positif $\eta$ tel que la différence $f(\alpha) - f(\alpha + h)$ soit positive pour toutes les valeurs de $h$ comprises entre $-\eta$ et $+\eta$. Si dans les mêmes conditions $f(\alpha) - f(\alpha+h)$ **est** constamment négative, la fonction passe par un minimum pour $x = \alpha$.

Supposons que la fonction ait une dérivée déterminée pour $x = \alpha$, cette dérivée est la limite de chacun des deux rapports.

$$\frac{-f(\alpha) + f(\alpha - h)}{-h} \qquad \frac{-f(\alpha) + f(\alpha + h)}{h}$$

Or si $\alpha$ correspond à un maximum ou à un minimum, ces deux rapports sont de signes contraires dès que $h$ est suffisamment petit, leur limite commune, si elle a une valeur finie, doit donc être nulle.

Ainsi les valeurs de $x$ correspondant à un maximum ou à un minimum doivent se trouver parmi celles qui rendent nulle ou infinie la dérivée $f'(x)$ ; pour savoir si une telle valeur $\alpha$ correspond effectivement à un maximum ou à un minimum, on devra étudier la fonction dans les deux intervalles $(\alpha-h, \alpha)(\alpha, \alpha+h)$ supposés suffisamment restreints. Si la fonction varie dans le même sens pour ces deux intervalles, il n'y aura ni maximum ni minimum ; si elle est croissante dans le premier, décroissante dans le second, il y aura maximum ; si elle décroît dans le premier et croît dans le second, minimum.

Par exemple, l'aire du segment considéré, dans l'exemple donné plus haut, atteint un maximum pour $x = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire dans le cas du demi cercle.

Le sens dans lequel varie $f(x)$ est lié au signe de la dérivée. Comme cette dérivée est nulle ou infinie pour $x=\alpha$, on saura quel est son signe dans l'un ou l'autre des intervalles $(\alpha-h, \alpha)\,(\alpha, \alpha+h)$ si on connaît le sens dans lequel elle-même varie. Ce signe pourra être étudié à l'aide de la dérivée $f''(x)$ si toutefois cette dérivée existe.

Considérons le cas particulier où la fonction est finie et continue dans un intervalle suffisamment petit comprenant $\alpha$, et où elle admet une suite de dérivées également finies et continues. Supposons que $\alpha$ annule les dérivées successives jusqu'à celle d'ordre $n$ exclusivement. Nous aurons, pour des valeurs suffisamment petites de $h$ :

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\alpha+\theta h)$$

$\theta$ étant compris entre zéro et un. Puisque $f^{(n)}(x)$ est continu pour $x=\alpha$, on peut restreindre $h$ de telle sorte que $f^{(n)}(\alpha)$ conserve un signe constant de $\alpha-h$ à $\alpha+h$, les zéros de $f^{(n)}(\alpha)$ étant toujours supposés isolés les uns des autres. Dans ces conditions, si $n$ est pair $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ conservera le même signe dans l'intervalle considéré. Ce signe sera celui de $f^{(n)}(\alpha)$ ; il y aura donc maximum si $f^{(n)}(\alpha)$ est négatif, minimum s'il est positif. Si $n$ est impair, $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ changera de signe avec $h$, il n'y aura donc ni maximum, ni minimum.

**Exemple** — Maxima et minima du carré de la distance d'un point $P(\alpha, \beta)$ à une courbe plane $y=f(x)$ (coordonnées rectangulaires).

Soient $(x, y)$ les coordonnées de $M$ et $u$ le carré de la distance $PM$ ; on a :

$$(1)\begin{cases} u = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{du}{dx} = (x-\alpha) + (y-\beta) f'(x) \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2u}{dx^2} = 1 + (y-\beta) f''(x) + f'^2(x) \end{cases}$$

Il ne peut y avoir maximum ou minimum que si l'on a :

$$x - \alpha + (y-\beta) f'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y-\beta}{x-\alpha} f'(x) + 1 = 0$$

Les deux droites qui ont $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, $f'(x)$ pour coëfficients angulaires doivent donc être perpendiculaires ; en d'autres termes PM doit être normal à la courbe.

Pour discuter la question, prenons le point $M_0$ trouvé pour origine, pour axe des $x$ la tangente en $M_0$, pour axe des $y$ la normale à la courbe : on aura, dans ces conditions

$$\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} = 1 - \beta f''(0)$$

Si $f''(0)$ est nul, c'est-à-dire si $M_0$ est un point d'inflexion, il y a toujours un minimum. Si $f''(0) \neq 0$, on peut le supposer positif, la concavité de la courbe est alors tournée du côté des $y$ positifs, il y a sur la partie correspondante de $Oy$ un point $C$ dont l'ordonnée est $\frac{1}{f''(0)}$. Ce point est ce qu'on nomme le centre de courbure en $M_0$. Ceci posé, si $P$ est au-dessus de $C$, on a $\beta > \frac{1}{f''(0)}$ ; donc la dérivée seconde est négative et il y a maximum, si $P$ est au-dessous de $C$, il y a minimum. Si $P$ coïncide avec $C$, elle est nulle et il faut recourir à la dérivée troisième. Différentions la dernière des équations (1)

$$\frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^3} = 3 f'(x) f''(x) + (y-\beta) f'''(x)$$

et, dans le cas particulier des axes choisis,

$$\frac{1}{2}\frac{d^3u}{dx^3} = -\beta f'''(0)$$

Si $f'''(0) \neq 0$, il n'y a ni maximum ni minimum ; si, au contraire, $f'''(0) = 0$ on devra recourir à la dérivée $f^{IV}(0)$ et ainsi de suite. En général $f'''(0)$ ne sera pas nul ; donc le centre de courbure se distinguera de tous les autres points de la normale en ce qu'il sera le seul pour lequel il n'y ait ni maximum ni minimum

## III — Méthode de Fermat —

Reprenons les inégalités :

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) < 0 \qquad -\eta < h < +\eta$$

qui définissent le maximum (le raisonnement serait le même dans le cas du minimum). Soit $\xi$ une valeur de $x$ comprise entre $\alpha - \eta$ et $\alpha$ ; la fonction étant supposée continue, on peut prendre $\xi$ assez voisin de $\alpha$ pour que l'on ait :

$$f(\alpha) - f(\xi) < f(\alpha) - f(\alpha+\eta)$$

$$f(\alpha+\eta) < f(\xi) < f(\alpha)$$

Donc, d'après ce que nous savons des fonctions continues, il y aura au moins une valeur $\xi$ de $x$ comprise entre $\alpha$ et $\alpha+\eta$ et telle que l'on ait $f(\xi)=f(\xi')$. Ainsi la valeur de $x$ qui correspond à un maximum ou à un minimum est comprise entre deux valeurs infiniment voisines de $x$, dont elle est la limite, pour lesquelles la fonction a deux valeurs égales. Si donc on cherche ce que devient l'égalité

$$f(x')=f(x'')$$

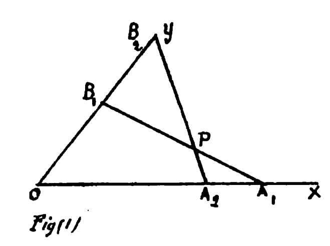
quand $x'$ et $x''$ convergent vers une même valeur $\alpha$, en la comprenant, $\alpha$ se trouvera déterminé par l'équation limite

$$\varphi(\alpha)=0$$

Si la fonction $f$ admet une dérivée et que cette dérivée soit continue, on voit immédiatement que l'équation précédente se réduit à $f'(\alpha)=0$.

La règle précédente constitue la méthode de Fermat. Elle est très générale, en ce sens qu'elle ne suppose rien sur les propriétés de la dérivée, ni même sur son existence : en revanche, elle est nécessairement moins précise, et, en raison même de sa généralité, se prête moins bien aux discussions. Mais la discussion peut souvent s'achever par des considérations directes.

Supposons, par exemple, qu'une droite se meuve dans le plan XOY suivant une loi déterminée : on demande le maximum ou le minimum de l'aire du triangle formé par cette droite OX et OY.



Fig(1)

Soit AB la droite cherchée ; supposons-la comprise entre deux autres $A_1B_1$ et $A_2B_2$ qui donnent des aires égales et soient infiniment voisines ; l'égalité des aires $OA_1B_1$, $OA_2B_2$ donne

$$B_1PB_2 = A_1PA_2$$

ou en divisant par $\frac{1}{2}\sin P$,

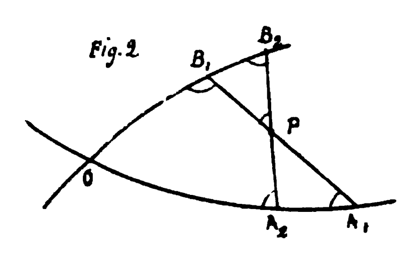
$$B_1P\times B_2P = A_1P\times A_2P$$

Si nous passons à la limite, P devient le point M où la droite mobile touche son enveloppe ; l'équation limite est évidemment

$$AM = BM$$

Donc la droite doit toucher son enveloppe au milieu du segment AB ; cette condition est commune au maximum et au minimum ; pour discuter la question, il serait nécessaire de connaître la nature de l'enveloppe et de savoir en particulier quel est le sens de sa concavité au point M. Dans chaque cas particulier, cette discussion sera facile. On déduirait aisément de ce résultat certaines propositions de minimum concernant les polygones circonscrits à une courbe fermée.

Remarque — Le raisonnement subsisterait sans modification et conduirait au même résultat si les axes OX, OY étaient remplacés par deux




courbes quelconques comme l'indique la figure. Les secteurs curvilignes d'aires égales $B_1PB_2$, $A_1PA_2$ pouvant être remplacés par les triangles $PB_1B_2$, $PA_1A_2$ qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux; l'aire limitée par les deux courbes données et la droite mobile passe par un maximum ou un minimum, quand la droite touche son enveloppe au milieu du segment $AB$.

Dans les mêmes conditions cherchons le maximum ou le minimum de la longueur du segment $AB$. La condition d'égalité entre $A_1B_1$, $A_2B_2$ se traduit ici par la relation:

$$PA_2 - PA_1 = PB_1 - PB_2$$

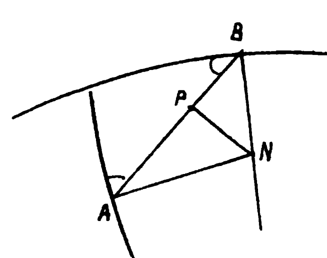
On a d'ailleurs

$$\frac{PA_2}{\sin A_1} = \frac{PA_1}{\sin(A_1+P)} \qquad \frac{PB_2}{\sin B_1} = \frac{PB_1}{\sin(B_1-P)},$$

d'où en substituant dans l'égalité précédente et divisant par $-2\sin\frac{P}{2}$ qui est essentiellement différent de $0$:

$$PA_1\frac{\cos\left(A_1+\frac{P}{2}\right)}{\sin(A_1+P)} = PB_1\frac{\cos\left(B_1-\frac{P}{2}\right)}{\sin(B_1-P)}$$

Passons à la limite, $P$ devient le point de contact de la droite mobile $AB$ avec son enveloppe et on a la relation cherchée




$$\frac{PA}{\operatorname{Tg} A} = \frac{PB}{\operatorname{Tg} B}$$

Le point $P$ coïncide avec la projection sur $AB$ du point de concours des normales en $A$ et $B$ aux deux courbes directrices.

## IV — Fonctions implicites

— Supposons la fonction $u$ définie par une équation non résolue

$$f(x,u)=0$$

Les valeurs de $x$ qui correspondent à un maximum ou à un minimum font partie de celles qui rendent nulle, infinie ou mal déterminée, l'une ou l'autre des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial u}$. Ne nous occupons que de celles qui annulent $\frac{\partial f}{\partial x}$; elles satisferont aux deux équations

$$f(x,u)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)=0$$

Il restera à discuter, et on pourra, si la dérivée seconde $\frac{d^2u}{dx^2}$ existe, la faire intervenir utilement.

En différentiant deux fois la première équation, et tenant compte de la seconde, on a immédiatement:

$$u''\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

en supposant $\frac{\partial f}{\partial u}\neq 0$ il y aura maximum si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est de même signe que $\frac{\partial f}{\partial u}$, minimum s'il est de signe contraire, doute si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$.

Plus généralement soit un système d'équations.

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\; u)=0 \\ f_2(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\; u)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x,\, x_2 \ldots\ldots x_n\; u)=0 \end{array}\right.$$

$u$ peut être considéré comme une fonction de $x_1$, par exemple, $x_2 \ldots x_n$ étant des fonctions auxiliaires. Laissant encore de côté les valeurs de $x$ pour lesquelles $\frac{du}{dx_1}$ devient infini, cherchons à former l'équation $\frac{du}{dx_1}=0$. Si nous différentions les équations (1), en y annulant $\frac{du}{dx_1}$, il vient :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}\ldots\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}=0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_1}\ldots\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}=0$$

D'où en éliminant $\frac{dx_2}{dx_1}, \ldots\ldots \frac{dx_n}{dx_1}$ :

$$(2)\quad \frac{D(f_1 f_2 \cdots f_n)}{D(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)}=0$$

Les équations (1) et (2) considérées simultanément déterminent les conditions du maximum et du minimum.

L'équation (2) exprime qu'il existe un système de fonctions $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ satisfaisant identiquement aux équations

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\ldots\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}=0$$

$$\lambda_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\ldots\ldots\ldots\ldots+\lambda_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=0$$

ou encore à l'identité unique :

$$\lambda_1 df_1 + \lambda_2 df_2 \ldots\ldots + \lambda_n df_n = 0$$

dans laquelle on suppose $du = 0$

Si maintenant on envisage la fonction

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ldots\ldots + \lambda_n f_n = F,$$

on remarquera que $dF$ a la même expression que les $\lambda$ soient constants ou variables, et cela à cause des relations (1). Or cette différentielle est égale à

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 \; \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$$

Si donc on annule identiquement $dF$ on retombe sur les conditions précédemment énoncées. De là la règle suivante : on forme la fonction $F$, et, regardant les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ comme des constantes, on égale à 0 les dérivées partielles de $F$ par rapport aux $n$ variables $x_1, x_2 \ldots x_n$

V — Nous terminerons par une remarque importante ce qui concerne les fonctions d'une seule variable ; la définition que nous avons donnée du maximum (ou du minimum) suppose que la valeur correspondante $\underline{\alpha}$ de $x$ ne coïncide pas avec l'une des extrémités de l'intervalle que cette variable $x$ peut parcourir. Faisons un changement de variable $x = \varphi(t)$ ; on aura :

$$\frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \frac{dy}{dx}$$

On voit donc que $\frac{dy}{dt}$ peut s'annuler sans qu'il en soit de même de $\frac{dy}{dx}$. Il y a donc, dans les questions de maximum, à tenir compte du choix de la variable indépendante.

On évitera toute difficulté en donnant une définition du maximum où ne figure pas la variable indépendante ; par exemple, en supposant la fonction continue on peut définir le maximum comme étant une valeur $\underline{A}$ que la fonction peut acquérir, et qui surpasse toutes les valeurs voisines que la fonction peut prendre. Dans tous les cas il faudra envisager à part les valeurs de la variable indépendante qui pourraient être des maxima ou des minima de cette variable.

Par exemple si l'on considère un point A d'abcisse $\underline{a}$ situé sur l'axe parabole $y^2 = 2px$, le carré de sa distance à un point $(x, y)$ variable sur sur la courbe a pour expression en fonction de $x$

$$(x-a)^2 + 2px$$

En égalant à 0 la dérivée on laisserait échapper une solution ; l'origine correspond toujours à un maximum ou à un minimum, et l'équation

$$x - a + p = 0$$

n'est pas vérifiée pour $x = 0$, cela tient à ce que $\underline{0}$ est un minimum pour la variable $\underline{x}$.

---

# Onzième Leçon

## Maxima et Minima des fonctions de plusieurs variables.

I —— On dit qu'une fonction $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ présente un maximum pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ des variables si l'on peut déterminer un nombre $\varepsilon$ assez petit pour que l'on ait :

$$f(\alpha_1+h_1, \alpha_2+h_2, \dots \alpha_n+h_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) < 0$$

pour toutes les valeurs de $h_1, h_2, \dots h_n$ compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Si l'inégalité contraire est vérifiée, il y a minimum. — Si, en particulier, on prend $h_1$ compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ et $h_2, h_3, \dots h_n$ tous nuls, on voit que la fonction $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ doit présenter un maximum pour $x_1 = \alpha_1$. Il en est de même pour toutes les fonctions obtenues en fixant toutes les variables sauf une quelconque d'entre elles. Donc les systèmes de valeurs des variables qui correspondent à un maximum ou à un minimum ne peuvent se trouver que parmi ceux qui annulent ou rendent infinies toutes les dérivées partielles du premier ordre. Nous écartons le cas où les dérivées sont infinies, et nous supposerons déterminées finies et continues, la fonction et ses dérivées partielles des divers ordres. La formule de Taylor donne dans ce cas :

$$f(\alpha_1+h_1, \alpha_2+h_2, \dots, \alpha_n+h_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$$
$$= \frac{1}{1.2}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) + \dots\dots$$

Remarquons que, les variables étant indépendantes, on ne peut regarder le premier terme du second membre comme la partie principale de l'accroissement. Mais on n'altèrera en rien l'indépendance des variables en supposant leurs accroissements égaux à $\lambda_1 dt, \lambda_2 dt, \dots \lambda_n dt$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles et qui, d'ailleurs, sont absolument arbitraires. Dans ces conditions, il y a un infiniment petit principal $dt$ et le groupe de rang $n-1$ est de l'ordre $n$. Supposons, par exemple qu'il y ait trois variables, $x, y, z$ et considérons - les comme les coordonnées d'un point M de l'espace. Si on prend pour $dt$ la distance de ce point au point M' infiniment voisin, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les cosinus directeurs de l'élément MM' et on représente ainsi toutes les manières dont M' peut se rapprocher indéfiniment de M.

La discussion étant extrêmement compliquée en général, nous nous limiterons à deux variables. La marche suivie montrera comment on devrait procéder dans tous les cas. L'accroissement prend la forme :

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{1.2}\left(h^2 f''_{a^2} + hk f''_{ab} + k^2 f''_{b^2}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(h^3 f'''_{a^3} + \dots\dots\right) + \dots\dots$$

Nous pouvons poser :

$$h = \lambda \alpha \qquad\qquad k = \mu \alpha$$

$\alpha$ étant un infiniment petit quelconque pris pour infiniment petit principal. La formule précédente devient alors :

$$\Delta f = \frac{\alpha^2}{1.2}\left(\lambda^2 f''_{a^2} + 2\lambda\mu f''_{ab} + \mu^2 f''_{b^2}\right) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\left(\lambda^3 f'''_{a^3} + \dots\dots\right) + \dots\dots$$

Supposons que les dérivées secondes ne soient pas toutes nulles. Le signe de $\Delta f$ est alors celui du trinôme homogène en $\lambda$ et $\mu$. Posons :

$$H = (f''_{ab})^2 - f''_{a^2} f''_{b^2}$$

Il y a trois cas à distinguer :

1°. $H > 0$ Dans ce cas le trinôme peut se mettre sous la forme d'une différence de carrés

$$(A\lambda + B\mu)^2 - (C\lambda + D\mu)^2$$

et on peut lui faire prendre un signe quelconque, par exemple en donnant à $\lambda$ et $\mu$ des valeurs qui annulent d'abord le premier carré, puis le second. Il n'y a alors ni maximum ni minimum pour $x = a$ $y = b$.

2° $H < 0$ Le trinôme conserve un signe constant, celui de $f''_{a^2}$ ou $f''_{b^2}$. Ces deux quantités ont le même signe et ne sont pas nulles, sinon H serait positif. La fonction présente donc un minimum si $f''_{a^2}$ est positif, un maximum s'il est négatif.

3° $H = 0$ Le trinôme est un carré parfait

$$f''_{a^2}(A\lambda + B\mu)^2$$

Il a le signe de $f''_{a^2}$ tant que $\lambda$ et $\mu$ ne sont pas proportionnels à $B$ et $-A$. Remplaçons $\lambda$ et $\mu$ par $B$ et $-A$ dans l'ensemble des termes du 3° degré. Soit $G\alpha^3$ le résultat obtenu. Si $G \neq 0$ il ne peut y avoir ni maximum ni minimum, car on peut disposer du signe de $\alpha$ de telle sorte que $G\alpha^3$ ait le signe qu'on voudra. Soit $G = 0$, remplaçons $\lambda, \mu$ par $B$ et $-A$ dans l'ensemble des termes du 4° degré. Soit $L\alpha^4$ le résultat obtenu. Si $L$ est différent de 0 et de même signe que $f''_{a^2}$ il y a maximum ou minimum selon que $f''_{a^2}$ est négatif ou positif. Si $L = 0$ il faudra substituer dans les termes du 5° degré et ainsi de suite.

Nous avons supposé que les trois dérivées secondes n'étaient pas nulles ensemble pour $x = a$ $y = b$ ; si elles l'étaient il faudrait que les dérivées troisièmes le fussent en même temps et l'on aurait à considérer les termes du quatrième degré. En général le développement devra commencer par un ensemble de termes de degré pair, dont on devra étudier le signe.

Exemple — Maximum ou minimum du carré de la distance d'un point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ à la surface $z = f(x, y)$.

Nous poserons suivant l'usage,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = s, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = t$$

La fonction $\underline{u}$ à étudier est, les coordonnées étant rectangulaires,

$$u = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$$

On a ici :

$$(1) \quad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = x - \alpha + p(z-\gamma) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = y - \beta + q(z-\gamma)$$

$$(2) \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 + p^2 + r(z-\gamma) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pq + s(z-\gamma) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 + q^2 + t(z-\gamma) \end{cases}$$

Égalons à 0 les dérivées premières nous aurons les conditions

$$(3) \begin{cases} x - \alpha + p(z-\gamma) = 0 \\ y - \beta + q(z-\gamma) = 0 \end{cases}$$

qui, jointes à l'équation $z = f(x,y)$ fourniront les coordonnées du point $M_0$ qui correspond à un maximum ou à un minimum.

Z, p, $C_2$, $C_1$, $M_0$, X, Y

Prenons ce point pour origine, l'axe des $z$ étant la normale en $M_0$, nous devons dans toutes les équations précédentes faire

$$x = y = p = q = 0$$

car le plan tangent en $M$, a, en général, pour équation

$$Z = z + p(X-x) + q(Y-y)$$

et doit se réduire ici à $Z = 0$. Nos équations se simplifient alors et deviennent

$$(3') \quad \alpha = 0 \qquad \beta = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 - \gamma r \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -s\gamma \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1 - \gamma t$$

$r, s, t$ étant les valeurs particulières des dérivées secondes de $f(x,y)$ pour $x = y$.
On peut encore simplifier un peu ; le $z$ de la surface s'exprime, dans le voisinage de $M_0$ par

$$(\alpha) \qquad z = rx^2 + 2sxy + ty^2 + \text{des termes du } 3^e \text{ degré} + \ldots\ldots$$

Les axes des $x$ et des $y$ étant arbitraires, prenons les dirigés suivant les bissectrices toujours réelles du système de droites

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0$$

Le rectangle disparaîtra ; nous pouvons supposer $s = 0$, $r$ et $t$ se trouvant alors modifiés : il est clair que, chaque groupe homogène de $(\alpha)$ se transformant dans le groupe de même degré, $r$ et $t$ seront encore les dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$, prises pour $x = 0 \quad y = 0$.
Ceci posé, nous aurons :

$$(5) \qquad H = -(1-\gamma r)(1-\gamma t)$$

Les équations (3) expriment d'abord que $P$ est sur $OZ$ ; en d'autres termes $M_0$ est le pied d'une normale menée de $P$ à la surface.

La discussion s'achève aisément. Nous distinguerons plusieurs cas :

1° $rt>0$ Soient $C_1$ $C_2$ les deux points de $OZ$ qui ont pour ordonnées $\frac{1}{r}, \frac{1}{t}$ ; dans le cas actuel ces deux points sont d'un même côté de $M_0$ ; nous supposerons qu'on ait choisi la direction de $OZ$ de telle sorte que $r$ et $t$ soient positifs. Tant que $P$ est entre $C_1$ et $C_2$ $H>0$. Il n'y a donc ni maximum, ni minimum : Si $P$ est en dehors de $C_1C_2$, $H<0$ et il y a maximum ou minimum. Les formules (4) donnent pour $y=0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+2$ ; donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ reste positif tant que $P$ est au-dessous de $C_1$ et il y a minimum. Il y a donc :

Maximum si $P$ est au dessus de $C_2$

Minimum si $P$ est au dessous de $C_1$

Ni maximum ni minimum si $P$ est entre $C_1$ et $C_2$.

2° $rt<0$ $C_1$ et $C_2$ sont alors de part et d'autre de $M_0$. Pour $y=0$ $H=-1$ ; donc $H$ reste négatif tant que $P$ est entre $C_1$ et $C_2$ et est positif en dehors de ce segment. D'ailleurs pour $y=0$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$ ; donc enfin il y a :

Minimum si $P$ est entre $C_1$ et $C_2$

Ni maximum, ni minimum si $P$ est en dehors de $C_1$, $C_2$.

3° $rt=0$ On a alors $t=0$ par exemple et $C_2$ est à l'infini

$$H=yr-1 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2(1-yr)$$

Pour $y=0$ $H=-1$ ; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+2$ ; il y a donc minimum pour toute position de $P$ située au-dessous de $C_1$ ; au dessus il n'y a ni maximum ni minimum. Nous avons laissé de côté le cas où $P$ coïnciderait avec un des points $C_1$ $C_2$. En pareil cas, il faudrait avoir recours, comme nous l'avons dit, aux termes du 3e ou du 4e ordre du développement de $\Delta u$.

**Remarque** — Les deux points $C_1$ et $C_2$ s'appellent les centres de courbure principaux de la surface au point $M_0$. Ce qui précède suffit pour montrer qu'ils doivent jouer un rôle important dans l'étude de la surface aux environs de $M_0$.

II — Supposons qu'on ait un système d'équations de la forme.

$$f_1(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n\, u)=0$$
$$f_2(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n\, u)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{n-k}(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n\, u)=0$$

Si on élimine $(n-k-1)$ des quantités $x_1 x_2 \ldots x_n$, $u$ sera une fonction des autres

$$x_1 x_2 \ldots x_k\, x_{k+1}$$

En laissant de côté les cas où les dérivées partielles de $u$, par rapport à

ces dernières variables, deviendraient infinies, il n'y aura maximum ou minimum que si on a :

$$(2)\ \frac{\partial u}{\partial x_1}=0 \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \frac{\partial u}{\partial x_{K+1}}=0$$

Les équations (1) et (2) déterminent les systèmes de valeurs de toutes les variables pour lesquelles il peut y avoir un maximum ou un minimum de u

Nous pouvons répéter ici pour chacune des variables $x_1\, x_2 \ldots x_{K+1}$, le raisonnement fait à propos des fonctions implicites d'une variable unique. On voit alors, sans qu'il soit besoin de recommencer ce raisonnement, qu'on serait conduit à la règle suivante. On formera la fonction

$$F=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3 \ldots\ldots\ldots + \lambda_{n-K} f_{n-K}$$

ou $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-K}$ seront considérés comme des constantes et on égalera à 0 ses dérivées partielles par rapport à toutes les variables $x, x_2 \ldots x_n$. Si entre les (n) équations ainsi obtenues on éliminait les $\lambda$ les K+1 équations restantes seraient équivalentes aux équations (2)

Ce procédé est commode pour obtenir, d'une façon symétrique, les équations complémentaires. Quant à la discussion elle sera en général très compliquée ; mais on pourra souvent s'en dispenser et voir directement si l'on est dans le cas d'un maximum ou d'un minimum.

Exemple — Un point mobile va d'un point A situé dans un premier milieu à un point B situé dans un autre milieu séparé du premier par une surface S. Le mouvement est, dans chaque milieu, rectiligne et uniforme, mais les deux vitesses v et v' sont différentes. En quel point le mobile doit-il traverser la surface pour que la durée du trajet soit maxima ou minima ?

Soient $\alpha, \beta, \gamma$, les coordonnées de A, $\alpha', \beta', \gamma'$ celles de B, $x\,y\,z$ celles du point de passage $M_1$,

$$(1)\quad f(x, y, z)=0$$

l'équation de la surface S, u la durée du trajet. On a :

$$(2)\quad u=\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{v}+\frac{\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}}{v'}$$

Formons la fonction $u+\lambda f$ et annulons ses dérivées partielles par rapport à $x, y, z$ ; nous aurons :

$$(3)\ \begin{cases} \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{x-\alpha}{v\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}+\dfrac{x-\alpha'}{v'\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}}=0 \\ \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{y-\beta}{v\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}+\dfrac{y-\beta'}{v'\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}}=0 \\ \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}+\dfrac{z-\gamma}{v\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}+\dfrac{z-\gamma'}{v'\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}}=0 \end{cases}$$

Telles sont les équations de condition. Pour les interpréter, prenons pour origine le point $M_0$ qu'elles déterminent ; pour axe des $z$ la normale en ce point ; pour plan des $zx$ le plan $AM_0Z$ nous devrons, dans les équations précédentes, faire : $x=y=z=0$, et en outre $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ $\beta=0$. On a alors:

$$\frac{\alpha}{v.AM_0}+\frac{\alpha'}{v'.BM_0}=0 \qquad \frac{\beta'}{v'.BM_0}=0 \qquad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\gamma}{v.AM_0}-\frac{\gamma'}{v'BM_0}=0$$

Les deux premières ne renfermant pas $\lambda$ donnent les conditions cherchées. La seconde exprime que $B$ dans le plan $AMZ$; la première est facile à interpréter. Désignant par $i$ et $r$ les angles soulignés sur la figure, on a $\alpha=AM_0\sin i$ $\beta=-BM_0\sin r$. On a donc simplement:

$$\frac{\sin i}{v}=\frac{\sin r}{v'}$$

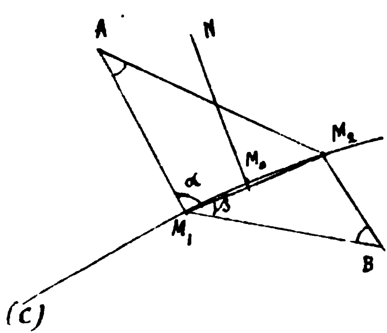
En résumé le point $M_0$ est caractérisé par les deux conditions suivantes:

1° La normale en ce point est dans le plan $AM_0B$.

2° Les angles $i$ et $r$ sont liés par la relation précédente.

Pour discuter il faudrait connaître la nature de la surface $S$. Si par exemple elle se réduit à un plan, on verra sans difficulté que le point $M_0$ est unique et correspond à un minimum de $u$.

III — La méthode de Fermat s'applique sans modification aux fonctions de plusieurs variables indépendantes.




Reprenons par exemple le problème précédent. Soit $M_0$ un point répondant à un maximum ou à un minimum de la durée du trajet. Menons sur la surface une courbe $C$ quelconque passant par $M_0$. Il y aura maximum ou minimum relativement à tous les points de $(C)$. Soient $M_1$ $M_2$ deux points infiniment voisins situés de part et d'autre de $M_0$ et tels que

$$(1)\qquad \frac{AM_1}{v}+\frac{BM_1}{v'}=\frac{AM_2}{v}+\frac{BM_2}{v'}$$

En introduisant les angles soulignés sur la figure, on a :

$$AM_1=M_1M_2\,\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin A} \qquad AM_2=M_1M_2\,\frac{\sin\alpha}{\sin A}$$

$$BM_1=M_1M_2\,\frac{\sin(B+\beta)}{\sin B} \qquad BM_2=M_1M_2\,\frac{\sin\beta}{\sin B}$$

Portons ces valeurs dans l'égalité (1) et simplifions

$$\frac{1}{v\sin A}\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2}+\alpha\right)+\frac{1}{v'\sin B}\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{B}{2}+\beta\right)=0$$

Passant à la limite nous aurons en annulant $B$ et $A$

$$\frac{\cos\alpha}{v}+\frac{\cos\beta}{v'}=0$$

Cette relation doit avoir lieu pour toutes les directions autour $M_0$ ; si on choisit en particulier celle qui est perpendiculaire au plan $AM_0N_1$, $M_0N$ étant la normale, on a $\cos\alpha = 0$ d'où $\cos\beta = 0$ donc le plan $AM_0B$ contient la normale $M_0N$ ; il est facile de voir qu'on a alors $\cos\alpha = \sin i$, $\cos\beta = -\sin z$ ; et on retombe sur les conditions déjà trouvées.

Comme dernier exemple prenons encore la question suivante. Un plan P se déplace de manière à rouler sur une surface fixe S. Déterminer les positions pour lesquelles il formera avec un trièdre donné $OXYZ$ un tétraèdre de volume maximum ou minimum.

Supposons le problème résolu soit I le point de contact du plan avec la surface enveloppe ; et supposons par exemple qu'il y ait minimum.

Si nous faisons rouler le plan P sur le cône circonscrit de C à la surface le volume du tétraèdre ne pourra qu'augmenter, comme sa hauteur issue de C reste alors constante il en résulte que l'aire $OBA$ est actuellement minima. Donc elle touche, d'après ce que nous avons vu, en son milieu H la trace du cône sur le plan $XOY$. La génératrice correspondante $CH$ contient le point I. Donc le point I doit se trouver sur l'une quelconque des médianes de $ABC$. Donc enfin, ce point de contact doit se trouver au centre de gravité du triangle $ABC$.

---

# Douzième Leçon.

---

## Fonctions primitives – Procédés généraux d'intégration.

---

1. — Le problème inverse de celui que résout le calcul différentiel consiste à déterminer certaines fonctions d'après des relations données où elles figurent par leurs dérivées. Nous nous occuperons seulement du cas le plus simple, où on se propose de trouver une fonction admettant pour dérivée une fonction donnée $f(x)$. Le problème, même réduit à ces termes simples, n'est possible que dans des cas particuliers et il est facile de voir a priori qu'il doit en être ainsi.

Considérons, par exemple la fonction $\frac{1}{x}$ ; sa fonction primitive est, à une constante près, donnée par l'intégrale $\int_1^x \frac{dx}{x}$ : cette fonction peut être définie avant toute autre, même si l'on veut avant $x^m$ ; il est bien évident, cependant qu'elle ne peut être exprimée que sous forme d'intégrale

tant qu'on ne s'est pas élevé à la notion de la fonction exponentielle et de son inverse. De même la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ admet comme fonction primitive $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$: cette intégrale a un sens parfaitement précis, au moins pour toute valeur de $x$ supérieure à $-1$. Et nous verrons plus tard qu'elle se distingue, par des propriétés essentielles, de toutes celles que nous connaissons actuellement et qu'on obtient en combinant, en nombre fini, les fonctions algébriques, exponentielles et circulaires. On ne pourra donc jusqu'à ce qu'on ait acquis la notion de fonctions nouvelles, exprimer cette fonction que sous forme d'intégrale ou à l'aide d'un développement illimité. La théorie des fonctions permet d'ailleurs d'étudier les intégrales d'après les propriétés des fonctions qui leur donnent naissance.

II. — Intégration immédiate — L'intégrale $\int_{x_0}^x f(x)\,dx$ est, comme nous venons de le rappeler, une fonction primitive de $f(x)$ et toutes les autres s'en déduisent par l'addition d'une constante arbitraire ; nous représenterons l'ensemble de toutes ces fonctions par le symbole $\int f(x)\,dx$ que nous appellerons intégrale indéfinie. D'après cela, l'équation

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

signifie simplement que $F(x)+C$ admet $f(x)$ pour dérivée ; c'est une simple notation. Si nous l'appliquons aux fonctions les plus simples nous aurons immédiatement :

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m+1 \neq 0) \qquad \int \cos x\,dx = \sin x \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{matrix} \text{arc} \sin x \\ = -\text{arc} \cos x \end{matrix}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x$$

$$\int \frac{dx}{x} = Lx \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

chacune des fonctions inverses ayant le sens bien précis que nous lui avons attribué.

Remarques. — 1°. On peut toujours faire sortir un facteur constant du signe d'intégration ou, au contraire, l'introduire à la condition de diviser ensuite l'intégrale par ce facteur. Cela tient à ce que $a.F(x)$ a pour dérivée $a.F'(x)$, $\underline{a}$ étant une constante.

Exemple :
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{a}\, \text{Arctg}\, \frac{x}{a}$$

2°. Il suffit parfois de transformer la fonction $f(x)$ pour apercevoir l'intégrale. Ainsi lorsqu'on peut mettre $f(x)$ sous la forme $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, on en déduit

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = L\,\varphi(x)$$

Par exemple :

$$\int \text{tg}\, x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -L\cos x$$

et
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{tg \frac{x}{2}} dx$$
$$= L\, tg \frac{x}{2}$$

III. — Décomposition en éléments intégrables. L'égalité différentielle :
$$d(u+v+w) = du + dv + dw$$
peut s'écrire :
$$\int [f(x) + \varphi(x) + \psi(x)] dx = \int f(x) dx + \int \varphi(x) dx + \int \psi(x) dx$$

On pourra donc chercher à décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions dont chacune soit la dérivée d'une certaine fonction. Par exemple :
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} L \frac{1+x}{1-x}$$
$$= L \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$
De même
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$= tg\, x - cotg\, x$$

Ce procédé s'applique avec succès au cas où $f(x)$ est une fraction rationnelle quelconque.

IV. — Intégration par parties. De l'équation
$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$
on déduit
$$\int f(x)\, \varphi'(x)\, dx = f(x)\, \varphi(x) - \int f'(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Il peut arriver que l'intégrale du second membre soit plus facile à obtenir que celle du premier.

Exemples : 1°. — $\int x^n\, L x\, dx$. Prenons $x^n dx$ comme partie intégrable :
$$\int x^n\, Lx\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} Lx - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{dx}{x}$$
$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} Lx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

2°. — Soient les deux intégrales
$$A = \int e^{mx} \cos px\, dx \qquad B = \int e^{mx} \sin px\, dx$$
Prenons $e^{mx} dx$ pour partie intégrable :
$$A = \frac{1}{m} e^{mx} \cos px + \frac{p}{m} \int e^{mx} \sin px\, dx$$
$$B = \frac{1}{m} e^{mx} \sin px - \frac{p}{m} \int e^{mx} \cos px\, dx$$
D'où l'on déduit
$$mA - pB = e^{mx} \cos px$$
$$mB + pA = e^{mx} \sin px$$

d'où enfin :

$A = \frac{e^{mx}}{m^2+p^2}(m \cos px + p \sin px)$ $B = \frac{e^{mx}}{m^2+p^2}(m \sin px - p \cos px)$

3°.– On peut généraliser la règle d'intégration par parties ; On a en effet :

$$\int f^{(n)}_{(x)} \varphi(x)\,dx = f^{(n-1)}_{(x)} \varphi(x) - \int f^{(n-1)}_{(x)} \varphi'(x)\,dx$$

$$\int f^{(n-1)}_{(x)} \varphi'(x)\,dx = f^{(n-2)}_{(x)} \varphi'(x) - \int f^{(n-2)}_{(x)} \varphi''(x)\,dx$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int f^{(n-p)}_{(x)} \varphi^{(p)}_{(x)}\,dx = f^{(n-p-1)}_{(x)} \varphi^{(p)}_{(x)} - \int f^{(n-p-1)}_{(x)} \varphi^{(p+1)}_{(x)}\,dx$$

et ainsi de suite. Si on élimine les intégrales intermédiaires, il vient :

$$\int f^{(n)}_{(x)} \varphi(x)\,dx = f^{(n-1)}\varphi - f^{(n-2)}\varphi' + f^{(n-3)}\varphi'' + \dots + (-1)^p f^{(n-p-1)}\varphi^{(p)} + (-1)^{p+1}\int f^{(n-p-1)}_{(x)} \varphi^{(p+1)}(x)\,dx$$

On a, par exemple en appelant $F(x)$ un polynôme entier de degré $m$ :

$$\int F(x)\,e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{F(x)}{a} - \frac{F'(x)}{a^2} + \frac{F''(x)}{a^3} + \dots + (-1)^m \frac{F^{(m)}_{(x)}}{a^{m+1}}\right]$$

V.— Changement de variable. Le procédé que nous allons indiquer est le plus important et le plus étendu de tous. Proposons nous d'exprimer l'intégrale à l'aide d'une nouvelle variable $t$ liée à $x$ par la relation $x = \varphi(t)$.

Soit $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$. Posons

$$\Phi(t) = F(\varphi) \quad \text{d'où} \quad \Phi'(t) = F'(\varphi)\,\varphi'(t)$$

Mais $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$ on a donc :

$$\Phi'(t) = f(\varphi)\,.\,\varphi'(t)$$

D'où :

$$F(x) = \Phi(t) = \int f(\varphi).\,\varphi'(t)\,dt$$

Donc on obtiendra l'intégrale en substituant $t$ dans $f(x)\,dx$ considérée comme une différentielle. On pourra ensuite s'il y a lieu, substituer $x$ à $t$ dans le résultat obtenu. Nous nous sommes placés ici au point de vue de l'intégration indéfinie. Nous reprendrons cette démonstration d'une manière toute différente à propos du calcul des intégrales définies.

Exemples 1° $\int \frac{dx}{\cos x}$ On pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ $dx = -dt$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -L\,tg\,\frac{t}{2}\ ,$$

et, en revenant à la variable $x$ :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = L\,cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = L\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

2° $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ On pose $x = a\,tg\,t$ $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}$

On en tire :

$$a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{dt}{\cos t} = L\,cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

On revient aisément à la variable $x$ ; on a en effet :

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \frac{\cos t}{1+\sin t} \qquad Cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = tg\,t + \frac{1}{\cos t} = \frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

D'où enfin, en faisant entrer $-La$ dans la constante arbitraire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = L\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)$$

3º. – La substitution $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ donne

$$x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} t \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

On en déduit que si $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\sin x$, $\cos x$, la substitution précédente donnera une différentielle de la forme $F(t)\,dt$, $F$ étant une fonction rationnelle de $t$. Nous verrons qu'on peut toujours achever l'intégration d'une fonction rationnelle.

4º. – Supposons $f$ composé rationnellement avec certaines puissances commensurables de $x$, $x^n$, $x^p$, $x^q$. Posons $x = t^K$, $K$ étant un dénominateur commun à $n, p, q$, de sorte qu'on ait :

$$n = \frac{n'}{K} \quad p = \frac{p'}{K} \quad q = \frac{q'}{K} \ldots$$

$n', p', q'$ $K$ étant entiers on en déduira

$$x^n = t^{n'} \quad x^p = t^{p'} \quad x^q = t^{q'} \qquad dx = Kt^{K-1}\,dt$$

et la différentielle sera transformée en $F(t)\,dt$, $F(t)$ étant une fonction rationnelle.

5º. – Comme dernier exemple de réduction à la forme rationnelle, considérons l'intégrale

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

où $m, n, p$ sont des nombres rationnels ; la différentielle qui y figure est ce qu'on nomme une différentielle binôme. – Si $p$ est entier $(a+bx^n)^p$ peut être développé en somme de puissances rationnelles et on est ramené au cas précédent. – Si même $p$ était $> 0$ on aurait une somme de termes immédiatement intégrables.

Posons

$$a + bx^n = t \qquad x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt$$

La différentielle prend alors la forme

$$\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^p dt$$

à un facteur constant près ; elle est encore binôme et réductible à la forme rationnelle si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier.

Enfin on peut écrire : $x^m(a+bx^n)^p = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p$

et en tenant compte du résultat précédent, $\frac{m+1}{n}$ se trouve remplacé par : $\frac{m+np+1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$

En résumé on pourra toujours ramener la question à l'intégration d'une fonction rationnelle si l'un des trois nombres

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p,$$

est entier. – On démontre que ce sont les seuls cas où la transformation soit possible.

Remarques. – 1º Le raisonnement précédent fait en même temps connaître quelle substitution il conviendra de faire dans chaque cas d'intégrabilité.

2º. Il est visible que par une substitution de la forme $x = t^K$ on pourra toujours faire en sorte que $x^m(a+bx^n)^p$ se transforme en une

expression de même forme $x^{m'}(a+bx^{n'})^{p'}$ où $m'$, $n'$, soient entiers; enfin le raisonnement employé plus haut montre qu'on dispose à volonté du signe du second exposant.

VI. — Formule de Réduction. — Lorsque dans $f(x)$ figure un nombre $n$, on peut chercher une relation entre l'intégrale proposée et celle qui correspond à une autre valeur de $n$. On obtient alors ce qu'on appelle une formule de réduction. Posons par exemple :

$$u_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Nous aurons :

$$u_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = u_{n-1} - \frac{1}{2}\int x\,\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^n}$$

D'autre part en intégrant par parties

$$\int x\,\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^n} = -\frac{x}{(n-1)}\;\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\,u_{n-1}$$

d'où en substituant :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{2(n-1)}$$

ou encore : $$u_n = \frac{2n-3}{2n-2}\,u_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\;\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

C'est ce qu'on appelle une formule de réduction. On aura de même :

$$u_{n-1} = \frac{2n-5}{2n-4}\,u_{n-2} + \frac{1}{2n-4}\;\frac{x}{(1+x^2)^{n-2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$u_3 = \frac{3}{4}\,u_2 + \frac{1}{4}\;\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\,u_1 + \frac{1}{2}\;\frac{x}{1+x^2}$$

On ne peut aller plus loin, la formule de réduction devenant illusoire pour $n=1$, mais on a

$$u_1 = \operatorname{arctg} x,$$

donc enfin $u_n$ s'exprime par une fraction rationnelle augmentée d'un terme de la forme $a \operatorname{arctg} x$, $a$ étant une constante.

On en déduit:

$$u_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}\operatorname{arctg} x + \text{une partie rationnelle de}$$ dénominateur $(1+x^2)^{n-1}$.

2° Comme second exemple revenons à l'intégrale

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

Si $\frac{m+1}{n} = q$, les trois cas d'intégrabilité sont ceux où l'un des nombres $p$, $q$, $p+q$ est entier. Remplaçons $m$ par $nq-1$ et posons

$$I_{pq} = \int x^{nq-1}(a+bx^n)^p\,dx$$

On obtient très aisément des formules de réduction. L'intégration par parties donne d'abord :

$$I_{p,q} = \frac{x^{nq}}{nq}(a+bx^n)^p - \frac{bp}{q}\int x^{nq+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^{nq}}{nq}(a+bx^n)^p - \frac{bp}{q} I_{p-1,q+1}$$

D'autre part

$$I_{p,q} = \int x^{nq-1}(a+bx^n)(a+bx^n)^{p-1}dx = aI_{p-1,q} + bI_{p-1,q+1}$$

Si entre ces deux relations on élimine $I_{p,q}$ puis $I_{p-1,q+1}$ on a :

$$(1) \qquad (p+q)\, I_{p,q} = \frac{1}{n} x^{nq}(a+bx^n)^p + a\, p\, I_{p-1,q}$$

$$a\, q\, I_{p-1\,q} = \frac{1}{n} x^{nq}(a+bx^n)^p - b(p+q)\, I_{p-1,q+1}$$

Changeons dans cette dernière relation $p$ en $p+1$

$$(2) \quad a\, q\, I_{p,q} = \frac{1}{n} x^{nq}(a+bx^n)^{p+1} - b\,(p+q+1)\, I_{p,q+1}$$

Enfin si dans (1) nous changeons $p$ en $p+1$, dans (2) $q$ en $q-1$ nous aurons

$$(3) \quad a(p+1)\, I_{p,q} = -\frac{1}{n} x^{nq}(a+bx^n)^{p+1} + (p+q+1)\, I_{p+1,q}$$

$$(4) \quad b(p+q) \quad I_{p,q} = \frac{1}{n} x^{nq-n}(a+bx^n)^{p+1} - a(q-1)\, I_{p,q-1}$$

Les formules (1) (2) (3) (4) permettent donc de faire varier d'une unité dans le sens qu'on veut, l'un des nombres $p, q$, sans modifier l'autre. Dans les cas d'intégrabilité elles permettront de ramener les indices à des valeurs plus simples ; si aucun des caractères d'intégrabilité n'est vérifié, on pourra ramener chacun des indices à être compris entre deux entiers choisis arbitrairement, par exemple entre 0 et 1.

VII. — Quelques uns des résultats que nous venons d'obtenir sont de nature à attirer l'attention ; on constate, par exemple, qu'il suffit de changer dans $f(x)$ la valeur d'un paramètre pour que la fonction intégrale soit profondément modifiée. Telles sont les deux fonctions $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$ qui conduisent, l'une à un arc tangente l'autre à un logarithme. Ce fait montre simplement que par une extension convenable des notions de fonction et de variable, il doit être possible de ramener certaines fonctions à d'autres qui en sont actuellement très différentes. La trigonométrie élémentaire fournit d'ailleurs un exemple de réduction de cette nature. L'expression $\cos x + i \sin x$, qui figure dans la formule de Moivre, peut comme on le sait, être remplacée, dans tout calcul algébrique par $e^{ix}$ pourvu qu'après avoir traité ce symbole comme une exponentielle, on remplace ensuite $e^{iz}$ par $\cos z + i \sin z$ dans les résultats obtenus. C'est ce qu'exprime l'équation symbolique d'Euler.

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Nous ne nous arrêterons pas ici sur les applications bien connues de cette équation ; mais elle fait entrevoir clairement la possibilité de réduire, d'une façon tout à fait générale, les unes aux autres, les fonctions exponentielles et circulaires aussi bien que leurs inverses.

---

# Treizième Leçon.

## Intégration des Fonctions Rationnelles.

I. Soit $\int \frac{f(x)}{F(x)}$ une fonction rationnelle ; si on la décompose en fractions simples après en avoir extrait la partie entière, qui s'intègre immédiatement, on est conduit à deux sortes de termes. Les uns, correspondant aux racines réelles de $F(x)=0$, sont de la forme :

$$\frac{A}{x-a} \quad \text{ou} \quad \frac{A_p}{(x-a)^p} \quad (p>1)$$

et l'on a immédiatement

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\,L\,(x-a) \qquad \int \frac{A_p}{(x-a)^p}\,dx = -\frac{A_p}{(p-1)}\,\frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

Les autres correspondant aux racines imaginaires de $F(x)=0$ sont de la forme

$$\frac{Px+Q}{[(x-a)^2+b^2]^p}$$

On a alors :

$$(1) \quad \int \frac{Px+Q}{[(x-a)^2+b^2]^p}\,dx = \int \frac{P\,(x-a)\,dx}{[(x-a)^2+b^2]^p} + (Pa+Q)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^p}$$

La première intégrale du second membre donne :

$$\int \frac{P(x-a)\,dx}{[(x-a)^2+b^2]^p} = -\frac{P}{2(p-1)}\cdot\frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{p-1}}$$

Si $p>1$, et

$$\int \frac{P\,(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{P}{2}\,L\left[(x-a)^2+b^2\right]$$

Si $p=1$ :

Enfin si dans la dernière intégrale de (1), on fait la substitution :

$$x-a=bt \qquad dx=b\,dt$$

il vient :

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^p} = \frac{1}{b^{2p-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^p}$$

et nous avons vu dans la dernière leçon qu'elle s'obtient par réductions successives. Elle donne un résultat de la forme

$$\frac{S}{[(x-a)^2+b^2]^{p-1}} + K\,\text{arc tg}\,\frac{x-a}{b}$$

$S$ étant un polynôme entier et $K$ une constante

En résumé on pourra calculer complètement l'intégrale

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$$

toutes les fois qu'on saura résoudre l'équation $F(x)=0$. L'intégrale se compose

1° d'une partie rationnelle

2° d'une somme de termes de la forme

$$M\,L\,(x-a) \text{ et } N \operatorname{arc} tg \frac{x-a}{b}$$

Comme en général on ne sait pas résoudre l'équation $F(x)=0$, la méthode précédente doit être considérée comme étant surtout propre à faire connaître la forme de l'intégrale. Cependant on peut dans tous les cas et sans résoudre l'équation $F(x)=0$, calculer effectivement la partie algébrique de l'intégrale.

II. — Supposons toujours qu'on ait extrait la partie entière de la fraction proposée et imaginons la décomposée en fractions simples, réelles ou imaginaires, en sorte qu'on ait :

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots\dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots\dots\dots + \frac{B_p}{(x-a)^p} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \dots\dots + \frac{L_q}{(x-l)^q} \end{aligned}$$

Cette décomposition n'est possible que d'une seule manière ; $A_n, B_p, \dots L_q$ sont tous différents de 0 ; $A_1, B_1, C_1, \dots L_1$ sont ce qu'on nomme les résidus de $\frac{f(x)}{F(x)}$ relatifs aux racines $a, b, . l$ ; ces coefficients peuvent être nuls.

Si nous réunissons les termes qui forment la première colonne du second membre nous aurons une fraction $\frac{M}{H}$ sans partie entière, le dénominateur $H$ est connu sans qu'il soit nécessaire de résoudre l'équation $F(x)=0$. Si en effet $G$ désigne le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ on aura

$$G = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1} \dots\dots (x-l)^{q-1}$$

et $F = GH$ ; $H$ est donc le quotient de $\frac{F}{G}$ ; et $G$ peut lui-même s'obtenir par une suite de divisions

Les termes de la première colonne fourniront l'intégrale

$$\int \frac{M}{H}\,dx$$

qui équivaut à une somme de termes transcendants.

Considérons les autres termes de l'équation (2). Si $a$ est réel on a :

$$(3)\quad \int \frac{A_j}{(x-a)^j}\,dx = -\frac{A_j}{(j-1)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{j-1}}$$

et la première ligne horizontale donnera en réduisant une fraction de la forme

$$\frac{P_a}{(x-a)^{n-1}}$$

$P_a$ étant un polynôme entier qui ne s'annule pas pour $x=a$, à cause de l'inégalité $A_n \neq 0$ ; Le degré de $P_a$ est d'ailleurs au plus égal à $(n-2)$.

Supposons maintenant <u>a</u> imaginaire ; la formule (3) n'a plus de sens, mais

son second membre se déduit de $\frac{A_j}{(x-a)^j}$ par une opération purement algébrique et parfaitement définie; on pourra en répétant cette opération pour chaque valeur de l'exposant et ajoutant les résultats, obtenir une fraction de la forme

$$\frac{R_a + i S_a}{(x-p-qi)^{n-1}}$$

En opérant de même sur les fractions conjuguées des précédentes on serait conduit au résultat conjugué. La somme

$$\frac{R_a + iS_a}{(x-p-qi)^{\alpha-1}} + \frac{R_a - iS_a}{(x-p+qi)^{\alpha-1}}$$

sera une quantité réelle parfaitement déterminée. En raisonnant ainsi comme nous l'avons fait (p 7) il devient évident que la dérivée du résultat obtenu reproduirait une fraction égale à la somme de toutes les fractions conjuguées que nous avons considérées. On pourra donc en définitive représenter l'intégrale de tout l'ensemble sauf les termes de la première colonne, par la somme

$$\frac{P_a}{(x-a)^{\alpha-1}} \; \frac{P_b}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots \cdots + \frac{P_l}{(x-l)^{\lambda-1}}$$

qui réduite à son tour, donnera en définitive une fraction $\frac{N}{G}$ irréductible et sans partie entière. En résumé nous sommes conduits au résultat suivant :

$$(4) \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{N}{G} + \int \frac{M}{H} dx$$

$G, H$ étant les deux polynômes définis plus haut et qu'on peut obtenir par des divisions ; $\frac{N}{G}$, $\frac{M}{H}$ étant l'une et l'autre irréductibles et sans partie entière.

L'intégrale ne peut d'ailleurs être mise que d'une manière sous la forme précédente ; supposons qu'on ait obtenu deux réductions de cette nature on aurait identiquement :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \left(\frac{N}{G}\right)' + \frac{M}{H} = \left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}}\right)' + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{H}}$$

Si on décomposait les deux membres en fractions simples $\left(\frac{N}{G}\right)'$ et $\left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}}\right)'$ ne pourraient conduire qu'à des fractions de degré supérieur à 1, puisque ce sont des dérivées de sommes de fractions simples. Donc les deux facteurs $\frac{M}{H}$, $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{H}}$ doivent être identiques ; et on aura ainsi

$$\frac{M}{H} \equiv \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{H}} \quad \text{d'où :} \left(\frac{N}{G}\right)' \equiv \left(\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}}\right)'$$

Donc les deux fonctions $\frac{N}{G}$, $\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}}$ doivent différer par une constante et comme toutes deux s'annulent pour $x$ infini ; elles sont identiques.

Il résulte de là que $M$, $N$, peuvent être calculés par la méthode des coefficients indéterminés. En effet l'identité (4) peut s'écrire ; ( $HG'$ est évidemment divisible par $G$).

$$f(x) = HN' - N.\frac{HG'}{G} + MG$$

elle donne un système d'équations linéaires entre les coefficients de $M$ et $N$; et d'après ce qui précède ces équations auront une solution et une seule.

Remarque — Revenons à l'équation (4); si $A_1, B_1, \ldots L_1$ sont nuls, il est clair que l'intégrale se réduit à $\frac{N}{G}$; elle est donc purement rationnelle; réciproquement si l'intégrale est rationnelle et qu'on la suppose décomposée en éléments simples, la différentiation ne pourra donner lieu qu'à des fractions de degré au moins égal à 2. Donc pour que l'intégrale soit rationnelle il faut et il suffit que tous les résidus soient nuls, sous cette forme la condition ne pourrait être exprimée qu'en supposant résolue $F(x)=0$; on obtiendra un système de conditions équivalentes si, après avoir calculé $M$ comme nous venons de le faire, on écrit que ce polynôme est identiquement nul.

III. — Méthode de Mr. Hermite. — On peut arriver au même résultat par une autre méthode qui s'applique, comme nous le verrons, à la réduction d'autres intégrales plus compliquées que celles des fractions rationnelles. Elle repose sur cette propriété importante des polynômes entiers.

Théorème. Si $P$ et $Q$ sont deux polynômes entiers premiers entre eux; il existe deux autres polynômes $A$ $B$ tels qu'on ait identiquement:

$$(5)\quad AQ+PB\equiv 1$$

En effet si on cherche le plus grand commun diviseur entre $P$ et $Q$ on est conduit aux opérations suivantes:

$$\begin{aligned} P &= QP_1 + R_1 \\ Q &= R_1P_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2P_3 + R_3 \\ &\cdots\cdots \\ R_{n-1} &= R_nP_{n+1} + R_{n+1} \end{aligned}$$

$R_{n+1}$ étant le dernier reste, c'est-à-dire une constante. Il résulte de là que si $R_i$ est de la forme $\lambda P + \mu Q$, $\lambda, \mu$ étant des polynômes, il en sera de même de $R_{i+1}$; or cela étant évident pour $R_1$ il s'en suit qu'il en sera de même pour tous les restes successifs et en particulier pour $R_{n+1}$; si on divise l'identité qui en résulte par la constante $R_{n+1}$ on a immédiatement une identité de la forme (5) et le théorème est démontré. Il est facile de voir, en outre, que les deux polynômes obtenus $A, B$ sont de degrés respectivement inférieurs à ceux de $P$ et $Q$.

$$\frac{A}{P}+\frac{B}{Q}=\frac{1}{PQ}$$

Si on considère la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{PQ}$, on aura donc:

$$\frac{f(x)}{PQ}=\frac{Af(x)}{P}+\frac{Bf(x)}{Q}$$

Supposons maintenant qu'on ait $F(x)=P_1P_2\cdots P_n$, $P_1P_2\cdots P_n$ étant

premiers entre eux deux à deux et considérons la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ ; on pourra écrire successivement, d'après ce qui précède :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{P_1} + \frac{f_1(x)}{P_2 P_3 \cdots P_n} = \frac{A_1}{P_1} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$$

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{A_2}{P_2} + \frac{f_2(x)}{P_3 P_4 \cdots P_n} = \frac{A_2}{P_2} + \frac{f_2(x)}{F_2(x)}$$

et ainsi de suite, ce qui conduit par addition à ce mode de décomposition

$$(5)\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{P_1} + \frac{A_2}{P_2} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{P_n}$$

$A_1\, A_2 \ldots A_n$ étant des polynômes entiers

Si $\frac{f(x)}{F(x)}$ n'a pas de partie entière, on pourra extraire celle de chacune des fractions qui compose le second membre ; elles devront se réduire entre elles et s'annuler identiquement puisque le second membre, comme le premier doit s'annuler pour $x$ infini : on peut donc supposer, que dans l'égalité précédente $A_1\, A_2 \ldots A_n$ sont de degrés respectivement moindres que $P_1, P_2 \ldots P_n$.

Dans ces conditions il est aisé de voir que la forme (5) ne peut être obtenue que d'une seule manière. En effet soit $B_1\, B_2 \ldots B_n$ un second système de polynômes tels qu'on ait

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{B_1}{P_1} + \frac{B_2}{P_2} + \cdots + \frac{B_n}{P_n}$$

D'où :
$$\frac{B_1 - A_1}{P_1} + \frac{B_2 - A_2}{P_2} + \cdots + \frac{B_n - A_n}{P_n} = 0$$

Multiplions par $P_1$ on voit immédiatement que $B_1 - A_1$ doit s'annuler pour toute racine de $P_1 = 0$. Si donc $B_1$ et $A_1$ sont l'un et l'autre de degré moindre que $P_1$, $B_1 - A_1$ sera identiquement nul. De même pour $B_2 - A_2$, $B_3 - A_3 \ldots B_n - A_n$. Remarquons enfin que chacune des fractions est nécessairement irréductible. Ce qui précède montre que la forme (5) pourra toujours être obtenue en résolvant un système d'équations linéaires.

Revenons à la question d'intégration. Nous pourrons par la théorie des racines égales, mettre $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = X_1^1 . X_2^2 . X_3^3 \ldots X_n^n$$

$X_i$ étant le produit des facteurs binômes correspondants aux racines d'ordre $i$ de $F(x) = 0$. Comme $X_i$ et $X_j$ sont premiers entre eux on pourra, d'une manière et d'une seule, mettre la fraction sous la forme

$$(6)'\quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} \quad + \frac{A_i}{X_i^i} + \quad + \frac{A_n}{X_n^n}$$

$X$ sera premier avec sa dérivée $X'$. On aura donc :

$$\lambda X' + \mu X^p = A$$

D'une manière générale soit la fraction $\frac{A}{X^p}$ où $X = 0$ n'a que des racines simples $X$ sera premier avec sa dérivée $X'$ ; et $X^p$ sera aussi premier avec $X'$. Il existera

donc deux polynômes $\lambda$ et $\mu$ tels qu'on ait identiquement

$$\lambda X' + \mu X^p = A \qquad \frac{A}{X^p} = \lambda . \frac{X'}{X^p} + \mu$$

Désignons en général par $\left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}$ la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ dont on a extrait la partie entière. Nous aurons :

$$\int \frac{A}{X^p}\, dx = -\left\{\frac{\lambda}{p-1} \cdot \frac{1}{X^{p-1}}\right\} + \frac{1}{p-1} \int \left\{\frac{\lambda'}{X^{p-1}}\right\} dx$$

C'est une formule de réduction ; on pourra de proche en proche réduire l'exposant jusqu'à la valeur $1$ ; on aura ainsi en définitive

$$\int \frac{A}{X^p}\, dx = \frac{M}{X^{p-1}} + \int \frac{N}{X}\, dx.$$

Si nous appliquons ce procédé de calcul à chacun des termes de l'équation (6) que nous ajoutions, d'une part les parties intégrées, d'autre part les fractions sous le signe $\int$, nous obtiendrons évidemment le résultat annoncé.

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = \frac{N}{G} + \int \frac{M}{H}\, dx$$

IV. — Intégration des fonctions algébriques. Après les fonctions rationnelles, on considère l'intégrale $\int \frac{f(x,y)}{F(x,y)}\, dx$, où $f$ et $F$ sont deux polynomes entiers en $x$ et $y$, $y$ étant d'ailleurs défini en fonction de $x$ par l'équation entière

$$\varphi(x,y) = 0 .$$

Nous rappellerons à ce sujet quelques propriétés importantes des courbes algébriques, relatives à leurs points doubles. Nous laisserons de côté les singularités d'ordre élevé, chaque point multiple d'ordre supérieur jouant, comme on le sait, dans la théorie des courbes planes le même rôle qu'un certain nombre bien déterminé de points doubles.

1° La classe d'une courbe d'ordre <u>m</u> qui ne possède aucun point double est égale à $m(m-1)$.

2° Si la courbe présente <u>d</u> points doubles et <u>r</u> points de rebroussement, sa classe est $m(m-1) - 2d - 3r$.

3° La courbe ne peut avoir plus de $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$ points doubles sans se décomposer en courbes d'ordre inférieur.

Ce dernier point est facile à établir. En effet, $\delta$ étant le nombre total de points doubles, et $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ étant le nombre total de points nécessaires pour déterminer une courbe d'ordre $m-2$, faisons passer une pareille courbe par les $\delta$ points doubles de la première et par un nombre de points simples égal à

$$\frac{(m-2)(m+1)}{2} - \delta :$$

Elle sera bien déterminée ; or, le nombre total de ses intersections avec la courbe donnée sera

$$2\delta + \frac{(m-2)(m+1)}{2} - \delta$$

chaque point double comptant pour deux intersections. D'ailleurs, ce nombre d'intersections ne peut dépasser $m(m-2)$ ; on doit donc avoir

$$\delta + \frac{(m-2)(m+1)}{2} \leqq m\,(m-2)$$

$$\delta \leqq \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

ce que nous voulions établir.

4° Il existe des courbes d'ordre $m$ ayant $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles ; on les nomme unicursales. Supposons qu'une courbe $(C)$ ne soit pas décomposable en courbes de degré moindre, et que les coordonnées de chaque point puissent s'exprimer par deux équations de la forme

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},$$

$f, \varphi, \psi$ étant trois polynômes entiers relativement au paramètre $t$. L'équation

$$A f(t) + B\,\varphi(t) + C\,\psi(t) = 0$$

fournira les points d'intersection de cette courbe avec la droite

$$Ax + By + C = 0.$$

L'ordre $m$ de $(C)$ sera donc égal au degré le plus élevé des trois polynômes $f, \varphi, \psi$. Si les deux équations

$$\begin{cases} x_0\,\varphi(t) = f(t) \\ y_0\,\varphi(t) = \psi(t) \end{cases}$$

ont une racine commune, le point $(x_0, y_0)$ sera sur la courbe ; si elles ont deux racines communes distinctes, $(x_0, y_0)$ sera un point double ordinaire ; si elles ont en commun une racine double, $(x_0, y_0)$ sera un point de rebroussement. Enfin, les points de contact des tangentes issues du point $(\alpha, \beta)$ seront donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ f(t) & \varphi(t) & \psi(t) \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0,$$

qui sera également vérifiée, quels que soient $\alpha$ et $\beta$ par les points de rebroussement. Si donc $n$ est la classe de la courbe, le degré de cette équation sera $n + r$. D'ailleurs ce degré est évidemment au plus égal à $2m-2$ ; car dans chaque différence $f\varphi' - \varphi f'$, les termes de degré le plus élevé se détruisent. On aura donc, $d$ étant le nombre des points doubles ordinaires,

$$n + r = m(m-1) - 2r - 2d \leqq 2m - 2.$$

D'où

$$r + d \geqq \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

On aura donc rigoureusement

$$r + d = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

Donc : Si les coordonnées de chaque point d'une courbe de degré $m$ peuvent s'exprimer

en fonction rationnelle d'un paramètre, cette courbe admet le nombre maximum de points doubles, c'est-à-dire $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Cette démonstration s'étend sans difficulté aux points multiples d'ordre supérieur, à tangentes distinctes ou confondues, à la condition de tenir compte de leur ordre de multiplicité.

5° La réciproque s'établit sans difficulté. Supposons que $(C)$ ait $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles; toute courbe de $(C')$ de degré $m'$ passant par ces points doubles coupera la courbe en un nombre $m\,m'$ de points, et comme chaque point double donne deux intersections il y aura

$$m\,m' - (m-1)(m-2)$$

points communs distincts des points doubles considérés. Si on adjoint à ces points doubles

$$m\,m' - (m-1)(m-2) - 1$$

points simples fixes de $(C)$, un seul point d'intersection restera libre; chacune des coordonnées de ce point sera fournie par une équation de degré $m\,m'$ dont on connaîtra à l'avance toutes les autres racines. Ces coordonnées s'exprimeront donc rationnellement en fonction des coefficients de $(C)$ et de $(C')$: si donc les coefficients de $(C')$ sont eux-mêmes rationnels par rapport à un paramètre $\lambda$ variable, le problème sera résolu. Si on veut, par exemple que les courbes $(C')$ forment un faisceau linéaire, c'est-à-dire que leur équation générale soit de la forme

$$S + \lambda\, S' = 0,$$

$S=0$, $S'=0$ étant les équations de deux d'entre elles, il faudra que le nombre de points choisis sur $(C)$ soit inférieur d'une unité au nombre total de points qui les détermineraient complètement; on devra donc avoir

$$m\,m' - (m-1)(m-2) + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = \frac{m'(m'+3)}{2},$$

équation qui, résolue, donne $m' = m-1$ ou $m' = m-2$.

On pourra donc achever la solution soit à l'aide d'un faisceau de courbes d'ordre $m-1$, soit à l'aide d'un faisceau de courbes d'ordre $m-2$.

Il est bien évident que dans tout ce qui précède on doit tenir compte des points à l'infini et aussi des points imaginaires.

Considérons, pour donner un exemple, la lemniscate

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

Elle est du quatrième ordre et admet trois points doubles, l'origine et les points cycliques: elle est donc unicursale. Pour exprimer les coordonnées de chaque point en fonction rationnelle d'un paramètre, considérons une conique passant par les trois points doubles; ce sera un cercle mené par l'origine; si nous l'obligeons à toucher la droite $y=x$, il aura deux points communs avec la lemniscate au point $O$, et sera déterminé à un point près. Son équation sera de la forme

$$x^2 + y^2 = t(y-x)$$

$t$ étant un paramètre variable. Les points d'intersection sont donnés par l'équation

$$t^2(y-x)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$$

et en supprimant la solution connue d'avance $y=x$, $t^2(y-x)+2a^2(y+x)=0$, d'où

$$\frac{x}{t^2+2a^2}=\frac{y}{t^2-2a^2}=-\frac{2a^2t}{2a^4+t^4}$$

formules qui résolvent la question.

V. — Intégration des irrationnelles du 2e degré. — Revenons au problème d'intégration. L'intégrale $\int \frac{f(x,y)}{F(x,y)}dx$ s'obtiendra par une substitution qui ramènera aux fonctions rationnelles si $\varphi(x,y)=0$ est l'équation d'une courbe unicursale. Le cas le plus simple est celui où la courbe est une conique. Son équation est alors de la forme

$$Ay^2+B^2y+C=0$$

$A$ étant une constante $B$ et $C$ deux fonctions de $x$, l'une du 1er l'autre du 2e degré; $y$ s'exprime alors rationnellement en fonction de $x$ et d'un radical du second degré $\sqrt{B^2-4AC}$; on saura donc ramener aux fonctions rationnelles les différentielles de la forme $f(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$, $f$ étant rationnelle du $x$ et du radical.

La substitution à faire se déterminera sans difficulté. La conique auxiliaire aura pour équation

$$y^2=ax^2+bx+c$$

1° Si le trinôme $ax^2+bx+c$ a ses racines réelles on peut la mettre sous la forme $a(x-\alpha)(x-\beta)$. Les droites $y=t(x-\alpha)$ passant par un point $(x=\alpha, y=0)$ situé sur la conique fourniront la substitution demandée. On aura

$$t^2(x-\alpha)=a(x-\beta) \qquad \frac{x-\alpha}{a}=\frac{x-\beta}{t^2}=\frac{\alpha-\beta}{t^2-a}$$

D'où :

$$x=\alpha-a\frac{\beta-\alpha}{t^2-a} \qquad y^2=\frac{a^2t^2(\beta-\alpha)^2}{(t^2-a)^2} \qquad y=\frac{at(\beta-\alpha)}{t^2-a}$$

et on sera bien ramené à la forme rationnelle

2° Si les racines du trinôme sont imaginaires $a$ et $c$ seront nécessairement positifs, sinon $y$ serait imaginaire pour toutes les valeurs de $x$. On posera alors

$$y=xt+\sqrt{c}$$

et on aura encore un faisceau de droites passant par un point de la courbe $x=0$, $y=\sqrt{c}$.

On peut encore dans ce cas remarquer que la courbe est une hyperbole et la couper par la droite mobile $y=x\sqrt{a}+t$ qui étant parallèle à une asymptote rencontrera constamment la conique en un point rejeté à l'infini.

3° Il peut arriver que $a$ soit nul dans ce cas il conviendra de prendre $y$ comme variable, $x$ s'exprimant rationnellement en fonction de $y$.

Pour donner un exemple très simple reprenons l'intégrale déjà rencontrée:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

La courbe $y^2 = 1+x^2$ est une hyperbole équilatère et la droite $y+x=t$ reste parallèle à l'une de ses asymptotes ; on fera donc la substitution

$$y+x=t \quad y-x=\frac{1}{t} \quad 2x=t-\frac{1}{t} \qquad 2\,dx=dt\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$y=\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

On aura donc :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dt\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t+\frac{1}{t}}=\int\frac{dt}{t}=L\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Remarque. Avant d'appliquer à l'intégrale $\int f(x,\sqrt{ax^2+2bx+c})\,dx$ l'une des substitutions qui précèdent, il y aura toujours lieu de transformer $f(x,y)$ pour en extraire une partie qui sera d'elle-même rationnelle. Nous verrons, dans la prochaine leçon comment doit être conduit le calcul.

---

# Quatorzième Leçon.

## Intégrales elliptiques et hyperelliptiques.

---

1. — Les intégrales hyperelliptiques sont de la forme $\int F(x\,y)\,dx$, $y$ étant la racine carrée d'un polynôme entier $R$ ; ce sont les plus simples après celles que nous avons considérées dans la dernière leçon ; on peut comme nous allons le voir les exprimer à l'aide d'un terme algébrique et d'un nombre fini d'intégrales spéciales.

Si nous remplaçons dans $f(x,y)$ toutes les puissances paires de $y$ par leurs valeurs, qui sont rationnelles, cette fonction prend la forme $\frac{A+By}{C+Dy}$. $A, B, C, D$ étant des polynômes entiers en $x$. On peut d'ailleurs multiplier les deux termes par $C-Dy$ ce qui donnera au dénominateur $C^2-D^2R$, c'est-à-dire un polynôme entier. On aura donc mis $f(x,y)$ sous la forme

$$F(x,y)=\frac{M+N\sqrt{R}}{P}$$

$M\ N\ P$ étant trois polynômes entiers. L'intégrale considérée contiendra donc une première partie qui se trouve mise en évidence $\int\frac{M}{P}dx$ et qui est l'intégrale d'une fonction rationnelle ; quant à la seconde partie en multipliant ses deux termes par $\sqrt{R}$ elle prend la forme

$$(1)\int\frac{f(x)}{F(x)\sqrt{R}}\,dx$$

$f(x)$ étant une fonction rationnelle irréductible.

Si l'on suppose $\frac{f(x)}{F(x)}$ décomposée en ses éléments simples on voit immédiatement qu'on sera conduit à des intégrales ayant l'une des formes suivantes :

$$(2)\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{R}} \qquad (3)\int \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}} \qquad (4)\int \frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^p}\,dx$$

il s'agit de savoir si ces intégrales sont essentiellement distinctes, ou au contraire réductibles les unes aux autres. — Pour résoudre cette question nous emploierons immédiatement la méthode de Mr. Hermite ; elle présente cet avantage de calculer d'une manière effective tous les éléments qui, dans cette réduction, peuvent s'obtenir sans résoudre l'équation $F(x) = 0$.

On pourra d'après la théorie des racines égales, et d'une seule manière mettre la fonction donnée sous la forme

$$(5)\ \frac{f(x)}{F(x)} = E(x) + \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \cdots + \frac{A_q}{X_q^q}$$

et il suffit pour cela de résoudre des systèmes d'équations linéaires. Nous supposons que chacune des fractions du 2ème membre est débarrassée de toute partie entière.

Ceci posé nous envisagerons l'intégrale $\int \frac{A}{X^n}\,dx$ et nous distinguerons deux cas :

1° $X$ est premier avec $R$. — Dans ce cas $X^n$ est aussi premier avec $R$ et il l'est également avec $\frac{dX}{dx} = X'$ puisque l'équation $X = 0$ n'a que des racines simples. Il existera donc un système des polynômes $\lambda$ et $\mu$ tel qu'on ait :

$$\lambda X^n + \mu R X' = A$$

D'où

$$\frac{A}{X^n} = \lambda + \mu R \frac{X'}{X^n}$$

Multiplions par $\frac{1}{\sqrt{R}}$ et intégrons

$$\int \frac{A}{X^n\sqrt{R}}\,dx = \int \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\,dx + \int \mu\sqrt{R}\cdot\frac{X'}{X^n}\,dx = -\frac{\mu\sqrt{R}}{(n-1)X^{n-1}} + \int \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\,dx + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{2\mu'\sqrt{R} + \frac{\mu R'}{\sqrt{R}}}{X^{n-1}}\,dx$$

On aura ainsi extrait une partie algébrique, et mis en évidence une intégrale de la forme $\int \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\,dx$ il restera ensuite l'intégrale

$$\int \frac{2\mu' R + \mu R'}{X^{n-1}\sqrt{R}}\,dx$$

On extrait, s'il y a lieu, la partie entière de la fraction sous le signe et il vient en définitive

$$\int \frac{A}{X^n\sqrt{R}}\,dx = -\frac{\mu\sqrt{R}}{(n-1)X^{n-1}} + \int \frac{C}{\sqrt{R}}\,dx + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{B}{X^{n-1}}\,dx$$

c'est un procédé de réduction ; on pourra l'appliquer jusqu'à $n = 1$ exclusivement ; si alors on élimine les intégrales intermédiaires on aura un résultat définitif de la forme

$$(6)\int \frac{A}{X^n\sqrt{R}}\,dx = \frac{P\sqrt{R}}{X^{n-1}} + \int \frac{Q}{\sqrt{R}}\,dx + \int \frac{S}{X\sqrt{R}}\,dx$$

$P\,Q\,S$ étant trois polynômes entiers le dernier d'un degré moindre que $X$.

2° $X$ n'est pas premier avec $R$. Observons d'abord que $R$ peut et

doit être supposé n'avoir que des facteurs simples, sinon on ferait sortir du radical un certain nombre de facteurs et le radical porterait en définitive sur un polynôme autre que $R$. Ceci posé soit $D$ le plus grand commun diviseur entre $X$ et $R$.

Posons $$X = Dy \qquad R = DS$$
$D$ et $y$ sont premiers entre eux puisque $X$ n'a que des facteurs simples, et il en est de même de $D$ et $S$.

On pourra alors et d'une seule manière écrire
$$\frac{A}{X^n} = \frac{B}{D^n} + \frac{C}{y^n}$$

La dernière fraction est de la forme considérée plus haut elle nous donnera un résultat tel que

$$(7) \quad \int \frac{C}{y^n\sqrt{R}}dx = \frac{\sqrt{R}}{y^{n-1}} + \int \frac{Q}{\sqrt{R}}dx + \int \frac{S}{y\sqrt{R}}dx$$

Passons à la première fraction. $D$ est premier avec $S$ et aussi avec $D'$ et il en est de même de $D^n$

On pourra donc déterminer $\lambda$ et $\mu$ de telle sorte que
$$B = \lambda D^n + \mu D'S$$
d'où : $$\int \frac{B}{D^n\sqrt{R}}dx = \int \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{R}} + \int \frac{\mu SD'}{D^n\sqrt{R}}dx = \int \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{R}} + \int \frac{\mu D'\sqrt{S}}{D^{n+\frac{1}{2}}}dx$$

La dernière intégrale peut se réduire (intégration par parties) et on a :
$$\int \frac{B}{D^n\sqrt{R}}dx = -\frac{2\mu\sqrt{S}}{(2n-1)D^{n-\frac{1}{2}}} + \int \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2n-1}\int \frac{2\mu'S + \mu S'}{D^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{S}}dx$$

La dernière intégrale peut s'écrire $\int \frac{2\mu'S + \mu S'}{D^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{S}}dx$, elle est de même forme que celle qui figure au premier membre, mais l'exposant a diminué d'une unité ; ici la formule de réduction s'appliquera jusqu'à $n = 1$ inclusivement et en éliminant les intégrales intermédiaires il viendra en définitive

$$(8) \quad \int \frac{B}{D^n\sqrt{R}}dx = \frac{P_1\sqrt{R}}{D^n} + \int \frac{Q_1\, dx}{\sqrt{R}}$$

la dernière intégrale du second membre se réduisant à la forme $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{R}}$ pour $n = 1$. Si maintenant nous réunissons les résultats (7) et (8) nous aurons un résultat de la forme

$$(9) \quad \int \frac{A}{X^n\sqrt{R}}dx = \frac{P\sqrt{R}}{DX^{n-1}} + \int \frac{Q\,dx}{\sqrt{R}} + \int \frac{S}{y\sqrt{R}}dx$$

Appliquons ces résultats à chacun des termes qui composent le développement (5) et faisons la somme des éléments analogues nous aurons trois termes :

1° Un terme algébrique de la forme $\frac{U\sqrt{R}}{G}$, où $G$ est le

quotient de $F(x)$ par le polynôme $H$ dont nous allons parler.

2° Un terme de la forme $\int \frac{V\,dx}{H\sqrt{R}}$, où $H$ est le produit des facteurs binômes de $F$ qui n'appartiennent pas à $R$, chacun d'eux étant pris avec l'exposant 1; $V$ étant d'un degré inférieur à celui de $H$, cette intégrale pourrait, si on savait résoudre l'équation $H=0$, se décomposer en une somme de termes de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \qquad \int \frac{(Px+Q)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{R}}$$

ces deux éléments fondamentaux, qui se réduiront l'un à l'autre dès qu'on introduira la notion de variables imaginaires, constituant l'intégrale hyperelliptique de 3e espèce.

3° un terme de la forme $\int \frac{W\,dx}{\sqrt{R}}$, où $W$ est un polynôme entier, qui sera, comme on va le voir, réductible au degré $p-2$, $p$ étant le degré de $R$. On sera donc conduit à de nouveaux éléments de la forme $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

Ce sont les intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce.(1)

11. Ces dernières intégrales ne sont pas distinctes comme nous allons le voir. On a en effet :

$$d(x^m\sqrt{R}) = \left[m x^{m-1}\sqrt{R} + \frac{x^m R'}{2\sqrt{R}}\right]dx = \frac{2 m x^{m-1} R + x^m R'}{2\sqrt{R}}\,dx$$

Si $p$ est le degré de $R$ le numérateur du 2e membre est du degré $m+p-1$ sans réduction possible du premier terme. On pourra donc écrire en développant ce polynôme :

$$d(x^m\sqrt{R}) = \left[\lambda_1 \frac{x^{m+p-1}}{\sqrt{R}} + \lambda_2 \frac{x^{m+p-2}}{\sqrt{R}} + \dots\dots\right]dx$$

Si on intègre et qu'on désigne par $I_b$ l'intégrale $\int \frac{x^b\,dx}{\sqrt{R}}$, il vient :

$$x^m\sqrt{R} = \lambda_1 I_{m+p-1} + \lambda_2 I_{m+p-2} + \dots\dots$$

Donc $\lambda_1$ étant différent de 0, $I_{m+p-1}$ pourra s'exprimer linéairement à l'aide des intégrales d'indice inférieur. Si on fait en particulier $m=0$, $I_{p-1}$ s'exprimera en fonction linéaire de $I_0\, I_1 \,..\, I_{p-2}$ et il en sera de même de toutes les intégrales d'indice supérieur ; donc enfin les seules intégrales distinctes de première et de 2e espèce sont

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \dots\dots \int \frac{x^{p-2}\,dx}{\sqrt{R}}.$$

On désigne sous le nom d'intégrales de première espèce les intégrales pour lesquelles l'exposant est inférieur à $\frac{p-1}{2}$ $p$ étant le degré de $p$; les intégrales d'exposant égal ou supérieur à $\frac{p-1}{2}$ sont celles de seconde espèce. On peut en donner une classification différente moins simple, mais plus en rapport avec les propriétés de ces intégrales (voir le cours de M. Picard p. 148).

Dem. 13

(1) Voir la note à la fin de la leçon, page 100.

Remarquons que lorsque $p$ est pair et égal à $\underline{2n}$ on peut abaisser ce degré d'une unité. Soit en effet

$$R = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n}$$

Supposons que $R = 0$ ait au moins une racine réelle $\alpha$; auquel cas il y en aura nécessairement une seconde $\beta$. (cette restriction disparaîtra d'elle-même quand nous aurons introduit la notion de variable imaginaire) Si nous faisons la substitution

$$\frac{x-\alpha}{t} = \frac{x-\beta}{1} = \frac{\beta-\alpha}{t-1}$$

qui est rationnelle nous aurons, $S$ étant un polynôme de degré $2n-2$.

$$R = (x-\alpha)(x-\beta)\,S = \frac{(\beta-\alpha)^2 t}{t-1} \cdot \frac{R_1(t)}{(t-1)^{2n-2}} = (\beta-\alpha)^2 \cdot \frac{tR_1(t)}{(t-1)^{2n}}$$

D'où $\sqrt{R} = (\beta-\alpha) \cdot \dfrac{1}{(t-1)^n} \cdot \sqrt{tR_1(t)}$

le radical portant sur un polynôme de degré $2n-1$.

Inversement, si $p$ est impair et égal à $2n-1$, il suffira de faire la substitution $x = \frac{1}{t}$ pour être ramené au cas où $p = 2n$.

Lorsque $p=1$ ou $p=2$, on est dans le cas que nous avons traité dans la dernière leçon ; la question se réduit comme nous l'avons dit à celle d'une fraction rationnelle. Les éléments simples sont les suivants

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

III. — Intégrales elliptiques. — Le cas où $p$ est égal à 3 ou à 4 est particulièrement important. Les éléments auxquels on est alors conduit prennent le nom d'Intégrales elliptiques. On les met sous une forme particulière que nous allons donner.

D'après ce qui précède si $p=3$ en posant $x = \frac{1}{t}$ on sera ramené au cas du 4e degré. Nous étudierons donc seulement le cas où $R$ est du 4e degré, Soit :

$$R = A\,(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

On peut d'abord à l'aide d'une substitution rationnelle de la forme

$$x = \frac{p+qt}{t+1} \qquad t = \frac{x-p}{q-x}$$

ramener $R$ à la forme bicarrée ; nous supposons $A, p, q$ réels, de plus $R$ est à coefficients réels, c'est-à-dire que les racines imaginaires, s'il y en a, sont conjuguées deux à deux. Les racines du polynôme transformées seront alors

$$\frac{a-p}{q-a},\ \frac{b-p}{q-b},\ \frac{c-p}{q-c},\ \frac{d-p}{q-d}$$

et pour que $R$ devienne bicarré il faut qu'on ait :

$$\frac{a-p}{q-a}+\frac{b-p}{q-b}=0 \quad \frac{c-p}{q-c}+\frac{d-p}{q-d}=0$$

Il est évident qu'on doit avoir $p-q\neq 0$. Si on élimine $p$ on trouve immédiatement

$$(1)\ \frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}-\frac{1}{q-c}-\frac{1}{q-d}=0 \qquad (2)\ \frac{1}{q-a}+\frac{1}{q-b}+\frac{2}{p-q}=0$$

L'équation qui donne $q$ est du 2e degré seulement, les termes en $q^3$, $-q^3$ se détruisant. Il s'agit de prouver qu'elle a toujours ses racines réelles. Or si $a, b$, sont réels cela est évident par la substitution car $a+\varepsilon, b-\delta$ donnent des résultats de signes contraires. — Reste le cas où on aurait deux couples de racines imaginaires conjuguées $a, b, c, d$. Dans ce cas mettons l'équation (1) sous la forme

$$f(q)=\left[2q-(a+b)\right](q-c)(q-d)-\left[2q-(c+d)\right](q-a)(q-b)$$

Le coefficient $q^2$ est $-(c+d-a-b)$. On a d'ailleurs

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-(c+d-a-b)\times\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Comme $b-a$ est purement imaginaire, ce résultat est de signe contraire au premier terme et les racines sont encore réelles. On a supposé ici $a+b-c-d\neq 0$. Si cette quantité était nulle on ferait simplement la substitution $x=t+\frac{a+b}{2}$.

Ainsi le radical se trouvera ramené à la forme bicarrée

$$A(t^2+\alpha)(t^2+\beta)=R$$

Reprenons la question dès le commencement ; nous savons que l'on sera immédiatement ramené à l'intégrale

$$\int\frac{f(t)}{F(t)\sqrt{R}}\,dt$$

$f$ et $F$ étant des polynômes entiers. Si dans ces deux polynômes on remplace $t^{2n+1}$ par $t\cdot t^{2n}$ on aura, après avoir multiplié les deux termes par $F(-t)$ :

$$\int\frac{A+Bt}{C\sqrt{R}}\,dt=\int\frac{A}{C\sqrt{R}}\,dt+\int\frac{B\,t\,dt}{C\sqrt{R}}$$

$A$ et $B$ étant des polynômes en $t^2$. La dernière intégrale se ramènera au cas d'un radical du 2e degré en posant $t^2=u$. Quant à la première elle sera réductible à une partie algébrique et aux intégrales :

$$\int\frac{dt}{\sqrt{R}} \quad \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{R}} \quad \int\frac{dt}{(t^2+q)\sqrt{R}} \quad \int\frac{dt}{(t^4+p'\,t^2+q)\sqrt{R}}$$

dont les deux dernières sont comme nous l'avons dit exprimables à l'aide des trois autres ; les trois premières sont de 1ère, de 2ème et de 3e espèce.

IV. — **Forme normale**. — On peut enfin opérer une dernière transformation du radical. Faisons la substitution :

$$t^2 = \lambda z^2 + \mu \qquad dt = \frac{\lambda z\, dz}{\sqrt{\lambda z^2+\mu}} \qquad \frac{dt}{\sqrt{R}} = \frac{\lambda z\, dz}{\sqrt{A(\lambda z^2+\mu+\alpha)(\lambda z^2+\mu+\beta)(\lambda z^2+\mu)}}$$

nous pourrons disposer de $\mu$ de manière à annuler l'une des trois quantités $\mu, \mu+\alpha, \mu+\beta$, et de telle sorte que les deux autres soient négatives si $A>0$, de signes contraires si $A<0$; dans tous les cas si on fait sortir du radical le facteur $z^2|A|$, il restera un radical de la forme

$$\rho = \sqrt{\lambda(\lambda z^2-g^2)(\lambda z^2-h^2)}$$

supposons par exemple $h^2<g^2$. Nous ferons $\lambda = h^2$ et le radical portera sur le trinôme

$$(h^2z^2-g^2)(z^2-1) = g^2(1-z^2)\left(1-\frac{h^2}{g^2}z^2\right) = g^2(1-z^2)(1-K^2z^2)$$

$K$ étant moindre que l'unité. On est ainsi ramené à la forme <u>normale</u> des intégrales elliptiques.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} \qquad \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} \qquad \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

en choisissant celles qui s'annulent pour $x=0$. $K$ reçoit le nom de <u>module</u> et $n$ celui de <u>paramètre</u>. Ces intégrales se sont présentées dans la rectification de l'ellipse. De là leur nom. On peut les mettre sous une autre forme qui les rapproche davantage de leur origine géométrique. Si on pose $x = \sin\varphi$. $\Delta\varphi = \sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}$, l'intégrale de 1ère espèce se réduit à $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$; Legendre désignait sous le nom d'intégrale de seconde espèce la suivante

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\varphi \Delta\varphi . d\varphi$$

qui, d'après nos définitions précédentes serait en réalité la somme de deux intégrales, l'une de première, l'autre de seconde espèce. On a en effet

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - K^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

---

Note. — On a vu (page 97) que l'intégrale $\int \frac{f(x)}{F(x)\sqrt{R}}dx$, peut être mise sous la forme (1) $\int \frac{f(x)}{F(x)\sqrt{R}}dx = \frac{U\sqrt{R}}{G} + \int\frac{V\,dx}{H\sqrt{R}} + \int\frac{W\,dx}{\sqrt{R}}$, $R$ est donné et de degré $p$, $G$ et $H$ sont connus, $U, V, W$, sont inconnus, mais on peut supposer $W$ du degré $p-2$ au plus, $V$ de degré inférieur à $H$. Sous ces conditions la forme (1) ne peut être obtenue que d'une manière. Cela revient évidemment à faire voir que, $A, B, C$ étant définis comme $U, V, W$, l'identité

$$\left(\frac{A\sqrt{R}}{G}\right)' + \frac{B}{H\sqrt{R}} + \frac{C}{\sqrt{R}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad (2)\ \frac{A'}{A} + \frac{R'}{2R} - \frac{G'}{G} + \frac{(B+CH)G}{AHR} \equiv 0$$

ne peut avoir lieu que si $A, B, C$ sont séparément nuls. Or soit $x-a$ un facteur binôme qui entre dans les polynômes $G, A, R, H, B+CH$ avec des exposants nuls ou positifs respectivement

égaux à $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ; les trois premiers termes de (2) fournissent un résidu égal à $\beta + \frac{\gamma}{2} - \alpha$. Si ce résidu est nul, comme $\gamma$ est au plus égal à 1, $R$ n'ayant que des racines simples, on aura $\alpha = \beta$. Sinon la dernière fraction devra admettre $x - \alpha$ en facteur une fois de plus au dénominateur qu'au numérateur : on aura donc $\beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \alpha = 1$. Or, il résulte de la définition de $H, G, R$ que l'un des exposants $\delta, \gamma$ est nul, l'autre étant au plus égal à 1. On a donc $\beta - \alpha \geqslant \varepsilon$, donc $\beta - \alpha$ est nul ou positif. Ainsi dans tous les cas $\beta \geqslant \alpha$ ; donc $A$ est divisible par $G$. Si on pose $A = GM$, (2) devient $RM' + \frac{MR'}{2} + C + \frac{B}{H} \equiv 0$. Elle exige évidemment $B = 0$. Comme d'autre part $C$ est au plus de degré $p-2$, $RM' + \frac{MR'}{2}$ au moins de degré $p-1$, $C$ doit être nul. On en conclut enfin $RM' + \frac{MR'}{2} = 0$, d'où $M\sqrt{R} = C^{te}$, ce qui exige $M = 0$. Le théorème est donc démontré. Il résulte de là que $U, V, W$ pourront être obtenus par la résolution d'équations linéaires.

# Quinzième Leçon.

## Intégration des fonctions transcendantes.

1. — Nous nous occuperons seulement des fonctions de la forme

$$e^{\omega x} F(x) \;,\quad F(\sin x, \cos x) \;,\quad e^{\omega x} F(\sin x, \cos x)$$

où $F$ désigne une fonction rationnelle, soit de $x$, soit de $\sin x$ et de $\cos x$. Nous aurons d'abord

$$\int e^{\omega x} F(x)\,dx = \int E(x) e^{\omega x} dx + \int R e^{\omega x} dx$$

$E$ étant un polynôme entier, $R$ une fraction rationnelle. Nous avons déjà obtenu la première intégrale (p. 81) :

$$\int E(x) e^{\omega x} dx = e^{\omega x} \left[ \frac{E(x)}{\omega} - \frac{E'(x)}{\omega^2} + \frac{E''(x)}{\omega^3} - \dots\dots + (-1)^p \frac{E^{(p)}(x)}{\omega^{p+1}} \right]$$

$p$ étant le degré de $E$. Passons à la fraction rationnelle $R$ qui est maintenant sans partie entière. Supposons-la décomposée en fractions irréductibles et sans partie entière de la forme

$$(1) \quad R(x) = \frac{A_1}{X_1} + \frac{A_2}{X_2^2} + \dots\dots + \frac{A_q}{X_q^q}$$

$X_i$ étant le produit des facteurs binômes qui entrent au dénominateur de $R$ avec l'exposant $i$. Nous sommes ramenés à des intégrales de la forme

$$\int \frac{A}{X^n} e^{\omega x} dx,$$

où $X$ est supposé premier avec sa dérivée $X'$. Dans ces conditions $X^n$ sera aussi premier avec $X'$ et il existera deux polynômes $\lambda$ et $\mu$ tels qu'on ait identiquement :

$$\lambda X^n + \mu X' = A$$

D'où :

$$\frac{A}{X^n} = \lambda + \mu \frac{X'}{X^n}$$

et par suite

$$\int \frac{A}{X^n} e^{\omega x} dx = \int \lambda e^{\omega x} dx + \int \mu \frac{X'}{X^n} e^{\omega x} dx$$

la première intégrale du second membre s'obtiendra sans difficulté ; quant à la seconde, on a :

$$\int \mu e^{\omega x} \frac{X'}{X^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\mu e^{\omega x}}{X^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\mu' + \omega\mu}{X^{n-1}} e^{\omega x} dx$$

C'est une formule de réduction. On pourra la faire servir jusqu'à $n=1$ exclusivement et on aura en définitive

$$\int \frac{A}{X^n} e^{\omega x} dx = \int \mathcal{A} e^{\omega x} dx + \int \frac{\mathcal{B}}{X} e^{\omega x} dx + \frac{\mathcal{C} e^{\omega x}}{X^{n-1}},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant des polynômes entiers. Si on applique ce résultat à chacun des termes qui composent $R(x)$ on aura un résultat de la forme

$$(2) \quad \int F(x) e^{\omega x} dx = H e^{\omega x} + \frac{G e^{\omega x}}{P} + \int \frac{K e^{\omega x}}{Q} dx$$

$P$ étant le plus grand commun diviseur entre le dénominateur de $F(x)$ et sa dérivée ; $Q$ le quotient de ce dénominateur par $P$ ; ces deux polynômes peuvent être déterminés a priori, par de simples divisions. On peut d'ailleurs supposer que les deux fractions $\frac{G}{P}$, $\frac{K}{Q}$ n'ont pas de partie entière, car même la partie entière de $\frac{K}{Q}$ fournirait par intégration un terme de même forme que $He^{\omega x}$ et qu'on peut y supposer compris. Dans ces conditions la forme (2) donnée à l'Intégrale ne peut être obtenue que d'une manière. Si en effet on différentie on doit avoir identiquement, en divisant par $e^{\omega x}$ :

$$(3) \quad F(x) = H\omega + H' + \omega \frac{G}{P} + \left(\frac{G}{P}\right)' + \frac{K}{Q}$$

Supposons qu'on ait obtenu un autre système $H_1, G_1, K_1$ de polynômes répondant à la question. En identifiant on aurait une identité de la forme

$$M\omega + M' + \omega \frac{N}{P} + \left(\frac{N}{P}\right)' + \frac{L}{Q} = 0$$

en supposant $M = H - H_1$, $N = G - G_1$, $L = K - K_1$, $N$, $L$, étant alors de degrés respectivement moindres que $P$ et $Q$. Dans ces conditions comme $\frac{N}{P}$, $\left(\frac{N}{P}\right)'$, $\frac{L}{Q}$ n'ont pas de partie entière on aura d'abord :

$$M\omega + M' \equiv 0$$

Mais cette égalité revient à la suivante $M = Ce^{-\omega x}$, où $C$ est une constante et si on développe l'exponentielle en série on en conclut que $C$ doit être nul. On aura donc d'abord $H = H_1$; et l'identité se réduira à

$$\omega \frac{N}{P} + \left(\frac{N}{P}\right)' + \frac{L}{Q} \equiv 0 ,$$

qu'on peut écrire

$$\omega + \frac{N'}{N} - \frac{P'}{P} \equiv - \frac{L\,P}{N\,Q}$$

Or soit <u>a</u> une racine réelle ou imaginaire de $P=0$, $\alpha$ le degré de multiplicité; le facteur binôme $x-a$ figurera dans $N, L$ avec des exposants $\alpha', \alpha''$ positifs ou nuls et dans $Q$ avec l'exposant I. Cela résulte des définitions de $P$ et $Q$. Dans le premier membre on aura la fraction simple $\frac{\alpha'-\alpha}{x-a}$; Supposons $\alpha'-\alpha \neq 0$. Alors le second membre devra contenir $x-a$ au dénominateur avec l'exposant I; on aura donc

$$\alpha' + 1 - \alpha'' - \alpha = 1 \quad d'où \quad \alpha' = \alpha + \alpha''$$

Donc si $\alpha'$ n'est pas égal à $\alpha$, il lui sera supérieur; donc $N$ doit admettre tous les facteurs de $P$ et chacun d'eux autant de fois au moins que $P$. Mais $N = G - G_1$ étant de degré moindre que $P$, on aura nécessairement $G \equiv G_1$ et l'identité se réduit à $L \equiv 0$ d'où $K \equiv K_1$.

D'après cela, les polynômes $H, G, K$ pourront être obtenus par la résolution d'un système d'équations linéaires qui admettra une solution et une seule. La solution précédente est aussi complète que le comporte la nature de la question. En effet la dernière intégrale $\int \frac{K}{Q} e^{\omega x} dx$ est équivalente à une somme d'intégrales de la forme

$$\int \frac{e^{\omega x}}{x-a}\,dx \qquad \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,e^{\omega x}\,dx$$

et on démontre que ces deux éléments ne peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre fini de fonctions que nous connaissions actuellement. On peut les exprimer l'un et l'autre à l'aide d'une transcendante nouvelle appelée : Logarithme intégral.

II. — 1° Considérons maintenant les intégrales de la forme

$$\int F(\sin x, \cos x)\,dx$$

où $F$ est une fonction rationnelle des deux variables $\sin x, \cos x$. Si on fait la substitution

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \qquad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$F(\sin x \cos x)\,dx$ prendra la forme $\mathcal{F}(t)\,dt$, $\mathcal{F}(t)$ étant une fonction rationnelle; nous avons déjà indiqué ce résultat antérieurement.

On peut dans bien des cas opérer plus simplement. Considérons, par exemple,

$$\int \frac{m \cos x + n \sin x + p}{a \cos x + b \sin x + c}\,dx$$

Il sera préférable ici de faire la substitution

$$a \cos x + b \sin x + c = u$$

$$-a \sin x + b \cos x = \frac{du}{dx}$$

Cherchons à déterminer trois constantes $\lambda\ \mu\ \nu$ telles qu'on ait

$$m \cos x + n \sin x + p = \lambda u + \mu \frac{du}{dx} + \nu$$

Il est clair qu'on aura décomposé ainsi l'intégrale en trois intégrales partielles très simples.

Or, on a immédiatement

$$\lambda a + \mu b = m \quad \lambda b - \mu a = n \quad \lambda c + \nu = p$$

d'où :

$$\lambda = \frac{nb + ma}{a^2+b^2} \qquad \mu = \frac{mb - na}{a^2+b^2} \quad \nu = p - \frac{c(ma+nb)}{a^2+b^2}$$

D'où enfin :

$$\int \frac{m \cos x + n \sin x + p}{a \cos x + b \sin x + c}\,dx = \frac{nb+ma}{a^2+b^2}x + \frac{mb-na}{a^2+b^2} \operatorname{Log}(a\cos x + b \sin x + c) + \frac{(a^2+b^2)p - c(ma+nb)}{a^2+b^2}\int \frac{dx}{a\cos x + b \sin x + c}$$

Quant à la dernière intégrale, si on y fait $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ elle devient

$$\int \frac{dx}{r\cos(x-\varphi) + c}$$

et s'obtient immédiatement en posant $tg\,\frac{x-\varphi}{2} = t$.

2° Un cas particulier intéressant est celui où $F$ est un polynôme entier en $\sin x$, $\cos x$; dans ce cas si on pose

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

puis qu'on remplace après les calculs effectués $e^{mx\sqrt{-1}}$ par $\cos mx + i \sin mx$, on sera conduit à une somme d'intégrales où il ne figurera point d'imaginaires et qui seront de la forme :

$$\int \cos mx\,dx \qquad \int \sin mx\,dx$$

Ces intégrales sont égales respectivement à :

$$\frac{1}{m}\sin mx, \quad \frac{1}{m}\cos mx$$

On peut opérer autrement ; en effet la fonction F se réduit dans le cas actuel à une somme de termes de la forme $\sin^p x \cos^q x$ où $p$ et $q$ sont des entiers positifs. Or on peut donner des formules de réduction de l'intégrale

$$\varphi(p,q) = \int \sin^p x \cos^q x \, dx$$

en supposant, pour plus de généralité, que $p$ et $q$ soient entiers, mais de signes quelconques. Nous pouvons écrire

$$\varphi(p,q) = \int \sin^{p-1} x \cos^q x \cdot \sin x \, dx = -\frac{1}{q+1}\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x + \frac{p-1}{q+1}\int \cos^{q+1} x \sin^{p-2} x \cos x \, dx$$

$$(q+1)\,\varphi(p,q) = -\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x + (p-1)\,\varphi(p+2, q-2)$$

On a aussi

$$\varphi(p-2, q+2) = \int \cos^q x \sin^{p-2} x (1-\sin^2 x)\, dx = \varphi(p-2, q) - \varphi(p, q)$$

D'où :

$$(1) \quad (p+q)\,\varphi(p,q) = -\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x + (p-1)\,\varphi(p-2, q)$$

On aurait de même

$$\varphi(p,q) = \int \sin^p x \cos^{q-1} x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{p+1}\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x + \frac{q-1}{p+1}\int \sin^{p+1} x \cos^{q-2} x \sin x \, dx$$

$$(p+1)\,\varphi(p,q) = \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x + (q-1)\,\varphi(p+2, q-2)$$

D'ailleurs

$$\varphi(p+2, q-2) = \int \sin^p x \cos^{q-2} x (1-\cos^2 x)\, dx = \varphi(p, q-2) - \varphi(p, q)$$

D'où :

$$(2) \quad (p+q)\,\varphi(p,q) = \sin^{p+1} x \cos^{q-1} x + (q-1)\,\varphi(p, q-2)$$

Les relations (1) et (2) permettent de diminuer de deux unités l'un ou l'autre des exposants $p, q$. Ce seront des formules de réduction si ces exposants sont positifs. Dans le cas où $p, q$ seraient négatifs, on appliquera l'une des formules suivantes, obtenues en remplaçant $p$ par $p+2$ dans (1), $q$ par $(q+2)$ dans (2).

$$(3) \quad (p+1)\,\varphi(p,q) = \sin^{p+1} x \cos^{q+1} x + (p+q+2)\,\varphi(p+2, q)$$

$$(4) \quad (q+1)\,\varphi(p,q) = -\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x + (p+q+2)\,\varphi(p, q+2)$$

formules qui permettent d'augmenter à volonté de deux unités l'un ou l'autre des deux exposants. On opèrera alors de la manière suivante

Supposons $p$ positif, en appliquant la formule (1) on sera ramené à $\varphi(1,q)$ ou $\varphi(0,q)$ suivant que $p$ sera impair ou pair. - Si $p$ est négatif on appliquera la formule (3) et on sera ramené à $\varphi(0,q)$ ou à $\varphi(-1,q)$. On pourra faire ensuite la réduction du second exposant à l'aide des formules (2) ou (4) et on sera ramené enfin à l'une des intégrales suivantes

$$\varphi(0,0) = \int dx = x \qquad \varphi(1,0) = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\varphi(0,1) = \int \cos dx = \sin x \qquad \varphi(1,1) = \int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\varphi(0,-1) = \int \frac{dx}{\cos x} = L \; tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \qquad \varphi(1-1) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -L \cos x$$

$$\varphi(-1,0) = \int \frac{dx}{\sin x} = L \, tg \frac{x}{2}$$

$$\varphi(-1,1) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = L \sin x$$

$$\varphi(-1,-1) = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = L \, tg \, x$$

Remarque. Dans ces dernières formules la présence d'un exposant $-1$, donne lieu à un logarithme; on doit en conclure que lorsqu'un des exposants $p$, $q$ sera impair et négatif il devra être impossible de le rendre positif, et vice versa, en appliquant les formules de réduction. C'est ce qu'on vérifie aisément sur les formules (1), (2), (3), (4) dans lesquelles on fait respectivement $p=1$, $q=1$, $p=-1$, $q=-1$.

3° Il est commode de traiter par un procédé de réduction spécial le cas où $p+q=0$; d'ailleurs deux des formules précédentes deviennent alors illusoires. Considérons donc l'intégrale $u_n = \int tg^n x \, dx$

Si on intègre l'égalité évidente :

$$\frac{d \cdot tg^n x}{dx} = n \cdot \frac{tg^{n-1} x}{\cos^2 x} = n \, tg^{n-1} x + n \, tg^{n+1} x$$

on a :

$$tg^n x = n u_{n-1} + n u_{n+1}$$

C'est la formule de réduction ; en y faisant $n = p-1$ il vient :

$$(5) \quad (p-1) u_p = tg^{p-1} x - (p-1) u_{p-2}$$

Si on y fait au contraire $n = p+1$

$$(6) \quad (p+1) u_p = tg^{p+1} x - (p+1) u_{p+2}$$

La forme (5) conviendra si $p > 0$, la forme (6) si $p < 0$. Si $p=1$ la formule (5) devient illusoire; de même la formule (6) pour $p=-1$. On ne pourra donc jamais, à l'aide de ces formules, passer d'un exposant négatif impair à un exposant positif ou inversement. On sera ramené à l'une des intégrales

$$u_0 = \int dx = x \qquad u_1 = \int tg \, x \, dx = -L \cos x \qquad u_{-1} = \int cotg \, x \, dx = L \sin x$$

III - Passons aux intégrales $\int F(\sin x, \cos x) e^{\omega x} dx$

où $F$ est encore une fonction rationnelle. On pourrait donner une méthode de détermination régulière pour ces intégrales ; mais il faudrait pour cela recourir à un procédé de décomposition de $F(\sin x \cos x)$ en elements simples, analogue à celui qui convient à une fonction rationnelle de $x$ ; or cela ne peut se faire d'une manière simple qu'en recourant à des exponentielles à exposants imaginaires (voir Hermite. Cours d'analyse de l'École Polytechnique 1874). Nous considérerons seulement le cas où $F$ est un polynome entier. On est alors ramené à une somme d'intégrales de la forme

$$\int \cos mx . e^{\omega x} dx \qquad \int \sin mx . e^{\omega x} dx$$

nous avons appris à calculer ces intégrales et nous avons trouvé (page 81)

$$\int e^{\omega x} \cos mx \, dx = \frac{e^{\omega x}}{m^2+\omega^2} (\omega \cos mx + m \sin mx)$$

$$\int e^{\omega x} \sin mx \, dx = \frac{e^{\omega x}}{m^2+\omega^2} (\omega \sin mx - m \cos mx)$$

# Seizième Leçon.

## Propriétés des Intégrales définies.

I. La définition de l'intégrale définie, considérée comme limite de sommes, nous a conduits immédiatement aux propriétés exprimées par les relations

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f[a+\theta(b-a)]$$

Nous savons de plus que, $F(x)$ étant une fonction primitive de $f(x)$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Nous compléterons d'abord ces premiers résultats en démontrant deux théorèmes, appelés de la moyenne, qui sont d'un usage fréquent. Ils concernent les intégrales

$$J = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx,$$

$f(x)$, $\varphi(x)$ étant deux fonctions continues. — On a alors, par définition :

$$J = \lim \Sigma f(x_i)\varphi(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Premier théorème de la moyenne. — Supposons que $\varphi(x)$ conserve entre $a$ et $b$ un signe constant, + par exemple, et soit, pour fixer les idées $b > a$. Chacun des facteurs $\varphi(x_i)(x_i - x_{i-1})$ est positif ; si donc on désigne par $m$ et $M$ les limites de la fonction $f(x)$ dans le même intervalle, on aura

$$m \Sigma \varphi(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \Sigma f(x_i)\varphi(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M \Sigma \varphi(x_i)(x_i - x_{i-1});$$

Il vient quand on passe à la limite

$$J = \mu \int_a^b \varphi(x)dx$$

$\mu$ étant un nombre compris entre $m$ et $M$. D'ailleurs $f(x)$, étant continu, atteint la valeur $\mu$ pour une certaine valeur $\xi$ de $x$, de l'intervalle $(a\, b)$ et on peut écrire :

$$(1) \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$$

égalité qui constitue le premier théorème de la moyenne.

Second théorème de la moyenne. — Supposons maintenant que dans l'intervalle $(a, b)$, $\varphi(x)$ conservant encore un signe constant, varie en outre constamment dans le même sens, par exemple en décroissant. Dans ce cas les multiplicateurs

$$\varphi(a), \varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots\ldots \varphi(x_{n-1})$$

formeront une suite de termes positifs, stationnaire ou décroissante. On aura donc, en vertu du lemme d'Abel dont nous avons fait usage dans la théorie des séries entières :

$$(2) \qquad \Sigma f(x_i)\varphi(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \mu\, \varphi(a)$$

$\mu$ étant intermédiaire entre la plus petite et la plus grande des sommes

$$s_1 = f(a)(x_1 - a)$$
$$s_2 = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$s_3 = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$$

Si on désigne par $\varepsilon$ un nombre positif quelconque, on peut prendre $n$ assez grand pour que l'oscillation de $f(x)$ dans chaque intervalle soit moindre que $\frac{\varepsilon}{b-a}$ ; or si on pose

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

On aura évidemment

$$|s_K - F(x_K)| \leq \frac{x_K - a}{b - a}\varepsilon < \varepsilon$$

Donc $\mu$ sera compris entre la plus grande et la plus petite des quantités

$$F(x_1) - \varepsilon, F(x_2) - \varepsilon, \ldots\ldots F(x_n) - \varepsilon$$

$$F(x_1) + \varepsilon, F(x_2) + \varepsilon, \ldots\ldots F(x_n) + \varepsilon$$

Supposons alors que $F(x)$ soit astreint à demeurer, pour $x$ compris entre $a$ et $b$ entre deux nombres fixes $A\, B$ ; $\mu$ sera compris entre $A - \varepsilon$, $B + \varepsilon$ et l'égalité (2) donnera en passant à la limite :

$$A\,\varphi(a) \leq \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leq B\,\varphi(a)$$

D'autre part $F(x)$ est une fonction continue de $x$ et par suite pour une valeur $\xi$ appartenant à l'intervalle $(a\,b)$, $F(\xi)$ atteint toute valeur appartenant à $(A, B)$ on aura donc :

$$(5)\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

Cette relation due à M^r Bonnet, constitue le second théorème de la moyenne.

On peut lui donner une forme un peu plus générale, due à M. Weierstrass. Supposons que $\varphi(x)$ varie toujours dans le même sens, mais puisse changer de signe. Si on pose

$$\varphi(x) - \varphi(b) = \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ remplira les deux conditions exigées pour la fonction $\varphi(x)$ dans l'équation précédente, et on aura

$$\int_a^b f(x)\left[\varphi(x) - \varphi(b)\right]dx = \left[\varphi(a) - \varphi(b)\right]\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

$$\text{ou}\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

11. On peut étendre la notion de l'intégrale définie et s'affranchir de certaines conditions qu'on a jusqu'ici supposé remplies. Et d'abord si la fonction $f(x)$ en restant finie et déterminée cessait d'être continue pour un nombre limité de valeurs $\alpha, \beta, \gamma$ de $x$, la somme $\Sigma f(x_i)\,\delta x_i$ n'en aurait pas moins une limite parfaitement déterminée et finie, indépendante du mode de subdivision de l'intervalle $(a\,b)$; nous continuerons à représenter cette limite par $\int_a^b f(x)\,dx$. Il est clair que dans ces conditions l'intégrale sera encore une fonction continue de sa limite supérieure, fonction qui aura pour dérivée $f(x)$ ; on a ainsi un exemple important de fonction parfaitement déterminée, finie et continue dans un intervalle donné, et admettant, pour certaines valeurs de la variable une dérivée discontinue.

Cas où la fonction devient infinie. Supposons maintenant que $f(x)$ devienne infini pour une valeur $\alpha$ de $x$ appartenant à l'intervalle $(a\,b)$. La somme

$$\int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

a un sens parfaitement précis pour toute valeur de $\varepsilon\ \varepsilon'$ positive et suffisamment petite. Or il peut se faire que $\varepsilon\,\varepsilon'$ tendant vers zéro, chacune des deux intégrales ait une limite finie et déterminée. S'il en est ainsi, nous représenterons la somme de ces deux limites par $\int_a^b f(x)\,dx$. On est

ainsi conduit à chercher dans quel cas l'intégrale

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

aura une limite : on ramène à ce cas celui de $\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$ en changeant le signe de l'intégrale. Il est impossible de donner une règle générale pour résoudre cette question : il est ordinairement commode de comparer l'intégrale à une autre pour laquelle on sache à quoi s'en tenir. Observons que $b$ peut être supposé assez voisin de $a$ pour que $f(x)$ ne change pas de signe entre $a$ et $b$. Soit alors $\varphi(x)$ une fonction qui ait aussi, entre $a$ et $b$ un signe constant. Posons :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x).$$

Nous aurons, d'après le premier théorème de la moyenne

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx = \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\psi(x)\, dx$$
$$= \psi(\xi)\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\, dx$$

puisque $\varphi(x)$ conserve un signe constant

Supposons que $\psi$ qui ne peut changer de signe demeure compris entre deux nombres de même signe $A$ et $B$ dont aucun ne soit nul ; il est évident, d'après l'égalité précédente que les deux intégrales

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \qquad\qquad \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\, dx$$

tendront ensemble vers des limites finies ou deviendront ensemble infinies

On prend ordinairement

$$\varphi(x) = (x-a)^p,$$

et on a $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{p+1}\left[(b-a)^{p+1} - \varepsilon^{p+1}\right]$

Quand $\varepsilon$ tend vers zéro, cette intégrale devient infinie si $p+1$ est négatif ; elle a une limite finie si $p+1$ est positif. Dans le cas où $p=-1$ l'intégrale est $L\frac{b-a}{\varepsilon}$ et devient encore infinie pour $\varepsilon=0$. On est ainsi conduit à la règle suivante :

On cherche à mettre la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = (x-a)^p\, \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une fonction qui ne soit ni nulle ni infinie pour $x=a$.

Pour qu'il y ait une limite finie, il faut et il suffit qu'on ait $p+1>0$.
Exemple. Soit l'intégrale elliptique

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad k^2<1$$

Voyons ce qu'elle devient pour $x=1$. On a ici

$$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

d'où $\quad p=-\frac{1}{2} \qquad p+1>0 \qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$

Il y a convergence et le symbole

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

a un sens bien déterminé : on l'appelle l'intégrale complète. Au contraire, l'intégrale de troisième espèce

$$\int_0^x \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

devient infinie quand sa limite supérieure tend vers $a$. Le même raisonnement montre que l'intégrale ultraelliptique

$$\int_\alpha^\beta \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}}$$

a une valeur finie quand une de ses limites devient égale à l'un des nombres $a, b, \ldots l$, tandis que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-x_0)^n\sqrt{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}}$$

devient infinie quand $\alpha$ ou $\beta$ tendent vers $x_0$. $(n>0)$

Remarque. — Il peut arriver que les deux intégrales

$$\int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \int_{\alpha-\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

n'ayant ni l'une ni l'autre une limite finie, leur somme en ait une et dans ce cas c'est encore cette somme qui serait par définition la valeur de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$. — Mais cela n'arrivera pas en général ; le plus souvent il y aura indétermination, si on laisse $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ absolument indépendants l'un de l'autre en les faisant tendre vers 0. Cherchons par exemple

à donner un sens à l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z}$. $\frac{1}{z}$ devenant infini pour $z=0$. On a, en posant $z=-z'$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dz}{z} = \int_{1}^{\varepsilon} \frac{dz'}{z'} = L\,\varepsilon\,, \int_{\varepsilon'}^{1} \frac{dz}{z} = L\,\frac{1}{\varepsilon'}$$

Donc la somme des deux intégrales est $L\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$, qui est évidemment indéterminée. - Lorsque cette circonstance se présente il arrive ordinairement que l'indétermination disparaît, comme cela a lieu ici en faisant $\varepsilon' = b\,\varepsilon$, $b$ étant une constante. La valeur de cette somme, correspondant à $b=1$, est ce que Cauchy appelle la valeur principale de l'Intégrale. - Cette valeur principale est 0 dans l'exemple précédent.

III. Cas où une des limites devient infinie. — Nous avons maintenant défini le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ pour toute fonction $f(x)$ qui ne devient discontinue ou infinie qu'un nombre limité de fois dans l'intervalle $ab$. Mais $a$ et $b$ sont supposés finis ; nous allons nous affranchir de cette dernière restriction. Si quand $b$, par exemple, croît indéfiniment l'intégrale tend vers une valeur finie, on représentera cette limite par le symbole

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Pour reconnaître s'il en est ainsi, on compare encore $f(x)$ à une fonction connue $\varphi(x)$. Comme on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi(\xi) \int_a^b \varphi(x)\,dx\,,$$

si $\psi(x)$ reste compris entre deux nombres fixes, de même signe et différents de zéro, les intégrales.

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

deviennent infinies en même temps pour $b$ infini ou conservent en même temps une valeur finie.

Supposons que $f(x)$ conserve à partir d'un certain moment un signe constant. On prend la valeur correspondante de $x$ pour limite inférieure, ce qui revient à retrancher de l'intégrale une quantité finie et fixe. Alors $\psi(x)$ ne changeant pas de signe, il en sera de même de $\varphi(x)$. De plus l'intégrale ne pourra que devenir infinie, et non osciller entre deux valeurs déterminées.

On prend ordinairement

$$\varphi(x) = x^p$$

et l'on a
$$\int_a^b x^p\,dx = \frac{1}{p+1}\left(b^{p+1} - a^{p+1}\right).$$

Quand $b$ croît indéfiniment, le second membre devient infini si $p+1$ est positif ; il a une limite finie si $p+1$ est négatif. Dans le cas où $p=-1$, l'intégrale $L\frac{b}{a}$ devient infinie. On est donc conduit à la règle suivante : On pose

$$f(x) = x^p \psi(x)$$

en cherchant à déterminer $p$ de façon que $\psi$ conserve une valeur finie quand $x$ croît indéfiniment. La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale conserve une valeur finie est qu'on ait $p+1 < 0$

Exemples. 1° Soit l'intégrale d'une fraction rationnelle $\int_a^b \frac{f(x)}{F(x)}dx$, $q$ et $p$ les degrés de $f$ et $F$.

La quantité

$$\frac{x^p}{x^q} \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \psi(x)$$

conserve une valeur finie quand $x$ croît indéfiniment ; il faut donc et il suffit pour que l'intégrale soit convergente que l'on ait

$$q - p + 1 < 0$$

ou, puisque $q$ et $p$ sont entiers,

$$q \doteq p - 2$$

2° Considérons l'intégrale hyperelliptique de première catégorie

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R}}$$

$R$ étant de degré $2n-1$. On a

$$\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{x^m} \quad \frac{x^m}{\sqrt{R}} = \psi(x)$$

$$\frac{x^m}{\sqrt{R}} = x^{m-n+\frac{1}{2}}\psi(x)$$

$\psi(x)$ répondant aux conditions imposées ; d'où la condition

$$m - n + \frac{3}{2} < 0$$

$$m < \frac{2n-3}{2}$$

Les intégrales que nous avons nommées de première espèce se distinguent donc par cette propriété de conserver une valeur finie pour toutes les valeurs finies ou infinies de leur limite supérieure. Celles de seconde espèce deviennent infinies avec

la variable, celles de troisième espèce pour des valeurs finies de cette variable.

Examinons le cas où $f(x)$ change de signe un nombre infini de fois pour des valeurs de $x$ supérieures à un nombre donné, si grand que soit ce nombre. A partir d'un certain moment, l'intégrale pourra se subdiviser en intégrales partielles pour lesquelles la fonction conservera un signe constant

$$\int_{\alpha}^{\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{\alpha_n}^{b} f(x)\,dx$$

Si $b$ augmente indéfiniment, on a une série

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n + \dots$$

où $I_n$ représente l'intégrale $\int_{\alpha}^{\alpha_n} f(x)\,dx$. Les termes de cette série sont alternés de signe ; pour qu'elle soit convergente, il faut que $I_n$ tende vers zéro et il suffit que les termes décroissent continuellement à partir d'un certain rang.

Exemple.— Soit $\int_0^{l} \frac{\sin bx}{x}\,dx$

L'élément différentiel reste fini dans l'intervalle considéré quelque grand que soit $l$. $\sin bx$ a une infinité de racines

$$bx = K\pi \qquad x = \frac{K\pi}{b}$$

On a donc
$$I_n = \int_{(n-1)\frac{\pi}{b}}^{n\frac{\pi}{b}} \frac{\sin bx}{x}\,dx$$

Faisons le changement de variable

$$x - \frac{n\pi}{b} = \frac{z}{b} \qquad dx = \frac{dz}{b}$$

nous aurons
$$I_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(z+n\pi)}{z+n\pi}\,dz$$

Le module de $I_{n+1}$ est inférieur à $\frac{1}{n}$ donc $I_{n+1}$ tend vers 0 quand $n$ augmente indéfiniment.

On a d'autre part

$$|I_{n+1}| = \int_0^{\pi} \frac{\sin z\,dz}{z+n\pi} \qquad |I_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin z\,dz}{z+(n-1)\pi}$$

D'où

$$|I_{n+1}| - |I_n| = \int_0 \left(\frac{1}{z+n\pi} - \frac{1}{z+(n-1)\pi}\right) \sin z\,dz$$

et les éléments de cette dernière intégrale sont évidemment tous négatifs. Donc $I_{n+1}$ décroît en valeur absolue quand $n$ augmente.

Donc enfin l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$$

a une valeur finie et bien déterminée.

Remarque. — Il peut se faire que les deux intégrales

$$\int_a^{l} f(x)\,dx \qquad \int_{-l'}^{a} f(x)\,dx$$

tendent vers des limites déterminées et finies lorsque $l$ et $l'$ augmentent l'un et l'autre indéfiniment. La somme de ces deux intégrales, par définition, est alors l'intégrale définie, prise de $-\infty$ à $+\infty$ et se représente par le symbole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

C'est ce qui arrive par exemple pour une fonction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ dont le numérateur est d'un degré inférieur de deux unités à celui du dénominateur, et dont le dénominateur n'a que des racines imaginaires. Si on extrait la partie rationnelle de l'intégrale, elle n'aura pas de partie entière et s'annulera pour $x$ infini, on aura donc seulement à considérer la partie transcendante $\int \frac{P}{X}\,dx$, $X$ étant le produit des facteurs binômes de $F(x)$ pris chacun avec l'exposant 1. Comme cette intégrale doit, lorsqu'une limite devient infinie, conserver une valeur finie, $P$ doit être encore d'un degré inférieur de deux unités au moins au degré de $x$. Il est alors aisé d'évaluer l'intégrale. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P}{X}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_1 x + B_1}{(x-a_1)^2 + b_1^2}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_2 x + B_2}{(x-a_2)^2 + b_2^2}\,dx \; . \; . \; . \; + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n x + B_n}{(x-a_n)^2 + b_n^2}\,dx$$

Si on réunissait en une seule toutes les fractions simples, le terme du degré $2n-1$ dans le numérateur serait nul. On a donc ici

$$A_1 + A_2 + \; . \; . \; . \; + A_n = 0$$

Or en général

$$\int \frac{A x + B}{(x-a)^2 + b^2}\,dx = \int \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + b^2}\,dx + (B + A a) \int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2}$$

$$= \frac{A}{2}\, L \left[ (x-a)^2 + b^2 \right] + \frac{B + A a}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-a}{b}$$

Prenons l'intégrale de $-l$ à $+l$

$$\int_{-l}^{+l} \frac{A x + B}{(x-a)^2 + b^2}\,dx = \frac{A}{2}\, L \,.\, \frac{(l-a)^2 + b^2}{(l+a)^2 + b^2} + \frac{B + A a}{b} \left[ \operatorname{arc\,tg} \frac{l-a}{b} + \operatorname{arc\,tg} \frac{l+a}{b} \right]$$

Si nous faisons augmenter $l$ indéfiniment, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{B+Aa}{2}\left[\operatorname{arc}\operatorname{tg}\infty - \operatorname{arc}\operatorname{tg}-\infty\right] = \frac{\pi}{2}(B+Aa)$$

Évaluons d'après cette formule chacune des intégrales partielles proposées et tenons compte de ce que $A_1 + A_2 - \quad + A_n = 0$, il vient enfin :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(B_1 + B_2 - \quad + B_n\right)$$

Nous avons supposé il est vrai que les deux limites tendaient vers l'infini en conservant même valeur absolue. — Mais cette restriction est tout à fait permise, puisque l'on sait à priori, par ce qui précède que chacune des deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx.$$

a séparément une valeur finie et bien déterminée

V. Changement de variable. — Lorsqu'on change de variable, pour évaluer une intégrale définie, on peut appliquer la méthode donnée dans le cas de l'intégration indéfinie ; il faut, en même temps, modifier les limites de l'intégrale. Il est bon d'établir la règle du changement de variable en se plaçant au point de vue de l'intégration définie, c'est-à-dire de l'évaluation d'une limite de somme.

Soit donc l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ; substituons à $x$ une autre variable $t$, telle qu'on ait $x = \varphi(t)$.

Supposons que, $t$ variant de $\alpha$ à $\beta$, $x$ varie constamment dans le même sens de $a$ à $b$ ; à un mode de subdivision de $(\alpha, \beta)$ savoir

$$\alpha \; t_1 \; t_2 \ldots\ldots t_{n-1} \; \beta$$

correspondra une subdivision de $(a, b)$

$$a \; x_1 \; x_2 \ldots\ldots x_{n-1} \; b$$

où les $x$ seront rangés par ordre de grandeur ; d'ailleurs, si $n$ croissant indéfiniment tous les $\delta t$ tendent vers $0$, il en sera de même des $\delta x$, en supposant continue la fonction $\varphi(t)$. Admettons enfin que $\varphi(t)$ admette une dérivée continue $\varphi'(t)$, nous aurons

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$$

Or, $\varepsilon$ étant un nombre positif donné fixe, on peut (voir le début de la prochaine leçon) prendre $n$ assez grand pour que $\dfrac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ diffère de $\varphi'(t_i)$ d'une quantité moindre que $\varepsilon$ et cela quel que soit $t_i$.

On aura donc :

$$f(x_i)\,\delta x_i = f[\varphi(t_i)][\varphi'(t_i)\delta t_i + \theta_i\,\varepsilon\,\delta t_i] \qquad |\theta| < 1$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{i=n} f[\varphi(t_i)]\delta t_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i\,\delta t_i \cdot f[\varphi(t_i)]$$

La dernière somme est évidemment moindre en valeur absolue que $\varepsilon M(\beta-\alpha)$ $M$ étant la limite supérieure de $|f(x)|$. Donc, en passant à la limite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\beta f(\varphi)\,\varphi'(t)\,dt$$

Remarque. La règle précédente permet de faire la substitution lorsqu'on sait décomposer $(\alpha\ \beta)$ en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $\varphi(t)$ varie dans le même sens. — Nous aurons à revenir sur ce point à propos de la détermination des intégrales définies.

---

# Dix-septième Leçon.

## Retour sur les propriétés des fonctions continues — Intégrales multiples.

---

**I — Retour sur les notions de continuité.** — 1°. — Avant d'aller plus loin, nous reviendrons pour les préciser et les étendre aux fonctions de plusieurs variables sur les propriétés générales des fonctions continues. Soit d'abord une fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle $(a, b)$ : si on se donne un nombre positif fixe $\varepsilon$ à tout nombre $\alpha$ compris entre $a$ et $b$ correspond un nombre positif $\eta$ tel qu'on ait

$$|f(\alpha+h) - f(\alpha)| < \varepsilon \quad \text{sur la condition} \quad |h| < \eta .$$

C'est la définition même de la continuité dans un intervalle ; or quand cette condition est remplie le nombre $\eta$ peut être choisi indépendamment de $\alpha$ ; en d'autres termes, $f(x+h) - f(x)$ tend uniformément vers zéro en même temps que $h$ dans tout l'intervalle $(a\ b)$. En effet, nous savons qu'on peut toujours décomposer $(a\ b)$ en intervalles partiels assez petits pour que l'oscillation de la fonction soit, dans chacun d'eux, inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Supposons ces intervalles égaux à un même nombre $\eta$. Tout système $\alpha, \alpha+h$ d'amplitude moindre que $\eta$ appartiendra à l'un des intervalles en question ou sera à cheval sur deux d'entre eux,

et, par suite, on aura bien

$$|f(\alpha+h)-f(\alpha)|<\varepsilon \quad \text{pour} \quad |h|<\eta.$$

Supposons maintenant que $f(x)$ admette une dérivée $f'(x)$ déterminée pour chaque valeur comprise entre $a$ et $b$: on aura

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}-f'(\alpha)=f'(\alpha+\theta h)-f'(\alpha),$$

$\theta$ étant compris entre zéro et 1. Or si $f'(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(a\ b)$, le second membre, d'après ce qu'on vient de voir, tendra uniformément vers zéro avec $h$; donc le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tendra uniformément vers $f'(x)$, pourvu que $f'(x)$ soit continu.

II — Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de deux variables finie et continue dans le champ $(a a' b b')$ et aussi sur son contour. Partageons $(a a')$ et $(b b')$ en $2^n$ parties égales: nous aurons des champs partiels dont l'étendue tendra vers zéro quand $n$ augmentera indéfiniment; je dis d'abord qu'on peut prendre $n$ assez grand pour que, dans chacun de ces champs partiels, l'oscillation soit inférieure à un nombre positif $\varepsilon$ fixe, aussi petit qu'on voudra. En effet, supposons que cela n'ait pas lieu; sur les quatre parallélogrammes obtenus en divisant une première fois $(a a' b b')$ il y en aura un au moins dans lequel l'oscillation sera supérieure à $\varepsilon$ et tel que si on le subdivise indéfiniment lui même, l'un des champs partiels auxquels il donnera naissance fournira toujours une oscillation supérieure à $\varepsilon$. Soit $(a_1 a_1' b_1 b_1')$ ce premier champ partiel. L'un des quarts de $(a_1 a_1' b_1 b_1')$ satisfera, lui aussi, aux mêmes conditions, et ainsi de suite indéfiniment. On aura ainsi quatre suites de nombres.

$$a,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_n \qquad a', a_1', a_2', \ldots\ldots a'_n$$
$$b,\ b_1,\ b_2, \ldots\ldots b_n \qquad b', b_1', b_2' \ldots\ldots b'_n$$

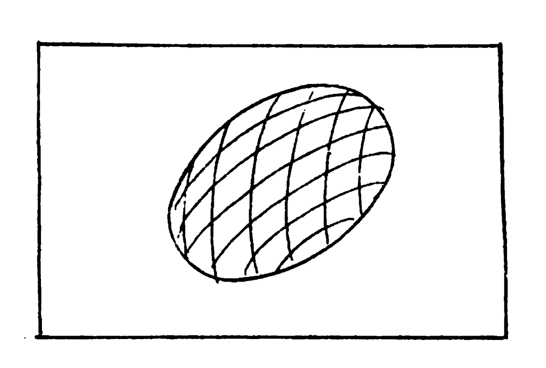
tels que, quel que soit $n$, le champ $(a_n a'_n b_n b'_n)$ donnera toujours une oscillation supérieure à $\varepsilon$. Or les $a_i$ forment une suite stationnaire ou croissante et tous sont inférieurs à $a'$. Donc $a_n$ a une limite déterminée $\alpha$ comprise entre $a$ et $a'$ et il est clair que $a'_n$ a la même limite. De même $b_n$, $b'_n$ tendent vers une même limite $\beta$ comprise entre $b$ et $b'$. Mais au point $(\alpha, \beta)$ situé dans le champ $(a a' b b')$ la fonction est discontinue. Il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement fait (page 2) pour les fonctions d'une seule variable, et on en conclut, comme on l'a fait alors, que, quelle que soit la manière dont on décompose le champ en champs partiels, dont le nombre augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro, on peut toujours pousser cette opération assez loin pour que dans chacun des champs partiels considérés l'oscillation soit inférieure à un nombre

$\varepsilon$ fixe choisi arbitrairement. Il en résulte aussi, comme plus haut, qu'à tout nombre $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre $\eta$ indépendant de $x, y$ et tel que l'on ait

$$|f(x+h, y+K) - f(x,y)| < \varepsilon \quad \text{pour } |h| < \eta \quad |K| < \eta.$$

En d'autres termes, la fonction est uniformément continue à l'intérieur du champ $(aa'bb')$.

III — Nous avons supposé que le champ donné avait la forme d'un parallélogramme : supposons maintenant que la fonction $f(x,y)$ soit déterminée, finie et continue pour toutes les valeurs de $(x,y)$ intérieures à un contour curviligne $(C)$, et aussi pour les valeurs de $(x,y)$ qui correspondent aux points du contour lui-même ; imaginons de plus qu'on ait décomposé l'aire donnée en une infinité d'aires partielles de forme quelconque, dont chacune tende vers zéro, c'est-à-dire finisse par être comprise dans un parallélogramme aussi petit qu'on voudra. Il est aisé de voir que cette décomposition pourra être menée assez loin pour que, dans chacune des aires partielles, l'oscillation soit inférieure à $\varepsilon$.



En effet, nous pouvons envelopper l'aire donnée d'un rectangle $R$ qui la comprenne toute entière et imaginer, d'une infinité de manières, une fonction qui, déterminée, finie et continue dans $R$, coïnciderait avec $f(x,y)$ pour tous les points situés sur $(C)$ ou dans son intérieur. Décomposons $R$ en $4^n$ rectangles égaux tels que dans chacun d'eux l'oscillation de cette fonction soit supérieure à $\frac{\varepsilon}{4}$. Nous pourrons, d'autre part, pousser la subdivision assez loin pour que chacune des petites aires partielles soit intérieure au système formé par quatre rectangles contigus ; l'oscillation sera, par suite, dans chacune d'elles, inférieure à $\varepsilon$. On en conclut aussi que $f(x,y)$ est uniformément continue dans le champ curviligne considéré.

Si $f(x,y)$ admet par rapport à $x$ une dérivée partielle $f'_x(x,y)$, on aura, en général,

$$\frac{f(x+h) - f(x,y)}{h} - f'_x(x,y) = f'_x(x+\theta h, y) - f'_x(x,y)$$

Si donc la dérivée partielle en question est continue dans l'aire donnée et sur son contour, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tendra uniformément vers $\frac{\partial f}{\partial x}$ dans toute l'aire considérée.

IV — On peut aussi prouver que la fonction $f(x,y)$ atteint au moins une fois dans l'aire donnée sa limite supérieure $M$ et aussi sa limite inférieure $m$.

Ce fait important a été établi par M. Darboux (Bulletin des Sci. Math. 1872, p. 308). Il suffit, d'ailleurs, pour le démontrer, de décomposer le champ rectangulaire en rectangles partiels égaux, comme nous l'avons fait plus haut, et de répéter identiquement le raisonnement fait dans l'introduction (page 4) pour démontrer le théorème analogue dans le cas d'une variable.

Remarque. Tous les résultats qui précèdent s'étendent sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Le champ de ces variables, considéré au point de vue le plus général, sera l'ensemble des valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui rendront négative ou nulle une fonction continue donnée de $x_1, x_2, \ldots x_n$. Les raisonnements sont exactement les mêmes que dans le cas de deux variables; il est sans doute impossible, pour $n > 3$, d'employer comme nous l'avons fait, une représentation géométrique; mais il est bien évident que cette représentation ne joue aucun rôle essentiel dans les démonstrations qui précèdent et ne sert qu'à simplifier le langage.

Dans ces conditions nous pourrons énoncer les résultats sous la forme générale suivante, sans entrer dans le détail de la démonstration.

Une fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ étant déterminée, finie et continue pour toutes les valeurs des variables qui appartiennent à un champ (C) ou qui limitent ce champ:

1°. Cette fonction est uniformément continue dans le champ (C)

2°. Elle atteint une fois au moins chacune de ses deux valeurs limites.

3°. Si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est de plus continue pour les mêmes valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x_i}$ tend uniformément vers $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans tout le champ (C).

V. — Intégrale double. — En poursuivant l'analogie avec les fonctions d'une variable, on est conduit immédiatement à une notion nouvelle, celle des intégrales multiples.

Considérons d'abord le cas d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables, définie dans le champ rectangulaire $(a a' b b')$. Partageons ce rectangle en rectangles partiels par des parallèles aux axes ayant les uns pour abscisse

$$a, x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_{p-1} \ldots a'$$

les autres pour ordonnées

$$b, y_1, y_2, \ldots y_j \ldots y_{q-1} \ldots b'$$

suivant une loi quelconque, mais telle que, $p$ et $q$ croissant indéfiniment, les deux dimensions de chaque rectangle partiel tendent vers 0. Soit $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\delta y_j = y_j - y_{j-1}$, désignons par $l_{ij}$ une quantité comprise entre les valeurs limites de la fonction $f(x, y)$ pour le champ $(x_{i-1}, y_{j-1}, y_j)$ et cherchons ce que devient la somme double:

$$S_{p,q} = \sum_{j=1}^{j=q} \sum_{i=1}^{i=p} l_{ij} \; \delta x_i \; \delta y_j$$

lorsque p et q augmentent indéfiniment. Pour évaluer cette somme prenons d'abord les éléments correspondants aux rectangles situés sur une même bande horizontale, $(y_{j-1}, y_j)$.

Nous aurons en y mettant $\delta y_j$ en facteur

$$s_j = \delta y_j \sum_{i=1}^{i=p} l_{ij} \, \delta x_i$$

Or si on considère l'intégrale $\int_a^{a'} f(x,y)\,dx$ c'est une fonction parfaitement déterminée de y ; nous poserons

$$F(y) = \int_a^{a'} f(x,y)\,dx$$

Il est aisé de voir que $F(y)$ est continue dans l'intervalle $(bb')$, car si on donne à y un accroissement b on a

$$F(y+b) - F(y) = \int_a^{a'} [f(x,y+b) - f(x,y)]\,dx$$

On peut à tout nombre positif $\varepsilon$ faire correspondre un nombre tel que $|f(x, y+b) - f(x,y)| < \varepsilon$ pour $|b| < \eta$ ; dans ces conditions on aura $|\Delta F| < \varepsilon(a'-a)$ ce qui démontre bien la continuité de $F(y)$. Dès lors $F(y)$ sera intégrable. Revenons à $s_j$ ; étant donné un nombre $\varepsilon$, nous pouvons trouver un nombre entier K tel que pour toutes les valeurs de p, q égales ou supérieures à K.

1° l'oscillation de $f(x,y)$ dans l'intérieur et sur le contour de chaque rectangle partiel soit $< \varepsilon$

2° l'oscillation de $F(y)$ dans chacun des intervalles $\delta y_j$ soit moindre que $\varepsilon$.

Dans ces conditions on aura $(p \geq K \, , \, q \geq K)$

$$\sum_{i=1}^{i=p} l_{ij} \, \delta x_i = \int_a^{a'} f(x, y_j)\,dx + \theta_j (a'-a) = F(y_j) + \theta_j (a'-a) \qquad |\theta_j| < \varepsilon$$

Car la différence entre une intégrale définie et l'une quelconque des sommes correspondantes est évidemment une fraction de la somme $\sum \omega_i \, \delta x_i$ $\omega_i$, étant l'oscillation dans l'intervalle de rang i ; ce sera donc bien ici une fraction de $\varepsilon \sum \delta x_i$ ou $\varepsilon(b-a)$. On aura dès lors :

$$s_j = F(y_j)\,\delta y_j + \theta_j \, \delta y_j \, (a'-a)$$

D'où :

$$S_{pq} = \sum_{j=1}^{j=q} F(y_j)\,\delta y_j + \sum_{j=1}^{j=q} \theta_j \, \delta y_j \, (a'-a) \ldots$$

La dernière somme est une fraction de $\varepsilon(a'-a) \sum \delta y_j$ ou $\varepsilon(a'-a)(b'-b)$ ; la première peut s'évaluer à l'aide d'une intégrale définie et nous aurons rigoureusement :

$$S_{pq} = \int_b^{b'} F(y)\,dy + \lambda\ (b'-b) + \theta(a'-a)(b'-b)$$

$\lambda$ et $\theta$ étant des fractions de $\varepsilon$. Il en résulte immédiatement que

La somme $S_{pq}$, quand p et q deviennent infinis, a une limite déterminée indépendante du mode de subdivision et égale à

$$\int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x,y)\,dx.$$

Si, au lieu d'évaluer la somme $S_{pq}$ par bandes horizontales nous l'avions évaluée par bandes verticales, nous aurions eu évidemment le même résultat. Mais cela nous eût conduits à une autre intégrale, $\int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y)\,dy$. Ces deux intégrales, limites d'une même somme, sont identiques, on représente leur valeur commune par le symbole

$$J = \int_a^{a'} \int_b^{b'} f(x,y)\,dx\,dy$$

auquel on donne le nom d'intégrale double; elle présente des propriétés immédiates analogues à celles des intégrales simples. Il résulte en effet de la définition même que l'on a:

$$J = \mu\,(b'-b)(a'-a)$$

$\mu$ étant intermédiaire entre les valeurs limites de la fonction dans le champ d'intégration, si donc $(\xi,\eta)$ est un système de valeurs appartenant à ce champ on aura:

$$J = f(\xi,\eta)(b'-b)(a'-a)$$

Si nous considérons en second lieu, l'intégrale

$$F(X,y) = \int_a^X \int_b^Y f(x,y)\,dx\,dy$$

c'est une fonction de $X\,Y$, déterminée et finie dans le champ $(a\,a'\,b\,b')$. On a d'ailleurs

$$F(X+h,\,Y+K) = \int_a^X dx \int_b^{Y+K} f(x,y)\,dy + \int_X^{X+h} dx \int_b^{Y+K} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_a^X dx \int_b^Y f(x,y)\,dy + \int_a^X dx \int_Y^{Y+K} f(x,y)\,dy + \int_X^{X+h} dx \int_b^Y f(x,y)\,dy + \int_X^{X+h} dx \int_Y^{Y+K} f(x,y)\,dy$$

Si à chacune des trois dernières intégrales on applique le théorème de moyenne que nous venons de démontrer, on voit immédiatement que $F(X\,Y)$ est une fonction continue; mais on peut aller plus loin. - Si on fait $K=0$ on a:

$$\Delta F = \int_X^{X+h} dx \int_b^Y f(x,y)\,dy$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$\lim \frac{\Delta F}{\Delta X} = \int_b^Y f(x,y)\,dx$$

$F$ admet donc deux dérivées partielles du 1er ordre

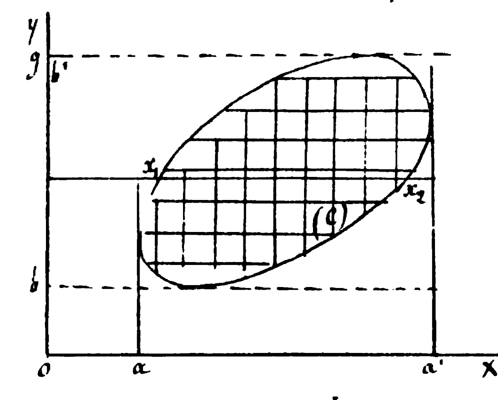
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_b^y f(x,y)\,dy \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(x,y)\,dx$$

et on en conclut immédiatement l'existence d'une dérivée partielle du 2e ordre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(X,Y).$$

Rien ne permet d'ailleurs d'affirmer l'existence des dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Cas où le champ est limité par une courbe. — Considérons maintenant un espace limité par une courbe $C$ que nous supposerons d'abord convexe ; menons encore parallèlement aux deux axes deux systèmes de droites parallèles et évaluons la somme $\sum\sum \delta x_i\,\delta y_j\,l_{ij}$ étendue à tous les rectangles qui sont complètement intérieurs à $C$ ; nous supposons que le nombre de ces rectangles croît indéfiniment, chacun d'eux tendant vers o. Ici chaque parallèle à $OX$ rencontre la courbe en deux points $M_1\,M_2$ dont les abscisses sont deux fonctions $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ de l'ordonnée correspondante. Si alors nous posons, en supposant $\varphi_1$ et $\varphi_2$ continues :




$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx = F(y)$$

$F(y)$ sera continue et nous aurons comme précédemment, et en supposant la subdivision poussée assez loin pour que $f(x,y)$ dans chaque rectangle et $F(y)$ dans chaque intervalle aient une oscillation moindre que $\varepsilon$ :

$$\sum\sum \delta x_i\,\delta y_j\,l_{ij} = \int_b^{b'} F(y)\,dy + \lambda(b'-b) + (a'-a)\,(b'-b)\,\theta$$

$a, a'$ étant les abscisses, $b\,b'$ les ordonnées extrêmes de la courbe $C$, et $\theta$, $\lambda$ deux fonctions de $\varepsilon$. La somme double a donc pour limite l'intégrale :

$$\int_b^{b'} dy \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)\,dx$$

En évaluant la même somme par lignes verticales on aurait de même pour sa limite

$$\int_a^{a'} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ étant les ordonnées variables des deux points d'entrée et de sortie

d'une droite quelconque parallèle à $OY$. La valeur commune à ces deux intégrales est ce qu'on appelle une intégrale double étendue au champ curviligne $(C)$ et se représente par le symbole

$$\iint_{(C)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Il y a lieu d'ajouter les remarques suivantes:

1° L'intégrale relative à une aire formée de deux autres juxtaposées est égale à la somme des intégrales relatives aux deux aires partielles. — On en conclut que le théorème, démontré seulement en supposant $(C)$ convexe, s'étend à une courbe de forme quelconque.

2° Si on désigne par $S$ l'intégrale double $\iint dx\,dy$, on aura évidemment

$$\iint_{(C)} f(x,y)\,dx\,dy = \mu S$$

$\mu$ étant intermédiaire entre la plus grande et la plus petite valeur de $f(x,y)$ dans l'aire et sur son contour.

3° Enfin si on suppose la subdivision en rectangles poussée assez loin pour que chaque oscillation partielle soit $< \varepsilon$, on aura

$$\iint_{(C)} f(x,y)\,dx\,dy - \Sigma\,\Sigma\, l_{ij}\,\delta x_i\,\delta y_j = \theta S$$

$\theta$ étant une fraction de $\varepsilon$. Ces remarques sont nécessaires pour passer comme nous allons le faire à la notion des intégrales triples et multiples.

VI. Intégrales multiples. Soit une fonction $f(x,y,z)$ déterminée finie et continue dans le champ prismatique $(aa', bb', cc')$; décomposons ce plan en prismes partiels dont le nombre aille en croissant indéfiniment, chacun d'eux tendant vers 0, soient $p, q, r$, le nombre des intervalles partiels contenus dans $aa'$, dans $bb'$, dans $cc$; et considérons la somme

$$\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\, l_{ijk}\,\delta x_i\,\delta y_j\,\delta z_k$$

étendue à tous les prismes en question; cette somme pourra s'écrire

$$\sum_{k=1}^{k=r} \delta z_k\,\Sigma\,\Sigma\, l_{ijk}\,\delta x_i\,\delta y_j$$

la somme double s'étendant au champ $(aa', bb')$ des deux variables $x, y$. Si nous posons

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x,y,z)\,dx\,dy = F(z)$$

$F(z)$ sera continu et par suite intégrable et nous aurons pour notre somme à évaluer :

$$\sum_{k=1}^{k=r} \delta z_k \left[ F(z_k) + \theta_k S \right]$$

$S$ étant l'aire $aa'bb'$, $\theta_k$ une fraction de l'oscillation maxima $\varepsilon$ de $f(x, y, z)$ dans les prismes partiels considérés ; cette somme pourra alors s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{k=r} F(z_k)\,\delta z_k + S \sum_{k=1}^{k=r} \theta_k\,\delta z_k = \int_c^{c'} F(z)\,dz + \lambda\,(c'-c) + \theta V$$

$V$ étant le volume du prisme total, $\lambda$ et $\theta$ deux fractions de $\varepsilon$. On en conclut immédiatement que :

La somme triple considérée a une limite déterminée et finie, indépendante de la loi de subdivision, et égale à

$$\int_c^{c'} dz \iint_{(aa'bb')} f(x, y, z)\,dx\,dy$$

Il est clair qu'en évaluant la somme par tranches parallèles à l'un des plans $zoy$, $zox$, on aurait le même résultat ; les 6 intégrales ainsi obtenues

$$\int_c^{c'} dz \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x,y,z)\,dx, \quad \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} dz \int_a^{a'} f(x,y,z)\,dx, \ldots$$

ont donc une valeur commune qu'on représente par le symbole

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

et qu'on appelle une intégrale triple.

On peut imaginer un champ limité par une surface fermée de forme quelconque $S$ ; la somme triple $\sum\sum\sum f\,\delta x\,\delta y\,\delta z$ étendue à tous les prismes intérieurs à $S$, aura encore une limite indépendante de la loi d'inscription et qu'on représentera par le symbole

$$\iiint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

La démonstration est calquée sur celle qu'on a donnée pour le cas de deux variables ; il est nécessaire cependant d'ajouter quelques mots relativement aux limites. — La surface qui limite le champ se projette sur $xoy$ à l'intérieur d'une certaine courbe de contour apparent $C$. Supposons qu'une parallèle à $oz$ rencontre la surface en deux points $M_1$, $M_2$ seulement (cette restriction disparaît d'elle-même

comme plus haut, une fois le théorème démontré). Les ordonnées de $M$, $M_2$ sont des fonctions $\varphi_1(x,y)$ $\varphi_2(x,y)$. Posons

$$\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz = F(x,y)$$

Si pour évaluer la somme triple nous laissons d'abord fixes $x, y, \delta x, \delta y$, c'est-à-dire si nous nous limitons aux prismes qui forment une file parallèle à $Oz$; nous aurons, pour cette somme partielle

$$\delta x_i\ \delta y_j\ \left[F(x_i y_j) + \theta(c'-c)\right]$$

$\theta$ étant une fraction de $\varepsilon$, et toutes les oscillations partielles de $f$ étant moindres que $\varepsilon$, $c$ et $c'$ sont les valeurs extrêmes du $z$ de la surface. On aura alors pour la somme en question, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, la limite

$$\iint_{(C)} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

ce qui pourra s'écrire évidemment d'après ce qu'on a vu sur les intégrales doubles

$$\int_a^{a'} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\quad dz$$

$\psi_1$ et $\psi_2$ étant deux fonctions de $x$, parfaitement déterminées.

Quelle que soit la manière dont on évalue l'intégrale, on obtient un résultat unique, qui est par définition l'intégrale triple étendue au champ $S$ et qu'on représente par

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Si on désigne par $V$ l'intégrale triple $\iiint_{(S)} dx, dy, dz$, on aura évidemment

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \mu V$$

$\mu$ étant intermédiaire les valeurs extrêmes de $f(x,y,z)$. En outre, si on pousse la subdivision en intervalles partiels assez loin pour que chacune des oscillations soit inférieure à $\varepsilon$, on aura encore

$$\iiint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz - \sum\sum\sum l\,\delta x\,\delta y\,\delta z = \theta V$$

$\theta$ étant une fraction de $\varepsilon$.

Il est évident que cette forme de raisonnement, de proche en proche, peut se continuer indéfiniment.

On arrive ainsi à la notion d'Intégrale multiple, pour une fonction $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ de $n$ variables indépendantes. Nous n'insisterons pas sur cette généralisation.

Revenons au cas d'une intégrale triple et supposons-la prise dans un champ $(ax, by, cz)$ à limites inférieures constantes et à limites supérieures variables. Nous aurons ainsi une fonction

$$F(x, y, z) = \int_a^x dx \int_b^y dy \int_c^z f(x, y, z)\, dz$$

Cette fonction sera continue dans le champ $(aa' bb' cc')$ et de plus elle admettra des dérivées partielles, données par les relations:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_a^y dy \int_c^z f(x, y, z)\, dz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x dx \int_c^z f\, dz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \int_a^x dx \int_b^y f(x, y, z)\, dy$$

On en déduira

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \int_c^z f(x, y, z)\, dz, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \int_a^x f(x, y, z)\, dx, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \int_b^y f(x, y, z)\, dy.$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} = f(x, y, z)$$

Mais rien ne prouve que $f(x, y, z)$ admette des dérivées de la forme $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}$, ....

---

# Dix-huitième Leçon

---

## Intégration et dérivation sous le signe $\int$ Intégration des différentielles totales.

---

1. Intégration sous le signe $\int$. — Nous avons vu dans la dernière leçon que le calcul d'une intégrale multiple se ramène à une suite d'intégrations simples, et cela de plusieurs manières, l'ordre dans lequel chacune des variables devient à son tour la variable d'intégration étant arbitraire. En particulier l'intégrale double $\iint f(x, y)\, dx\, dy$ prise entre les limites $aa'$, $bb'$ peut

s'obtenir de deux manières différentes, et l'on a

$$(1) \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} f(x,y)\, dy = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} f(x,y)\, dx$$

En d'autres termes, lorsqu'une intégrale définie prise entre des limites constantes porte sur une fonction dépendant d'un paramètre, elle est elle-même fonction de ce paramètre et, pour l'intégrer par rapport à ce paramètre entre deux limites données, on peut intégrer d'abord entre ces limites la fonction sous le signe. C'est en cela que consiste la règle d'intégration sous le signe $\int$.

Il arrive fréquemment, et en particulier pour le calcul de certaines intégrales qu'on a à appliquer le théorème précédent au cas où les limites sont infinies. Or les démonstrations données supposent essentiellement que le champ d'intégration soit limité.

Si l'une ou l'autre des limites supérieures $a'$, $b'$, ou toutes deux, deviennent infinies, nous allons montrer que l'égalité (1) subsiste pourvu qu'à partir de valeurs suffisamment grandes de $x$ et de $y$ la fonction $f(x,y)$ conserve un signe constant.

Supposons, par exemple, qu'on ait $f(x,y) > 0$ pour $x > A$, $y > B$. On a, pour $h$ et $K$ positifs,

$$\int_a^{A+h} dx \int_b^{B+K} f(x,y)\, dy = \int_a^{A} dx \int_b^{B} f(x,y)\, dy + M$$

$$= \int_b^{B} dy \int_a^{A} f(x,y)\, dx + M$$

M étant une somme d'éléments tous positifs : supposons que $h$ et $K$ augmentant indéfiniment la première intégrale tende vers une limite finie $H$; lorsque $A$ et $B$ augmenteront indéfiniment, la seconde intégrale ne pourra que croître et restera toujours inférieure à $H$, donc elle tendra vers une limite $H'$ et l'on aura $H' \leq H$. En renversant le raisonnement on aurait de même $H \leq H'$, d'où $H = H'$.

Si, au contraire, $A$ et $B$ augmentant indéfiniment $\int_b^B \int_a^A$ croît au delà de toute limite, il en sera de même a fortiori de $\int_a^{A+h} \int_b^{B+h}$. Donc en résumé, si l'une des deux intégrales (1) devient infinie avec ses limites supérieures, il en sera de même de l'autre ; si l'une des deux tend vers une limite déterminée, l'autre tendra vers la même limite, pourvu qu'au delà de valeurs suffisamment grandes des variables la fonction $f(x,y)$ conserve un signe constant.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Posons $x = \alpha t$, $(\alpha > 0)$ d'où

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha \, dt$$

Si nous multiplions par $e^{-\alpha^2} d\alpha$ et intégrons de $0$ à $\infty$, nous aurons

$$I.\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = I^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha \, dt$$

Nous pouvons faire l'intégration dans un ordre quelconque car la fonction sous le signe est constamment positive. On aura alors

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty \alpha \, e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha$$

$$= \int_0^\infty dt \left[ -\frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

D'où

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Considérons au contraire l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Multiplions par $db$ et intégrons de $0$ à $\beta$.

$$\int_0^\beta db \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \int_0^\beta \frac{d\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \text{arc tg} \frac{\beta}{a}$$

En renversant les intégrations, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx \int_0^\beta \cos bx \, db = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin \beta x}{x} dx$$

$$= \text{arc tg} \frac{\beta}{a}$$

Ce résultat est exact, mais le raisonnement manque de rigueur parce que la fonction sous le signe change de signe un nombre infini de fois à partir de n'importe quelle valeur de $x$, si grande qu'elle soit. Nous reviendrons plus loin

sur l'intégrale précédente

Remarque. Il y aurait lieu d'étendre la définition des intégrales multiples, comme on l'a fait pour les intégrales simples en levant autant que possible les restrictions qu'on s'est d'abord imposées. Nous ne nous arrêterons pas à cette question qui nous entraînerait trop loin.

## 11. Changement de variables dans les intégrales multiples.

Considérons, par exemple, l'intégrale triple $\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ et supposons qu'on veuille substituer à $x, y, z$ d'autres variables $u, v, w$ liées aux premières par des équations de la forme

$$x = \varphi(u, v, w)$$
$$y = \varphi_1(u, v, w)$$
$$z = \varphi_2(u, v, w)$$

Il y aura d'abord à déterminer les limites du nouveau champ d'intégration, c'est là une question d'analyse fine que nous n'avons pas à traiter ici.(1) La nouvelle intégrale triple sera de la forme :

$$\iiint F(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

et ce que nous nous proposons, c'est de déterminer la fonction $F$.

Nous supposons que le déterminant

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)}$$

ne s'annule pas dans le champ d'intégration et les formules de transformation peuvent alors se mettre sous la forme (voir page )

$$(1)\quad x = \varphi(u, v, w) \qquad y = \psi(x, v, w) \qquad z = \chi(x, y, w)$$

L'intégrale proposée s'obtiendrait par trois intégrations simples successives :

$$I = \int dx \int dy \int f(x, y, z)\, dz$$

Si nous substituons dans la première intégration la variable $w$ à la variable $z$, $x$ et $y$ étant ici de simples paramètres, nous aurons :

$$I = \int dx \int dy \int f(x, y, \chi) \frac{\partial \chi}{\partial w} dw \qquad = \qquad \iiint f(x, y, \chi) \frac{\partial \chi}{\partial w}\, dx\, dy\, dw$$

---

(1) Des considérations géométriques peuvent intervenir utilement dans cette partie de la question, comme nous le verrons plus loin.

Nous pourrons raisonner sur cette nouvelle intégrale comme sur la précédente en commençant par la variable $y$. En d'autres termes, posons :

$$f(x,y,\chi)\frac{\partial\chi}{\partial w} = f_1(x,y,w),$$

nous aurons

$$I = \int dx \int dw \int f_1\ (x\ ,\ y\ .\ w)\ dy$$

Substituons $v$ à $y$ à l'aide de la seconde relation (1)

$$I = \int dx \int dw \int f_1(x,\psi,w)\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv = \iiint f_1(x,\psi,w)\frac{\partial\psi}{\partial v}\,dx,dv,dw$$

De même en posant

$$f_1\ (x,\ \psi,\ w)\ \frac{\partial\psi}{\partial v} = f_2\ (x\ ,\ v,\ w)$$

on aura

$$I = \iiint f_2\ (\varphi,\ v,\ w)\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\ du\ dv\ dw$$

La fonction cherchée est une $f_2\ (\varphi,\ v,\ w)\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}$ ; mais si on désigne par $F\ (u,\ v,\ w)$ ce que devient la fonction $f$ quand on y fait la substitution et si on remarque d'autre part que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial w}$ est le déterminant fonctionnel $\frac{D\ (x,\ y,\ z)}{D\ (u,\ v,\ w)}$ (voir page ). on aura en définitive

$$\iiint f\ (x,\ y,\ z)\ dx\ dy\ dz = \iiint F(u,v,w)\ \frac{D(x,y,z)}{D\ (u,\ v,\ w)}\ du\ dv\ dw$$

Cette relation, se démontrerait de même pour un nombre quelconque de variables dans les intégrales multiples.

Pour donner une application reprenons l'intégrale déjà considérée

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

On aura évidemment

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\ dx\ dy$$

Faisons le changement de variables

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$\frac{D\ (x,\ y)}{D\ (r,\ \theta)} = r$$

La fonction à intégrer sera $e^{-r^2} . r\, dr\, d\theta$. Les limites de la nouvelle intégration se déterminent aisément : $x$ et $y$ sont tous deux positifs et le champ de la première intégrale est la portion du plan contenue dans l'angle $XOY$ des coordonnées positives. On recouvrira ce champ complètement et une seule fois en faisant varier $\theta$ de $0$ à $\frac{\pi}{2}$ et $r$ de $0$ à $\infty$.

On aura donc enfin

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left( \frac{e^{-r^2}}{2} \right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

comme nous l'avions trouvé plus haut.

III. Dérivation sous le signe $\int$ — 1° La fonction de $y$ définie par l'intégrale

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$$

est, comme nous l'avons vu, continue si $f$ est une fonction continue ; il peut se faire que $F(y)$ soit de plus dérivable, c'est ce que nous allons étudier. Pour cela, donnons à $y$ un accroissement $\Delta y$, nous aurons

$$\frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} dx$$

Supposons que $f(x,y)$ admette une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(x,y)$ et que de plus, cette dérivée soit continue dans le champ $(a\,b, \alpha\,\beta)$. Dans ces conditions, la quantité sous le signe tendra uniformément vers $\varphi(x,y)$ ; en d'autres termes on pourra écrire

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \varphi(x,y) + \psi(x, y, \Delta y),$$

$\psi$ étant en valeur absolue inférieur à $\varepsilon$ pour toutes les valeurs de $|\Delta y|$ inférieures à $\eta$ et cela quels que soient $x$ et $y$.

Dans ces conditions, on aura

$$\frac{\Delta F}{\Delta y} = \int_a^b \varphi(x,y)\, dx + \int_a^b \psi(x,y,\Delta y)\, dx = \int_a^b \varphi(x,y) dx + (b-a)\psi(\xi, y, \Delta y)$$

$\xi$ étant compris entre $a$ et $b$. Le dernier terme est en valeur absolue inférieur à $\varepsilon\,(b-a)$ quels que soient $\xi$ et $y$.

On aura donc enfin

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta y} - \int_a^b \varphi(x,y)\,dx\right| < \varepsilon\,(b-a)$$

sous la condition $|\Delta y| < \eta$. En d'autres termes $\frac{\Delta F}{\Delta y}$ a une limite et on a

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

Il résulte de là que l'on peut dériver la fonction sous le signe avant d'effectuer l'intégration ou bien ne dériver qu'après avoir intégré. C'est la règle de la dérivation sous le signe $\int$.

2°. Cas où les limites sont variables. — On peut imaginer que $a$ et $b$ soient des fonctions de $y$: dans ce cas on aura en donnant à $y$ un accroissement $\Delta y$

$$\Delta \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \left[f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\right]dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int_a^{a+\Delta a} f(x,y+\Delta y)\,dx$$

Si on divise chaque terme par $\Delta y$, la première intégrale donnera comme précédemment pour limite $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$.

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{\Delta y}\int_b^{b+\Delta b} f(x,y+\Delta y)\,dx.$$

On pourra l'écrire d'après le théorème de la moyenne,

$$\frac{\Delta b}{\Delta y}\, f(\xi, y+\Delta y),$$

$\xi$ étant compris entre $b$ et $b+\Delta b$. Si on conserve les hypothèses faites plus haut relativement à la continuité, si on admet de plus que $b$ ait une dérivée $\frac{db}{dy}$, ce second terme aura évidemment pour limite $\frac{db}{dy} f(b,y)$. En raisonnant de même sur la dernière intégrale, on aura en définitive

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + f(b,y)\frac{db}{dy} - f(a,y)\frac{da}{dy}.$$

C'est la règle générale de dérivation sous le signe

Remarque. — On aurait pu obtenir ce dernier résultat en ramenant l'intégrale donnée à une autre ayant des limites constantes. Il

eût suffi de faire la substitution

$$x = a + t\,(b-a) \qquad dx = (b-a)\,dt$$

On aurait eu à considérer

$$\int_0^1 f\left[a+(b-a)t, y\right] dt$$

En différentiant sous le signe par rapport à $y$, on trouverait la formule précédente.

IV. — Il est souvent utile de pouvoir étendre la règle de dérivation au cas où le champ d'intégration ne serait plus fini, ou encore où la fonction deviendrait infinie dans le champ d'intégration. Nous indiquerons un cas étendu où cette extension peut se faire.

1° Supposons d'abord le champ d'intégration infini. Prenons par exemple, le cas où la limite supérieure est infinie. On peut toujours supposer la limite inférieure constante, car on peut écrire

$$\int_a^b = \int_{a_1}^b - \int_{a_1}^a ,$$

$a_1$ étant une constante comprise entre la plus grande valeur de $a$ et la plus petite valeur de $b$.

Soit donc l'Intégrale

$$F(y.l) = \int_a^l f(x,y)\,dx$$

dans laquelle $a$ est constant, $l$ croît indéfiniment, nous supposons que pour $l = +\infty$ $F(y,l)$ a une limite finie $\psi(y)$, en sorte que

$$\psi(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

cette égalité s'étendant à toutes les valeurs de $y$ comprises dans un intervalle donné que nous désignons comme plus haut par $(\alpha\,\beta)$. Je dis qu'on pourra différentier sous le signe, c'est-à-dire écrire

$$(1) \quad \psi'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \int_a^\infty \varphi(x,y)\,dx$$

pourvu que les deux conditions suivantes soient remplies

1° L'intégrale $\int_l^\infty \varphi(x,y)\,dx$ tend vers 0 quand $l$ croît sans limite et cela uniformément par rapport à $y$.

2° La fonction $\varphi(x,y)$ est continue par rapport à $y$ dans le champ $(a\,l, \alpha\,\beta)$ quelque grand que soit le nombre constant $l$.

Pour le démontrer écrivons $\psi(y)$ sous la forme

$$\psi(y) = \int_a^l f(x,y)dx + \int_l^\infty f(x,y)dx$$

Donnons à $y$ un accroissement $\Delta y$ nous aurons

$$\frac{\Delta\psi(y)}{\Delta y} = \int_a^l \varphi(x, y+\theta\Delta y)dx + \int_l^\infty \varphi(x,y+\theta\Delta y)dx \quad (0<\theta<1)$$

Or, d'après la première condition, si $\varepsilon$ est un nombre donné on peut toujours trouver un nombre $A$ tel que pour $l > A$ la dernière intégrale soit $< \frac{\varepsilon}{2}$ et cela quels que soient $y$, $\Delta y$ et $\theta$, pourvu qu'on reste, bien entendu, dans l'intervalle $(\alpha, \beta)$. Supposons $l$ fixe et supérieur à $A$; on aura

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta y} = \int_a^l \varphi(x,y+\theta\Delta y)dx + \lambda\frac{\varepsilon}{2} \qquad |\lambda| < 1.$$

$l$ étant maintenant fixé, nous pourrons d'après la seconde condition, trouver un nombre $\eta$ assez petit pour que $|\Delta y|$ étant moindre que $\eta$ on ait

$$|\varphi(x,y+\theta\Delta y) - \varphi(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2(l-a)}$$

Si alors nous appliquons à l'intégrale qui figure dans la dernière formule le théorème de la moyenne, il vient, en désignant par $\lambda'$ un autre nombre compris entre $(-1)$ et $+1$.

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta y} - \int_a^l \varphi(x,y)dx = (\lambda+\lambda')\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc on peut prendre, en résumé, $l$ assez grand et $\Delta y$ assez petit pour que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta y} - \int_a^l \varphi(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

C'est une autre manière d'exprimer l'égalité (1), qui se trouve par conséquent démontrée.

Remarque. Si la fonction $\varphi(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ peut se mettre, à partir de valeurs suffisamment grandes de $x$ sous la forme $\frac{M}{x^n}$, $n$ étant plus grand que 1, la première des deux hypothèses sera évidemment vérifiée, pourvu que $M$ soit limité supérieurement.

2° Si la fonction $f(x,y)$ devenait infinie dans le champ d'intégration, on raisonnerait de la même manière. En supposant les limites constantes, ce qu'on a toujours le droit d'admettre, on serait conduit à une règle analogue à la précédente savoir :

On pourra différentier, sous le signe, quand même $f(x,y)$ deviendrait infini à la limite inférieure $a$, sous les deux conditions suivantes

1° L'intégrale $\int_a^{a+\varepsilon} \varphi(x,y)\,dx$ tend vers zéro en même temps que $\varepsilon$, et cela uniformément par rapport à $y$.

2° La fonction $\varphi(x,y)$ est continue par rapport à $y$ dans le champ $(a+\varepsilon, b, \alpha, \beta)$ et cela quelque petit que soit $\varepsilon$.

Remarque. La première condition sera certainement remplie dans le cas particulier où on pourrait mettre $\varphi(x,y)$ sous la forme $\frac{M}{(x-a)^n}$, $M$ étant inférieur à un nombre fixe à partir de valeurs suffisamment petites de $x-a$ et $n$ inférieur à l'unité.

V. Prenons pour premier exemple l'intégrale

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin ax}{x}\,dx$$

On a ici

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-xy}\sin ax$$

Cette fonction $\varphi$ est continue par rapport à $x$ quelque grand que soit $x$ $(x > 0)$; la seconde condition est donc remplie. On a d'autre part

$$\int_0^l \varphi(x,y)\,dx = -\int_0^l e^{-xy}\sin ax\,dx$$

En appliquant à cette intégrale un raisonnement analogue à celui qu'on a fait pour $\int \frac{\sin ax}{x}\,dx$ (page 114), on voit sans peine qu'elle a une limite et qu'elle tend vers cette limite, uniformément par rapport à $y$, lorsque $l$ augmente indéfiniment. La première condition est donc remplie. On peut alors appliquer la règle, et on a

$$F'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin ax\,dx$$

$$= \left[-e^{-xy}\,\frac{y\sin ax + a\cos ax}{y^2+a^2}\right]_0^\infty .$$

ou simplement

$$F'(y) = \frac{a}{y^2+a^2}$$

Si maintenant on intègre cette relation par rapport à $y$, on aura

$$F(y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{y} + \text{const}.$$

Mais pour $y$ infini l'intégrale s'annule évidemment.

On a donc simplement:

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin ax}{x} dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{y}$$

Si on fait $y = 0$, on en déduit suivant que $a$ est $> 0$ ou $< 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}$$

2° Considérons l'intégrale

$$F(a) = \int_0^a \frac{f(x)}{\sqrt{a-x}} dx,$$

$f(x)$ est continu dans l'intervalle $(0, b)$ et $a$ est une variable pouvant se mouvoir dans cet intervalle. L'intégrale donnée porte sur une fonction qui devient infinie à la limite supérieure; d'ailleurs $F$ est fini car $x = a$ est un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction sous le signe.

Faisons d'abord $x = at$ pour rendre les limites constantes

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\sqrt{a}\, f(at)}{\sqrt{1-t}} dt$$

On a ici:

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{\sqrt{a}\, f(at)}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \quad \frac{2at f'(at) + f(at)}{2\sqrt{a}}$$

On voit immédiatement que, si petit que soit $\varepsilon$, cette fonction est continue par rapport à $t$, dans le champ $(0, t-\varepsilon, 0, b)$. D'autre part elle peut se mettre sous la forme $\frac{M}{(1-t)^n}$, $M$ étant limité et $n < 1$ $(n = \frac{1}{2})$. Donc les deux conditions imposées sont satisfaites et on peut écrire:

$$F'(a) = \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{2x f'(x) + f(x)}{\sqrt{a-x}} dx$$

Dans une question intéressante de mécanique on est amené à chercher comment il faut choisir $f$ pour que l'intégrale $F(a)$ soit indépendante de $a$. Il faut pour cela qu'on ait quelque soit $a$

$$\int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{a-x}} dx = 0$$

en posant $\qquad \varphi(x) = 2x f'(x) + f(x)$

Or il est clair que $\varphi(x)$ doit alors être nul, sinon on pourrait prendre $a$ assez petit pour que dans l'intervalle $(0, a)$ l'élément différentiel ait un signe constant. On a donc pour la condition cherchée:

$$2x f'(x) + f(x) = 0$$

$$\frac{2 f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{x} = 0$$

$$f^2(x) = \frac{C}{x} \qquad f(x) = \frac{C}{\sqrt{x}},$$

$C$ est une constante arbitraire.

VI. Intégration des différentielles totales. — A la dérivation sous le signe se rattache la solution de la question générale suivante. Etant donné l'expression différentielle

$$(1) \quad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots\ldots\ldots + X_n\, dx_n$$

où $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des fonctions des $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_n$, trouver une fonction $u$ des mêmes variables dont cette expression soit la différentielle totale.

La solution de cette question comporte le même degré de généralité que dans le cas d'une seule variable; en d'autres termes, la solution la plus générale se déduira d'une solution particulière par l'addition d'une constante arbitraire. En effet, si $u, v$ sont deux solutions quelconques, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = X_i$$

$$\frac{\partial (u - v)}{\partial x_i} = 0$$

et cela quel que soit $i$; $u - v$ ne dépendra d'aucune des variables; ce sera donc une constante. Réciproquement, si $u$ répond à la question, il en est évidemment de même de $u + C$, quel que soit $C$.

Observons de plus que si les fonctions $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ sont choisies arbitrairement, il n'y aura pas de solution : en effet, on doit avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = X_i \qquad \frac{\partial u}{\partial x_j} = X_j$$

Si nous supposons $i - j \neq 0$ et que nous différentions par rapport à $x_j$, $x_i$ il vient :

$$(2) \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \qquad i \neq j$$

Les fonctions $X$ doivent donc satisfaire aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations analogues à l'équation (2).

Nous allons voir, d'ailleurs, que cette condition nécessaire est en-

même temps suffisante et en la supposant remplie nous trouverons aisément la valeur de l'intégrale.

Prenons d'abord le cas de deux variables $x, y$. Soit

$$\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy$$

l'expression donnée, avec la condition

$$(3)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction inconnue $u$ doit d'abord avoir $\varphi(x,y)$ pour dérivée par rapport à $x$; cette première condition est vérifiée par l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx$$

où $y$ est considérée comme un paramètre. — Or deux fonctions qui ont même dérivée par rapport à $x$ ne pouvant évidemment différer que par une fonction de $y$ on aura

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + F(y).$$

$F$ étant une fonction inconnue; nous devrons déterminer à présent $F(y)$ par la condition qu'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(x,y)$$

or si nous appliquons la règle de dérivation sous le signe, cette dernière condition donne

$$\psi(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx + F'(y)$$

Tenant compte de la condition (3) nous aurons

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = \psi(xy) - \psi(x_0 y)$$

Portons cette valeur dans la relation précédente, nous aurons en réduisant

$$F'(y) = \psi(x_0 y)$$

d'où

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0 y)\,dy$$

ainsi nous avons en même temps montré que la condition (3) est suffisante et détermine la fonction inconnue.

Le calcul est le même pour le cas de plusieurs variables. Soit l'expression

$$\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n)\,dx_1 + \varphi_2(x_1 x_2 \dots x_n)\,dx_2 + \dots\dots + \varphi_n(x_1 x_2 \dots x_n)\,dx_n$$

Je dis que l'intégrale générale existera si on a

$$(2')\quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \qquad i-j \neq 0$$

et sera égale à la fonction suivante où $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ sont des arbitraires

$$u = \int_{\alpha_1}^{x_1} \varphi_1 (x_1 x_2 \quad x_n)\, dx_1 + \int_{\alpha_2}^{x_2} \varphi_2 (\alpha_1 x_2 x_3 \quad x_n) dx_2 + \dots + \int_{\alpha_n}^{x_n} \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} x_n)\, dx_n$$

Supposons en effet que le théorème soit démontré pour $(n-1)$ variables $x_1 x_2 \quad x_{n-1}$

Dans ce cas si nous considérons $x_n$ comme un paramètre, les relations (2') ayant lieu en particulier pour toutes les valeurs de $i$ et $j$ comprises entre 1 et $(n-1)$, la fonction

$$(4)\ V = \int_{\alpha_1}^{x_1} \varphi_1 (x_1 x_2 \quad x_n)\, dx_1 + \int_{\alpha_2}^{x_2} \varphi_2 (\alpha_1 x_2 \quad x_n) dx_2 + \dots + \int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}} \varphi_{n-1} (\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_{n-2} x_{n-1} x_n)\, dx_{n-1}$$

Sera la plus générale de toutes celles qui satisfont aux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \varphi_1 \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \varphi_2 \quad \dots \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = \varphi_{n-1}$$

Donc la plus générale des fonctions de $n$ variables qui satisfasse aux conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \varphi_1 \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \varphi_2 \quad \dots \dots \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} = \varphi_{n-1} \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = \varphi_n$$

sera $V + F(x_n)$ $F$ étant une constante arbitraire de $x_n$. Il reste à la déterminer de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\partial V}{\partial x_n} + F'(x_n) = \varphi_n (x_1 x_2 \dots x_n)$$

Remplaçons $V$ par sa valeur (4) il vient :

$$\varphi_n (x_1 x_2 \dots x_n) - F'(x_n) = \int_{\alpha_1}^{x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} (x_1 x_2 \dots x_n)\, dx_1 + \dots + \int_{\alpha_i}^{x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n)\, dx_i + \dots + \int_{\alpha_{n-1}}^{x_{n-1}} \varphi_{n-1} (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{n-2} x_{n-1} x_n) dx_{n-1}$$

Si nous tenons compte de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$ chacune des intégrations se fait immédiatement et on a :

$$\begin{aligned} \varphi_n (x_1 x_2 \dots x_n) - F'(x_n) = {} & \varphi_n (x_1 x_2 \quad x_n) - \varphi_n (\alpha_1 x_1 x_2 \quad x_n) \\ & + \varphi_n (\alpha_1 x_2 - x_n) - \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 \dots x_n) \\ & - - - - - - - - - - - - - - \\ & + \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_{n-2} x_{n-1} x_n) - \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_{n-1} x_n) \end{aligned}$$

D'où

$$F'(x_n) = \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_{n-1} x_n)$$

et en intégrant

$$F(x_n) = \int_{\alpha_n}^{x_n} \varphi_n (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_{n-1} x_n)\, dx_n$$

ce qui démontre le théorème pour $n$ variables. Le théorème étant vrai pour deux variables sera donc tout-à-fait général.

Remarque. — Il figure dans la solution $\underline{n}$ constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$; mais cela n'a lieu qu'en apparence, d'après ce que nous avons dit plus haut; il n'y a en réalité qu'une arbitraire, laquelle est une fonction déterminée de $\alpha_1, \alpha_2 \quad \alpha_n$. En effet $F$ étant une solution quelconque, on a :

$$u = F(x_1 x_2 \quad x_n) + C$$

Si on détermine $C$ de telle sorte que la fonction s'annule pour $x_1 = \alpha_1 \; x_2 = \alpha_2 \quad x_n = \alpha_n$ il vient

$$C = -F(\alpha_1 \alpha_2 \quad \alpha_n) \qquad u = F(x_1 x_2 \quad x_n) - F(\alpha_1 \alpha_2 \; \alpha_n)$$

et la solution trouvée est la seule qui s'annule pour $x_i = \alpha_i$. $(i = 1, 2 \quad n)$.

---

# Dix-neuvième Leçon.

## Détermination d'Intégrales définies. — Applications.

I. Détermination directe — Lorsqu'on sait obtenir une fonction primitive de $f(x)$, on obtient l'intégrale définie en appliquant la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Nous donnerons quelques exemples :

1° On a : $\qquad (1) \displaystyle\int_0^1 x^p \, dx = \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right)_0^1 = \frac{1}{p+1}$

Cette fraction si simple conduit à des conséquences intéressantes. Par exemple, si on y donne à $p$ les valeurs successives $1, 2, \cdots p$, et qu'on ajoute on trouve

$$\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x} dx = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{p}$$

ce qui donne, sous forme d'intégrale définie, la somme des $p$ premiers termes de la série harmonique.

Remplaçons $p$ par $p+1$ dans la relation (1) et retranchons.

$$\int_0^1 (x^p - x^{p+1})\,dx = \int_0^1 x^p(1-x)\,dx = \frac{1}{p(p+1)}$$

Dans cette dernière relation changeons $p$ et $p+1$ et retranchons

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^2 dx = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p}\,\frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

et ainsi de suite, de proche en proche on aurait

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \frac{1.2..(q-1)}{p(p+1)\dots(p+q-1)} = \frac{(q-1)!\,(p-1)!}{(p+q-1)!}$$

Relation importante dont nous ferons tout à l'heure une application

2° Comme second exemple prenons l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$$

On peut obtenir l'intégrale indéfinie, puis faire les substitutions $x=\alpha$, $x=\beta$ et retrancher. — Il est plus commode de recourir à un changement de variables ; posons

$$x = \alpha\cos^2 t + \beta\sin^2 t$$

$$dx = 2(\beta-\alpha)\sin t\cos t\, dt$$

Lorsque $t$ varie de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, $x$ varie dans le même sens de $\alpha$ à $\beta$. On aura donc :

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\beta-\alpha)\sin 2t\, dt = \pi$$

3° Dans le cas où la fonction $f(x)$ dépend d'un nombre entier et de telle sorte qu'il y ait lieu de recourir à une formule de réduction, il arrive fréquemment que cette formule de réduction est plus simple que pour l'intégrale indéfinie. Posons, par exemple :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

La formule de réduction contient une partie intégrée qui s'annule aux deux limites, on a donc simplement :

$$n\, u_n = (n-1)u_{n-2}$$

Si on applique cette formule autant de fois que possible il vient :

$$u_{2p} = \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots 2p}\, u_0 = \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots 2p}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$u_{2p+1} = \frac{2.4.6\dots 2p}{1.3.5\dots 2p+1}\, u_1 = \frac{2.4.6\dots 2p}{1.3.5\dots(2p+1)}$$

car on a évidemment $u_0 = \frac{\pi}{2}$, $u_1 = 1$.

Pour les valeurs entières de $n$, $u_n$ est alternativement commensurable et incommensurable. On déduit des formules précédentes une conséquence intéressante. Il est d'abord aisé de voir que $u_n$ diminue quand $n$ augmente;

On a en effet:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (\sin x - 1)\, dx$$

et cette intégrale, composée d'éléments tous négatifs, est négative. Si alors nous remplaçons les $u$ par leurs valeurs dans la double inégalité

$$u_{2p+1} < u_{2p} < u_{2p-1}$$

Il vient:

$$\frac{2.4.6.\dots\dots 2p}{1.3.5\dots(2p+1)} < \frac{1.3.5.\dots\dots(2p-1)}{2.4.6\dots\dots 2p}\frac{\pi}{2} < \frac{2.4.6.\dots(2p-2)}{1.3.5.\ (2p-1)}$$

On en conclut

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\frac{2p-2}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p-1} > \frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p+1}$$

Le rapport des deux produits est $\frac{2p}{2p+1}$ et tend vers 1 quand $p$ augmente indéfiniment. Ces deux produits ont donc pour limite commune $\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\dots\frac{2p}{2p-1}\cdot\frac{2p}{2p+1}\dots\dots$$

Cette formule remarquable, qui donne $\pi$ sous la forme d'un produit d'un nombre illimité de facteurs, est connue sous le nom de formule de Wallis.

Remarque. Les formules précédentes donnent sans difficulté:

$$u_{2p}\cdot u_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad u_{2p}\cdot u_{2p-1} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad u_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}\cdot u_{2p-1}$$

On tire en particulier de la première

$$(u_{2p+1})^2 = \frac{1}{2p+1}\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}}$$

Si $p$ augmente indéfiniment $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}}$ tend vers l'unité d'après ce qui précède; on a donc

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{p=\infty}\left(u_{2p+1}.\sqrt{p+\tfrac{1}{2}}\right)$$

Si d'autre part nous faisons $\cos x = t$

$$u_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\, dx = -\int_1^0 (1-t^2)^p dt = \int_0^1 (1-t^2)^p dt$$

et si enfin nous remplaçons $t$ par $\frac{x}{\sqrt{p}}$.

$$u_{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{p}} \left(1 - \frac{x^2}{p}\right)^p dx$$

en faisant croître $p$ indéfiniment il est naturel de penser que l'intégrale du second membre aura pour limite $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Si nous rapprochons ce résultat du précédent il vient

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

C'est la formule que nous avons déjà obtenue par un raisonnement plus rigoureux.

4° Les trois intégrales

$$A = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos px \cos qx\, dx \qquad B = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin px \cos qx\, dx \qquad C = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin px \sin qx\, dx$$

jouent un rôle important dans la théorie des séries trigonométriques, que nous aborderons prochainement. On a sans difficulté, quand $p - q \neq 0$

$$2A = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\right] dx = 0$$

$$2B \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sin(p+q)x + \sin(p-q)\right] dx = 0$$

$$2C \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\right] dx = 0$$

car l'intégrale de $\sin mx$ ou de $\cos mx$ est toujours un sinus ou un cosinus, à un facteur constant près, et reprend la même valeur quand $x$ augmente de $2\pi$; donc une pareille intégrale est nulle pour tout champ d'intégration égal à $2\pi$. – Lorsque $p = q$, on a :

$$2A = \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi \qquad A = \pi$$

$$2B = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2x\, dx = 0 \qquad B = 0$$

$$2C = \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi \qquad C = \pi.$$

**II – Changement de variable.** – Lorsqu'on a recours a un changement de variable, il faut toujours s'assurer qu'on est bien dans les conditions où ce changement peut s'opérer conformément à la règle que nous avons donnée. 1° Prenons, par exemple,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}.$$

et posons : $t = \operatorname{tg} x$ $\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\quad \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1+t^2}{a^2+b^2t^2}$

$t$ s'annule pour $x=0$ et pour $x=\pi$ en appliquant la règle sans précautions on aurait à prendre une intégrale entre deux limites nulles ; on obtiendrait donc 0, ce qui est absurde, tous les éléments de l'intégrale étant positifs.

Cela tient à ce que la nouvelle variable $t$ n'est pas une fonction continue de $x$, elle devient infinie pour $x = \frac{\pi}{2}$ ; si on coupe l'intervalle donné en deux autres $(0, \frac{\pi}{2})$ $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ on est conduit à

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2+b^2t^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{a^2+b^2t^2}$$

et $t$ va ainsi constamment en croissant dans chacun des deux champs d'intégration.

Le calcul s'achève sans difficulté ; si on change $t$ en $-t$ dans la seconde intégrale, elle reproduit la première on a alors

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 + b^2\sin^2 x} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2+b^2t^2} = \frac{\pi}{ab}$$

Remarque. — Lorsque la fonction $f(x)$ est paire on a

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Car on peut écrire

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Or si on fait $x=-t$ dans la première :

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

La même équation

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx$$

montre que si $f(x)$ est une fonction impaire $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$. Ces deux remarques sont d'un usage fréquent.

2° Une autre difficulté se présente quand la nouvelle variable ne varie pas toujours dans le même sens. Soit à transformer, quand elle existe, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

par la formule

$$ax + \frac{b}{x} = t$$

Supposons $a$ et $b$ positifs. Quand $x$ croît à partir de zéro, $t$ décroît de

l'infini jusqu'à un minimum atteint pour

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

puis croît indéfiniment. On a

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2-4ab}}{2a}$$

$$dx = \left(1 \pm \frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right) \frac{dt}{2a}$$

les signes se correspondant dans les deux relations. Dans l'intervalle d'intégration $(\infty, 2\sqrt{ab})$, $\frac{dx}{dt}$ devant être négatif, on doit prendre le signe inférieur ; le signe supérieur, au contraire, convient à l'intervalle $(2\sqrt{ab}, \infty)$, d'où

$$\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t) \left[\frac{t+\sqrt{t^2-4ab}}{2a\sqrt{t^2-4ab}} + \frac{t-\sqrt{t^2-4ab}}{2a\sqrt{t^2-4ab}}\right] dt$$

ou

$$\int_{2\sqrt{ab}}^{\infty} \frac{f(t)\, t\, dt}{a\sqrt{t^2-4ab}}$$

Si nous posons $t^2-4ab = u^2$ nous en déduisons l'égalité

$$\frac{1}{a}\int_0^{\infty} f\sqrt{u^2+4ab)}\, du = \int_0^{\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) dx$$

Supposons par exemple qu'on prenne

$$f\left(ax+\frac{b}{x}\right) = e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}$$

nous aurons, en appliquant la formule précédente

$$e^{-2ab}\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+4ab)} du = \frac{1}{a}\, e^{-4ab}\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$$

On en conclut, la dernière intégrale étant égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2-\frac{b^2}{x^2}} dx = \frac{e^{-2ab}}{2a}\sqrt{\pi}$$

## III. _ Intégrales Eulériennes

_ Les deux intégrales suivantes où $p$ et $q$ sont positifs

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

présentent un intérêt particulier ; on les désigne sous le nom d'intégrales eulérien

de première et de seconde espèce.

On voit d'abord aisément que $\Gamma(p)$ a une valeur finie. Ecrivons en effet

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$$

Dans la 2e intégrale la fonction sous le signe reste finie, la limite supérieure devient infinie ; or on sait que $x^\lambda e^{-x}$ tend vers 0 quelque soit le nombre positif $\lambda$, quand $x$ croit indéfiniment ;

Donc $x^n f(x)$ tendra ici vers 0 pour une infinité de valeurs de $n$ inférieures à 1. $[\lambda = n+(p-1)]$ et nous savons qu'alors l'intégrale conserve une valeur finie. – La première intégrale a des limites finies, mais son élément devient infini pour $x=0$ si $p<1$. On a ici

$$f(x) = x^{p-1}e^{-x} = x^n e^{-x}$$

On sait que l'intégrale est finie si $n+1>0$. Or ici $n+1=p$ donc l'intégrale est bien finie. On s'assure de même que $B(p,q)$ est finie pour toutes les valeurs positives de $p$ et de $q$.

Nous nous occuperons d'abord de l'intégrale de seconde espèce. L'intégration par parties donne

$$\int x^{p-1}e^{-x}dx = \frac{1}{p}\cdot x^p e^{-x} + \frac{1}{p}\int x^p e^{-x}dx$$

D'où en rétablissant les limites

$$(1)\quad \Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

On en tire une première conséquence. – Si $n$ est un nombre entier on a

$$\Gamma(n) = 1.2.3.\ldots(n-1)$$

Si $p$ n'est pas entier on peut abaisser sa valeur successivement de $K$ unités, $K$ étant la partie entière de $p$. La formule de réduction (1) donne

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2)\ldots(p-K)\Gamma(p-K)$$

$p-K$ est la partie fractionnaire de $p$. Le cas où $p-K=\frac{1}{2}$ conduit à une intégrale déjà rencontrée. On a en effet

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$$

si nous faisons $x=t^2$ $dx=2t\,dt$

$$(2)\quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1}e^{-t^2}2t\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

Nous avons vu §I qu'on a pour $p$ et $q$ entiers :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{1.2\ldots(q-1)}{p(p+1)\ldots(p+q-1)}$$

On en déduit immédiatement :

$$(3)\quad B(p,q) = \frac{1.2.\ldots.(q-1).1.2\ldots(p-1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots(p+q-1)} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Cette formule qui réduit l'intégrale de première espèce à celle de seconde espèce est exacte quand $p$ et $q$ sont des valeurs quelconques ; on le démontre de la manière suivante. Faisons la substitution

$$x = \frac{t}{1+t} \quad 1-x = \frac{1}{1+t} \qquad dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$$

il vient

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p-1+q-1+2}} = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt$$

Si dans $\Gamma(p)$ on change $x$ en $my$ on a : $(m>0)$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty m^{p-1}.\,y^{p-1}e^{-my}.\,m\,dy = m^p\int_0^\infty e^{-my}.\,y^{p-1}\,dy$$

D'où on tire la formule

$$(4)\quad \frac{1}{m^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty y^{p-1}e^{-my}\,dy$$

On a alors en revenant à la formule précédente et faisant $m=1+t$

$$\Gamma(p+q).\,B(p,q) = \int_0^\infty dt\left[\int_0^\infty e^{-(1+t)y}\,y^{p+q-1}t^{p-1}\,dy\right]$$

On est ainsi ramené à une intégrale double dont tous les éléments sont positifs ; on a

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q) = \int_0^\infty\int_0^\infty y^{p+q-1}.\,t^{p-1}.\,e^{-(1+t)y}\,dt\,dy$$

On peut évaluer cette intégrale de la manière suivante

$$\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\,dy\int_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt$$

Or la première intégration donne d'après la formule (4) $\frac{1}{y^p}\,\Gamma(p)$. On a donc :

$$\Gamma(p+q)\,B(p,q) = \Gamma(p)\int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(p)\,\Gamma(q)$$

c'est la formule que nous voulions établir.

On en déduit d'abord que $B(p,q) = B(q,p)$ ; comme seconde conséquence faisons $q = 1-p$. Nous aurons, pour $p$ compris entre 0 et 1,

$$B(p,1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx,$$

et si nous employons une forme donnée à $B(p,q)$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt$$

Or l'intégrale du second membre peut s'obtenir sans difficulté. Posons en effet $t = x^{2n}$, il vient :

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2np-1}}{1+x^{2n}}\,dx$$

Supposons d'abord que $2np-1$ soit un nombre entier pair $2m$ ; en d'autres termes admettons que $p$ soit commensurable et de la forme

$$p = \frac{2m+1}{2n}$$

auquel cas $m$ devra être inférieur à $n$ puisque $p < 1$ ; nous aurons alors

$$2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$$

puisque la fonction sous le signe est paire ; nous sommes ramenés à une intégrale de la forme de celles qui ont été considérées (page 115). Les racines de $1 + x^{2n} = 0$ sont

$$x_K = \cos(2K+1)\frac{\pi}{2n} + i\sin(2K+1)\frac{\pi}{2n}$$

Le résidu relatif à une racine $x_K$ s'obtient en remplaçant $x$ par $x_K$ dans $\dfrac{x^{2m}}{2n\,x^{2n-1}}$ : c'est donc

$$A_K + i\,B_K = \frac{1}{2n}\,x_K^{\,2m-2n+1} = \frac{-1}{2n}\left[\cos(2K+1)\alpha + i\sin(2K+1)\alpha\right]$$

En posant
$$\alpha = \frac{2m+1}{2n}\pi = p\pi$$

on aura donc

$$B_K = \frac{-1}{2n}\sin(2K+1)\alpha$$

et il faut donner à $K$ la suite de valeurs $0, 1, 2 \ldots (n-1)$. On aura alors (page )

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = +\frac{\pi}{n}\left[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots\ldots + \sin(2n-1)\alpha\right] = \frac{\pi}{n}\,\delta$$

Enfin on peut écrire

$$2\,\delta\,\sin\alpha = (1-\cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \ldots\ldots\ldots + \left[\cos(2n-2)\alpha - \cos 2n\alpha\right] = 1 - \cos 2n\alpha$$

ou
$$2\,\delta \sin\alpha = 1 - \cos(2np-1)\pi = 2$$

On aura donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\pi}{n \sin p\pi}$$

Et enfin
$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

D'où
$$(5)\quad \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

Cette formule permet de ramener le calcul de $\Gamma(p)$ au cas où $p$ est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Nous l'avons établie en supposant $p$ de la forme $\frac{2m+1}{2n}$, $m$, $n$ étant des entiers; mais on peut former une suite indéfinie de fractions de cette forme ayant pour limite un nombre fixe donné arbitrairement; comme d'ailleurs les deux membres de l'équation (5) sont des fonctions continues de $p$, cette équation se trouve démontrée pour toute valeur de $p$ comprise entre 0 et 1.

---

# Vingtième Leçon

## Intégrales définies (Suite) — Séries trigonométriques.

1. Exemples d'intégrales définies. — Nous avons vu dans ce qui précède comment l'intégration et la dérivation sous le signe interviennent dans l'étude et aussi dans la détermination de certaines intégrales définies. Nous en donnerons encore quelques exemples.

1° En différentiant $p$ fois de suite l'égalité
$$(1)\quad \frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n\,dx$$
par rapport à $n$, on a l'intégrale nouvelle
$$\int_0^1 x^n (Lx)^p\,dx = (-1)^p\,\frac{1.2.3\ldots\ldots p}{(n+1)^{p+1}}$$

2° De l'intégrale
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

on déduit, en posant $x = t\sqrt{\alpha}$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t^2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

Différentions $n$ fois par rapport à $\alpha$, ce que l'on reconnaît aisément être permis, et nous aurons, en remplaçant $t$ par $x$ sous le signe d'intégration

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1.\ 3\ .\ 5\ .\ \dots\ (2n-1)}{(2\sqrt{a})^{\frac{n+1}{2}}}\sqrt{\pi}$$

3° L'intégrale (1) multipliée par $dn$ et intégrée de $n = a$ à $n = b$ donne

$$\int_a^b dn \int_0^1 x^n\,dx = L\,\frac{b+1}{a+1}$$

Or on peut écrire le premier membre

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^n\,dn = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{L\,x}\,dx$$

On a donc enfin

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{L\,x} = L\,\frac{b+1}{a+1}$$

II Application. Nous donnerons une dernière application de la dérivation sous le signe de l'Intégrale définie.

$$I_n = \int_0^1 (1-z^2)^n \cos zx\,dz$$

$I_n$ est une fonction de $x$ et on a :

$$2\,\frac{dI_n}{dx} = -\int_0^1 (1-z^2)\sin zx\,2z\,dz$$

d'où en intégrant par parties

$$2\,\frac{dI_n}{dx} = \left[\frac{(1-z^2)^{n+1}}{n+1}\sin zx\right]_0^1 - \frac{x}{n+1}\,(1-z^2)^{n+1}\cos zx\,dz.$$

ou enfin

$$\frac{dI_n}{dx} = \frac{-x}{2n+2}\cdot I_{n+1} \qquad I_{n+1} = -\frac{2n+2}{x}\quad\frac{dI_n}{dx} \quad (2)$$

c'est une formule de réduction. Considérons maintenant la fonction de $x$ définie par l'égalité

$$A_n = \frac{x^{n+1}}{2.4.6\dots\dots 2n}\cdot I_n$$

nous aurons en différentiant et remplaçant $\frac{dI_n}{dx}$ par la valeur trouvée plus haut:

$$\frac{dA_n}{dx} = \frac{(2n+1)x^{2n}}{2.4.6\ldots 2n} \cdot I_n - \frac{x^{2n+2}}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+2} \cdot I_{n+1}$$

ou simplement :

$$(3)\quad \frac{dA_n}{dx} = \frac{2n+1}{x} A_n - \frac{A_{n+1}}{x}$$

On en déduit immédiatement que $A_n$ est de la forme

$$A_n = P_n \cos x + Q_n \sin x$$

$P_n$ et $Q_n$ étant deux polynômes entiers en $x$. En effet la formule (3) montre que si cela a lieu pour $A_n$ cela aura lieu pour $A_{n+1}$, on aura d'ailleurs

$$(4)\quad \begin{aligned} P_{n+1} &= (2n+1) P_n - x Q_n - x P'_n \\ Q_{n+1} &= (2n+1) Q_n + x P_n - x Q'_n \end{aligned}$$

Or on a sans difficulté

$$I_0 = \frac{1}{x} \sin x \text{ d'où } I_1 = \frac{2}{x^3} \sin x - \frac{2}{x^2} \cos x$$

d'après la formule (2) ; on en déduit

$$A_1 = \sin x - x \cos x \qquad P_1 = -x \quad Q_1 = 1$$

Si on applique alors, de proche en proche, les formules (4) on voit que les polynômes $P_n$ $Q_n$ sont à coefficients entiers. De plus si $n$ est pair et égal à $2m$, $Q_n$ ne renferme que des puissances paires de $x$ et est du degré $m$ en $x^2$.

M.r Hermite s'est servi des fonctions $A_n$ pour démontrer que le carré du nombre $\pi$ et par suite le nombre $\pi$ lui-même sont incommensurables (Journal de Crelle 1873.)

Faisons $x = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression générale de $A_{2m}$, qui donne :

$$Q_{2m}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{2.4.6\ldots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^{n+1} \cos \frac{\pi z}{2}\, dz$$

Supposons $\frac{\pi^2}{4} = \frac{b}{a}$ le premier membre serait de la forme $\frac{E}{a^m}$, $E$ étant un nombre entier et on aurait en multipliant par $a^m$ :

$$E = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot b^m \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-z^2)^{n+1} \cos \frac{\pi z}{2}\, dz$$

Or une pareille égalité est impossible, le second membre en effet ne peut être entier pour toute valeur de $n$ puisque l'intégrale et le facteur $\frac{b^m}{2.4.6\ldots 2n}$ tendent vers 0 quand $n$ augmente indéfiniment. Donc enfin $\pi^2$ ne peut pas être commensurable.

III. Intégration par les séries. — Si on peut développer la fonction sous le signe en une série qui soit uniformément convergente dans les limites d'intégration, on pourra d'après le théorème général démontré page 51, intégrer

séparément chaque terme ce qui fournira un développement de l'intégrale.

1° Soit par exemple l'intégrale elliptique de première espèce, complète:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 x}}$$

$K^2$ étant supposé inférieur à 1, on peut développer $(1-K^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ en série de la manière suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 x}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot K^2 \sin^2 x + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{K^4 \sin^4 x}{4} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{K^6 \sin^6 x}{2^6} + \dots$$

Cette série est uniformément convergente entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; si nous l'intégrons entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ en nous rappelant qu'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\, dx = \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2.4.6 \dots 2p} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

nous aurons:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 x}} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 K^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 K^6 + \dots \right]$$

2° Il arrive souvent qu'on peut sommer la série trouvée et par suite obtenir l'intégrale sous forme finie. – Soit par exemple l'intégrale suivante (Bertrand, Calc. Intégral p. 150)

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

On a d'abord

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \cos^6 x + \dots$$

on est ramené par suite à une série d'intégrales de la forme suivante

$$V_n = \int_0^{\pi} x \sin x \cos^{2n} x\, dx$$

En intégrant par parties on obtient immédiatement $V_n = \frac{\pi}{2n+1}$. On aura donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

La série entre parenthèse étant égale à $\frac{\pi}{4}$ ainsi que nous l'avons

démontré (p. 62).

IV. — Intégrales de Fourier et de Dirichlet. — Nous étudierons pour terminer, certaines intégrales qui jouent le rôle principal dans l'importante question du développement d'une fonction en série trigonométrique, question que nous traiterons tout à l'heure. Soit d'abord l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin n x}{\sin x} dx$$

où $n$ est entier positif ; on a

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+2)x - \sin n}{\sin x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n+1)x \, dx =$$

$$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1} \sin (n+1) \frac{\pi}{2} .$$

Si $n$ est impair la différence est nulle, $I_n$ reste constant et on a en général, $I_1$ étant égal à $\frac{\pi}{2}$,

$$I_{2p+1} = \frac{\pi}{2} .$$

Si au contraire $n$ est pair et égal à $2p$, on a

$$I_{2p+2} = I_0 + 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \quad + \frac{(-1)^p}{2p+1}\right)$$

$I_0$ est nul évidemment ; si on suppose que $p$ augmente indéfiniment la parenthèse a pour limite $\frac{\pi}{4}$. Donc $I_{2p+2}$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$.

En résumé $I_n$ est constamment égal à $\frac{\pi}{2}$ si $n$ est impair ; si $n$ est pair cette intégrale varie avec $n$ et a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand $n$ augmente indéfiniment.

2° Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_0^b \frac{\sin n x}{x} dx$$

où $b$ est un nombre positif quelconque ; nous nous proposons de démontrer qu'elle est comprise entre $0$ et $\pi$. En effet faisons la substitution $nx = t$, il vient

$$\int_0^{nb} \frac{\sin t}{t} dt$$

Si $K$ est le quotient par défaut de $nb$ par $\pi$, nous pourrons comme

nous l'avons déjà fait (page 114) décomposer l'intégrale en une somme d'autres

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt \ldots + \int_{(K-1)\pi}^{K\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_{K\pi}^{h} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Ces intégrales sont alternativement positives et négatives et décroissent en valeur absolue. La première étant positive, il en est de même de la somme. (La dernière intégrale est, il est vrai, incomplète, mais elle n'en est que moindre en valeur absolue). Ainsi notre intégrale est positive et inférieure à la première intégrale partielle ; on a donc

$$0 < \int_0^{nb} \frac{\sin t}{t}\,dt < \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Or $\frac{\sin t}{t}$ est constamment inférieur à l'unité quand $t$ varie de $0$ à $\pi$. On a donc bien

$$0 < \int_0^{h} \frac{\sin nx}{x}\,dx < \pi$$

ce que nous voulions démontrer. Nous avons supposé $nb > \pi$ s'il en était autrement l'inégalité en question serait évidente. Observons enfin que notre intégrale tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $n$ augmente indéfiniment, comme le montre la substitution $x = nt$.

3° Soit maintenant l'intégrale suivante, appelée Intégrale de Dirichlet

$$J = \int_0^{\pi} \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x}\,dx$$

Supposons $\varphi(x)$ continue, finie et constamment stationnaire ou décroissante entre $0$ et $\pi$; cherchons quelle est, dans ces conditions, la limite de $J$ quand $n$ augmente indéfiniment. Prenons d'abord pour limites, deux nombres $a$ et $b$ tels qu'on ait :

$$0 < a \leqq b \leqq \pi$$

Les hypothèses faites sur $\varphi(x)$ sont applicables à $\frac{\varphi(x)}{x}$ dans l'intervalle $(a\,b)$; nous pouvons donc appliquer le second théorème de la moyenne et écrire :

$$\int_a^b \varphi(x)\,\frac{\sin nx}{x} = \frac{\varphi(a)}{a}\int_a^{\xi} \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\,\frac{\varphi(a)}{a}\left(\cos na - \cos n\xi\right)$$

La dernière parenthèse est comprise entre $-2$ et $+2$; donc l'intégrale

considérée tend vers 0 quand $n$ croît indéfiniment.

Revenons à l'intégrale J. Soit $b$ un nombre quelconque compris entre 0 et $\pi$

$$J = \int_0^b \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx + \int_b^\pi \varphi(x) \frac{\sin n(x)}{x} dx$$

Appliquons à la première intégrale le second théorème de la moyenne sous la forme générale :

$$J = \varphi(0) \int_0^\xi \frac{\sin nx}{x} dx + \varphi(b) \int_\xi^b \frac{\sin nx}{x} dx + \int_b^\pi \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx.$$

Remarquons qu'en supposant les conditions de continuité remplies pour toutes les valeurs de $x$ appartenant à l'intervalle $(0\, b)$, limites comprises, $\varphi(0)$ est la limite de $\varphi(x)$ quand $x$ tend vers 0 par des valeurs positives ; à ce titre et conformément à une notation introduite par Dirichlet nous écrirons $\varphi(+0)$ au lieu de $\varphi(0)$ et de même $\varphi(b-0)$ au lieu de $\varphi(b)$, cette notation ayant l'avantage de ne rien supposer sur la fonction en dehors de l'intervalle $(0\, b)$. nous aurons alors

$$J = \varphi(+0) \int_0^b \frac{\sin nx}{x} dx + \left[\varphi(b-0) - \varphi(+0)\right] \int_\xi^b \frac{\sin nx}{x} dx + \int_b^\pi \varphi(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

Or $\varphi(x)$ étant continue on peut choisir $b$ assez petit pour qu'on ait :

$$|\varphi(b-0) - \varphi(+0)| < \varepsilon$$

$\varepsilon$ étant un nombre donné. D'autre part $\int^b \frac{\sin nx}{x} dx$ a pour limite $\frac{\pi}{2}$. enfin la dernière intégrale a pour limite 0, ainsi que nous venons de le voir, tandis que la seconde $\int_\xi^b \frac{\sin nx}{x} dx$ est comprise entre 0 et $\pi$. On a donc pour des valeurs suffisamment grandes de $n$ :

$$\left| J - \frac{\pi}{2} \varphi(+0) \right| < \varepsilon\, \varphi(+0) + \varepsilon' \pi + \varepsilon''$$

$\varepsilon$, $\varepsilon'$ $\varepsilon''$ étant trois nombres positifs aussi petits que l'on voudra ; donc enfin

$$\text{Lim. } J = \frac{\pi}{2} \varphi(+0)$$

Cette démonstration est celle de M. Bonnet (Journal de Liouville T. XIV, p. 254) (Voir aussi le mémoire du même auteur sur la théorie générale des séries).

Il est facile de lever les restrictions imposées à la fonction $\varphi(x)$. Supposons l'intervalle $(0\, \pi)$ décomposé en intervalles partiels, en nombre fini, tels que dans chacun d'eux $\varphi(x)$ soit continue, de signe constant et varie dans le

même sens, $(0a)$. $(a,b)$ - $(l\pi)$. Tous les intervalles à partir du second donnent des intégrales partielles qui ont pour limite 0, le premier intervalle $(0a)$ donne $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$. Le théorème s'applique donc sans modification.

Supposons que $\varphi(x)$ devienne infinie pour certaines valeurs isolées de $x$ entre 0 et $\pi$. Nous pourrons d'abord déterminer des intervalles partiels, en nombre fini, tels que le premier $(0,a)$ ne contienne aucune des valeurs en question et que chacun des autres en contienne une au plus. Le premier intervalle donnera toujours, pour $n$ infini la limite trouvée plus haut. Pour l'intervalle $(ab)$ on aura, $\alpha$ étant la valeur critique

$$\int_a^b = \int_a^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{b}$$

$\varepsilon$ étant fixe, si $n$ augmente, la première et la quatrième intégrale tendent vers 0.

La seconde peut s'écrire

$$\frac{\sin n\xi}{\xi}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\varphi(x)\,dx$$

Or supposons que l'intégrale $\int^{\alpha}\varphi(x)dx$ ait une valeur finie; on peut dans ce cas choisir $\varepsilon$ assez petit pour que

$$\left|\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\varphi(x)\,dx\right| < \eta$$

$\eta$ étant aussi petit que l'on voudra; d'ailleurs $\frac{\sin n\xi}{\xi}$ est inférieur à $\frac{1}{\alpha-\varepsilon}$, ($\xi$ étant compris entre $\alpha-\varepsilon$ et $\alpha$). En raisonnant de même sur la 3e intégrale on aura enfin, pour $n$ suffisamment grand:

$$\left|\int_a^b\varphi(x)\frac{\sin nx}{x}dx\right| < \eta\left(\frac{1}{\alpha-\varepsilon}+\frac{1}{\alpha}\right)+\eta'+\eta''$$

$\eta, \eta', \eta''$ étant aussi petits qu'on veut, et le premier membre étant indépendant de $\varepsilon$, ce premier membre a pour limite 0.

Donc le théorème s'applique encore pourvu que l'intégrale $\int^{\alpha}\varphi(x)dx$ soit finie pour toute valeur $\alpha$ rendant $\varphi(x)$ infinie.

4° Si nous faisons

$$\varphi(x) = f(x)\frac{x}{\sin x}$$

$f(x)$ satisfaisant aux restrictions imposées à $\varphi(x)$, nous aurons l'intégrale de Fourier:

$$H = \int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$$

Mais comme la fonction $\varphi(x)$ devient infinie pour $x=\pi$, nous ne pouvons rien affirmer dans le voisinage de cette limite. Posons

$$H=\int_0^a f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx+\int_a^\pi f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$$

La première intégrale a pour limite $(n=\infty)$ $\frac{\pi}{2}f(+0)$ car $\frac{x}{\sin x}$ est égal à 1 pour $x=0$. Pour la seconde intégrale, posons $x=\pi-z$

$$\int_a^\pi f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx=+\int_0^{\pi-a} f(\pi-z)\,\frac{\sin nz}{\sin z}\,dz$$

et pour $n$ infini la limite est $f(\pi-0)$. On a donc enfin

$$\lim\,(x\cdot\infty)\int_0^\pi f(x)\,\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[f(+0)+f(\pi-0)\Big]$$

C'est la formule donnée par Fourier, et démontrée rigoureusement par Dirichlet en 1829. (Journal de Crelle, Tome IV. Mémoire sur la convergence des séries trigonométriques). — Rappelons pour préciser, que $f(x)$ est une fonction astreinte seulement aux conditions suivantes:

1° Si elle devient infinie pour des valeurs isolées de $x$ entre $0$ et $\pi$. l'intégrale

$$\int^\alpha f(x)\,dx$$

doit rester finie, $\alpha$ étant l'une quelconque de ces valeurs (on le démontre, comme plus haut, pour $\varphi(x)$].

2° L'intervalle $(0,\pi)$ peut être décomposé en un nombre infini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction varie constamment dans le même sens.

V. Série de Fourier. — On appelle série trigonométrique une série de la forme

$$(1)\ f(x)=\frac{1}{2}a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\quad+a_n\cos nx+\dots$$
$$+\,b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\dots+b_n\sin nx+\dots$$

où les $\underline{a}$ et les $\underline{b}$ sont des constantes, la grande importance de ces séries tient à ce qu'elles peuvent servir à représenter, dans un intervalle d'amplitude $2\pi$ une fonction quelconque de $x$, continue ou non.

Admettons que la série précédente, correspondant à une fonction donnée de $x$, soit uniformément convergente dans l'intervalle $(a+\pi)$. Multiplions les deux membres par $\cos mx\,dx$ ou $\sin mx\,dx$ et intégrons de $0$ à $2\pi$; tenons compte en même temps de ce qu'on a:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos px \cos qx \, dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin px \cos qx \, dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin px \sin qx \, dx = 0$$

si $p - q \neq 0$ tandis que ces intégrales sont égales à $\pi, 0, \pi$ si $p = q$. Nous aurons alors

$$(2) \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx \, dx \qquad\qquad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx \, dx$$

en remplaçant les $\underline{a}$ et les $\underline{b}$ par ces valeurs dans l'équation (1) on aura le développement de $f(x)$ connu sous le nom de série de Fourier.

Nous avons admis, pour obtenir les formules (2), la convergence uniforme de la série (1); que cette condition soit ou non remplie, on pourra toujours calculer $a_m$ et $b_m$ à l'aide des formules en question et constituer la série

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots \dots + a_n \cos nx + \dots \dots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots \dots + a_n \sin nx + \dots \dots$$

Nous allons maintenant démontrer que la série ainsi formée est convergente et a pour limite $f(x)$.

Calculons la somme $S_n$ des $n$ premiers termes; on aura d'abord, en mettant $z$ à la place de $x$ sous le signe $\int$ afin d'éviter toute confusion

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z) \left[ \cos nz \cos nx + \sin nz \sin nx \right] dz$$

ou

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(z) \cos n(z-x) \, dz$$

La somme $S_n$ des termes analogues prise de 0 à $n$ inclusivement sera donc:

$$\pi S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z) \left[ \frac{1}{2} + \cos(z-x) \quad \cos 2(z-x) + \dots + \cos(z-x) \right] dz$$

et si on remplace la parenthèse par son expression réduite:

$$\pi S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(z) \frac{\sin(2n+1)\frac{z-x}{2}}{2 \sin \frac{z-x}{2}} \, dz$$

Faisons la substitution

$$z - x = 2t \qquad dz = 2\,dt$$

$$\pi S_n = \int_{\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \, dt$$

Cette intégrale se partage en deux qui sont de la forme de celle qu'on a étudiée **tout à l'heure**; il suffit de prendre pour valeur intermédiaire 0, et dans la seconde intégrale de changer $t$ en $-u$ on aura ainsi:

$$\pi S_n = \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2t) \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2u) \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

$x$ étant supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$ sans atteindre aucun de ces deux nombres les deux intégrales auront respectivement pour limites $\frac{\pi}{2} f(x+0)$ et $\frac{\pi}{2} f(x-0)$ on voit donc que la série de Fourier sera convergente et aura pour somme

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$$

C'est la valeur générale; dans le cas où $x$ ne sera pas un point de discontinuité cette valeur se réduit à $f(x)$.

Nous avons laissé de côté le cas où $x$ atteint l'une des limites $-\pi$, $+\pi$; supposez par exemple $x=+\pi$ la première intégrale disparait et la formule se réduit à

$$\pi S_m = \int_0^{\pi} f(\pi-2u) \cdot \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du$$

On sait qu'alors en posant $f(\pi-2u) = \varphi(u)$ on aura:

$$\lim \pi S_m = \frac{\pi}{2}\left[\varphi(\pi-0)+\varphi(+0)\right]$$

et par suite

$$\lim S_m = \frac{1}{2}\left[\varphi(-\pi+0)+\varphi(\pi-0)\right]$$

On aurait la même limite pour $x=-\pi$. — On est donc assuré de la convergence de la série de Fourier et on connait sa somme pour toute valeur de $x$ telle que $-\pi \leq x \leq \pi$.

Remarques. — La fonction $f(x)$ a le même degré de généralité et est seulement soumise aux mêmes restrictions que la fonction $\varphi(x)$ qui figure dans l'Intégrale

$$J = \int_0^{l} \varphi(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

ces conditions étant supposées satisfaites $f(x)$ pourra être développé en série trigonométrique. — Dans le cas où $f(x)$ est continue entre $-\pi$ et $+\pi$ on peut ajouter que la série obtenue sera uniformément convergente dans le même intervalle. En effet, nous avons vu qu'on peut alors trouver un nombre $p$ indépendant de $l$ et tel qu'on ait:

$$\left| \frac{\pi}{2}\varphi(+0) - J \right| < \varepsilon$$

pour $n \geqq p$. Cela revient évidemment, quand on passe à la fonction $f(x-21)$, à dire que la différence $f(x) - S$ tend uniformément vers 0, $n$ croissant indéfiniment.

En d'autres termes la série est alors uniformément convergente.

Nous nous servirons plus tard de cette remarque dans l'étude d'une question importante. — Observons enfin que, d'après notre analyse, la série de Fourier est la seule, uniformément convergente, qui puisse représenter une fonction continue donné, dans l'intervalle $-\pi + \pi$, les coefficients $a_m$, $b_m$ étant alors déterminés sans ambiguité. On peut d'ailleurs prouver que la fonction n'est susceptible que d'un seul développement en série trigonométrique, mais nous ne nous arrêterons pas à cette question difficile.

II Exemples. — 1º Soit $f(x) = x$ ; cette fonction est représentée par un segment de droite dirigée suivant la bissectrice de l'angle $XOY$ ayant son milieu en $O$ et pour demi longueur $\pi\sqrt{2}$. On a d'ailleurs

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{m}\sin mx\right)_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin mx\,dx\right] = 0$$

il est clair qu'il en devait être ainsi, la fonction étant impaire. On a ensuite

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin mx\,dx = \left[-\frac{x}{m}\cos mx\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mx\,dx = -\frac{2\pi}{m}\cos m\pi$$

$$b_m = -\frac{2}{m}\cos m\pi$$

On a aussi immédiatement :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,dx = 0$$

D'où :

$$x = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \qquad\qquad\right]$$

Pour la valeur particulière $x = \pi$, la formule serait illusoire, mais on sait que l'on doit alors prendre pour somme de la série $\frac{\pi - 0}{2} + \frac{\pi + 0}{2} = 0$. La formule de Fourier s'applique donc encore. Observons enfin, à titre de vérification, qu'en faisant $x = \frac{\pi}{2}$ dans la formule générale on retrouve la formule de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2º Pour donner un exemple de fonction discontinue prenons l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\, dt$$

elle est égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$ suivant que $x$ est positif ou négatif. Développons-la dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. On aura ici

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos mx\, dx + \int_0^{\pi} \left(+\frac{\pi}{2}\right) \sin mx\, dx = 0$$

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin mx\, dx + \int_0^{\pi} \left(+\frac{\pi}{2}\right) \sin mx\, dx$$

D'où

$$b_m = \int_0^{\pi} \sin mx\, dx = -\frac{1}{m} \cos m\pi + \frac{1}{m} = \frac{1}{m}(1 - \cos m\pi)$$

On aura donc enfin

$$f(x) = 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

et la somme sera $-\frac{\pi}{2}$, si $x$ est compris entre $-\pi$ et $0$, $+\frac{\pi}{2}$ si $x$ est compris entre $0$ et $\pi$.

Considérons la valeur $x = 0$ la somme de cette série sera pour $x = 0$.

$$\frac{1}{2}\left[f(+0) + f(-0)\right] = 0$$

et la série s'annule bien en effet pour $x = 0$.

Pour $x = \pi$ la somme n'est ni $+\frac{\pi}{2}$, ni $-\frac{\pi}{2}$ ; elle est égale à $\frac{1}{2}\left[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)\right]$ elle est donc encore nulle.

---

# Vingt et unième Leçon

---

## Evaluation des aires planes.

---

### §.1. Aire d'une Courbe fermée.

En ce qui concerne l'évaluation de l'aire d'une figure plane, la seule notion précise fournie par la géométrie élémentaire est celle de l'aire du rectangle. Considérons d'une manière générale un contour $(C)$. terminé par une

courbe continue ou par un nombre limité d'arcs appartenant à des courbes continues. Menons dans ce contour deux séries de cordes parallèles à deux directions fixes $Ox$, $Oy$ rectangulaires. Nous formons ainsi un réseau de rectangles dont nous conserverons seulement ceux qui sont tout entiers contenus dans la courbe. Imaginons que le nombre des rectangles augmente d'une façon telle que les deux dimensions de chacun d'eux tendent en même temps vers zéro. La somme de leurs aires aura une limite $S$ indépendante de la loi d'inscription et qu'on pourra représenter, d'après la définition même de l'intégrale double, par l'une ou l'autre des deux formules.

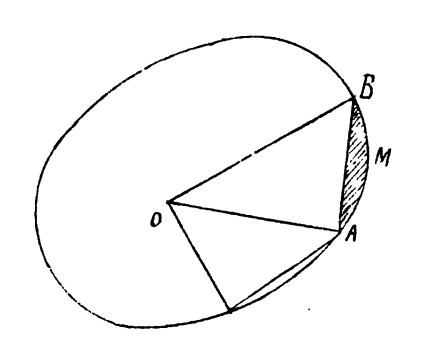
$$(1)\quad S = \iint_{(c)} dx\,dy \qquad\qquad S = \int_a^{a'} \left[ f_1(x) - f(x) \right] dx.$$

Dans la dernière intégrale $a$ et $a'$ sont les abscisses extrêmes du contour, les deux portions de contour $AMA'$, $AM_1A'$ ayant respectivement pour équations

$$y = f(x) \qquad y = f_1(x)$$

(Il est bien entendu que s'il y avait plus de deux points du contour sur une parallèle quelconque à $Oy$ on décomposerait la figure en un certain nombre de figures partielles pour chacune desquelles il n'y en aurait plus que deux). Nous allons montrer maintenant que cette limite $S$ est indépendante du système d'axes $Ox$, $Oy$. Observons d'abord que si $S_1$, $S_2$ sont les valeurs correspondantes à deux contours fermés contigus, $S_1 + S_2$ sera évidemment, d'après la définition même, la valeur correspondante à l'espace formé par l'ensemble des deux premiers. Ceci posé, dans un système d'axes donné cherchons d'abord la valeur de $S$ pour un triangle $ABC$ quelconque. A l'aide de parallèles à $Ox$, $Oy$ on décomposera aisément ce triangle en d'autres dont chacun aura deux côtés parallèles aux axes. Évaluant séparément ces triangles partiels et ajoutant les résultats on verra que $S$ est égal au produit de l'un quelconque des côtés $ABC$ par la moitié de la hauteur correspondante. Donc $S$ est indépendant du système des axes pour tout triangle et par suite pour tout contour fermé limité par une ligne polygonale. Cette quantité $S$ pour une figure polygonale est identique à ce qu'on appelle l'aire en géométrie élémentaire. Revenons maintenant à un contour fermé de forme quelconque $(C)$.

Fig. 1.




Inscrivons dans cette courbe un polygone quelconque P. D'après la propriété additive de $S$ nous pourrons, pour l'évaluer, évaluer séparément chacun des secteurs O A B et faire la somme des résultats trouvés. Supposons que le nombre des côtés de la ligne inscrite augmente sans limite, chacun d'eux tendant vers zéro. Je dis qu'alors chacun des secteurs curvilignes pourra être remplacée par le triangle correspondant. Il suffit pour le faire voir de montrer que la quantité $S$ correspondante au segment B A M est infiniment petite par rapport à l'aire du triangle O A B. Or quand on parcourt l'arc A B la distance du point M à la corde est susceptible d'une limite supérieure $\delta$ et, toujours à cause de la propriété additive de $S$, cette quantité est moindre pour le segment B M A que pour un rectangle de base BA et de hauteur $\delta$. Donc cette quantité est inférieure à $BA\,\delta$. D'ailleurs le rapport de cette dernière expression à l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{2\delta}{h}$, $h$ étant la distance du point O à la corde BA et cette quantité tend vers zéro en même temps que la corde BA.

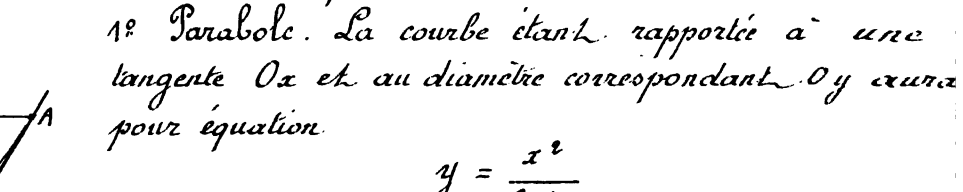
Il résulte de là que la quantité $S$ étendue au contour (C) est la limite vers laquelle tend l'aire du polygone infinitésimal P inscrit dans la courbe (C) : cette quantité est donc indépendante du système d'axes à l'aide duquel nous l'avons évaluée. Nous l'appellerons l'aire de la figure (C).

On appelle quadrature l'opération qui consiste à évaluer une aire plane et, par extension, le calcul d'une intégrale définie quelconque.

II. — Nous appliquerons les formules (1) à plusieurs exemples simples. S'il s'agit d'évaluer l'aire d'un trapèze curviligne tel que PMP'M' (f. 1) on aura, en supposant maintenant que les axes font entre eux un angle quelconque $\theta$ et considérant l'aire comme une somme de parallélogrammes :

$$S = \sin\theta \int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

$x_0$, $x_1$ étant les abscisses extrêmes OP, OP'.




1° Parabole. La courbe étant rapportée à une tangente Ox et au diamètre correspondant Oy aura pour équation

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

On aura immédiatement pour le triangle curvili-

$OPA$.

$$S = \sin\theta \int_0^a \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{a^3}{6p}\sin\theta \qquad (a = OP)$$

ou encore

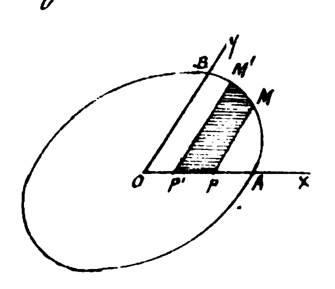
$$S = \sin\theta\,\frac{a^2}{2p}\cdot\frac{a}{3} = \frac{1}{3}\,OP.PA.\sin\theta$$

On en conclut aisément que le segment parabolique compris entre l'arc $BOA$ et sa corde est les deux tiers du parallélogramme correspondant $ABQP$.

2° Ellipse. L'ellipse étant supposée rapportée à deux diamètres conjugués aura pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

Le segment $PP'MM'$ aura pour valeur




$$S = \frac{b'}{a'}\sin\theta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a'^2 - x^2}\,dx$$

On achèverait facilement le calcul de l'intégrale. Mais on peut raisonner comme il suit : si l'on imagine une seconde ellipse ayant le demi-diamètre $OA$ commun avec la première et d'ailleurs quelconque, l'aire du secteur analogue pour les mêmes points $P$ et $P'$ sera donné par la formule

$$S_1 = \frac{b'_1}{a'_1}\sin\theta_1 \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{a_1'^2 - x^2}\,dx$$

d'où puisque $a_1 = a'$,

$$S = \frac{b'\sin\theta}{b'_1\sin\theta_1}\,S_1 .$$

Prenons pour seconde conique le cercle de rayon $OA$, c'est-à-dire faisons

$$b'_1 = a' \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2};$$

nous aurons immédiatement

$$S = \frac{b'}{a'}\sin\theta\,S_1$$

L'aire du segment considéré est donc proportionnelle à l'aire du segment correspondant dans le cercle homographique. Pour celui-ci on l'évaluerait

facilement, soit en calculant l'intégrale, soit comme différence de secteurs circulaires et de triangles. En particulier, pour l'ellipse entière on aura

$$S = \pi a' b' \sin \theta$$

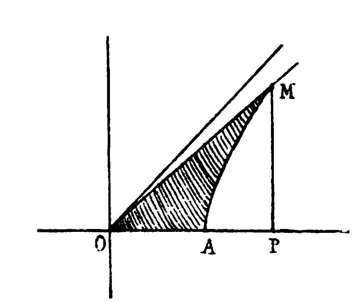
3° Hyperbole. — Si dans l'expression trouvée pour l'ellipse on change $b'^2$ en $-b'^2$, on obtiendra l'aire du segment hyperbolique. Nous nous arrêterons un instant au cas de l'hyperbole équilatère

$$(1)\ x^2 - y^2 = 1$$

Cette courbe diffère très peu analytiquement du cercle

$$x^2 + y^2 = 1$$

et conduit à une notion analogue à celle du sinus et du cosinus. Observons que l'arc du cercle $AM$ mesure le double du secteur $AOM$. Si l'on considère l'ordonnée $MP$ et l'abscisse $OP$ de l'arc $AM$ comme des fonctions de $u$, $u$ étant le double du secteur $AOM$, l'extension se fera sans difficulté au cas de l'hyperbole équilatère. On aura alors:




$$xy = u + 2\int_1^x y\,dx,$$

d'où l'on déduit

$$(2)\ x\,dy - y\,dx = du$$

On a, d'ailleurs, par l'équation de la courbe

$$(3)\ x\,dx - y\,dy = 0,$$

D'où l'on conclut

$$(4)\ \frac{dx}{du} = y \qquad \frac{dy}{du} = x$$

En intégrant par exemple la seconde, on a

$$u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = L(y + \sqrt{1+y^2})$$

On en conclut immédiatement, en posant

$$x = C(u)$$
$$y = S(u)$$

$$C(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad S(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

et les formules (1) et (4) donnent d'ailleurs

$$C^2(u) - S^2(u) = 1$$

$$C'(u) = S(u) \qquad S'(u) = C(u)$$

Les fonctions $C$ et $S$ sont ce qu'on appelle le sinus et le cosinus hyperboliques de la variable $u$; leur théorie serait calquée sur celle des fonctions circulaires $\sin u$, $\cos u$. On peut vérifier par exemple les formules suivantes d'addition:

$$S(u+v) = S(u)\,C(v) + S(v)\,C(u) \qquad C(u+v) = C(u)\,C(v) + S(u)\,S(v)$$

III. Emploi d'une variable auxiliaire. — Lorsque la courbe est définie par deux équations de la forme

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t)$$

l'aire du trapèze curviligne est donnée par la formule

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\, f'(t)\, dt,$$

les valeurs $t_0$ et $t_1$ correspondant aux extrémités de l'arc et l'intégrale prend alors le nom d'intégrale curviligne.

Exemples. 1° Ellipse. Si l'on prend les deux formules

$$x = a \cos t \qquad y = b \sin t,$$

on a

$$S = -ab \int_{t_0}^{t_1} \sin^2 t\, dt$$

ou

$$S = \frac{ab}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\cos 2t - 1)\, dt = \frac{ab}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\right)_{t_0}^{t_1}$$

Si l'on veut avoir le quart d'ellipse on doit faire

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \qquad t_1 = 0,$$

d'où

$$S = \frac{\pi a . b}{4}$$

2° Cycloïde. Les équations de la cycloïde sont, $R$ étant le rayon du cercle générateur

$$x = R\,(t - \sin t) \qquad y = R\,(1 - \cos t),$$

d'où

$$S = R^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2\, dt$$

$$= R^2 \left(\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t\right)$$

L'aire calculée est comptée à partir de l'origine de la boucle. Si on veut avoir l'aire de la boucle entière, il faut faire $t = 2\pi$, ce qui donne

$$S = 3\pi R^2$$

3° Courbes fermées. — Considérons une courbe fermée et supposons que $t$ variant de $t_0$ à $T$ le point correspondant parcoure la courbe complètement et une seule fois. Si l'on se reporte à la figure (1) et qu'on suppose ($t$ variant de $t_0$ à $T$) la courbe parcourue dans le sens direct, c'est-à-dire de manière que l'intérieur soit à la gauche de l'observateur, on voit immédiatement que les éléments d'aire pour lesquels $dx$ est positif sont précisément ceux qui correspondent à l'arc inférieur et par suite qu'on doit retrancher dans l'évaluation. On aura donc

$$(1) \quad S = -\int_{t_0}^{T} \varphi(t) f'(t)\, dt$$

Si on sépare la courbe en deux arcs à l'aide des deux ordonnées extrêmes, on a

$$S = \int_{b}^{b'} \left[ F_1(y) - F(y) \right] dy,$$

$b$ et $b'$ étant les ordonnées extrêmes et les fonctions $F$, $F_1$ correspondant aux deux points d'entrée et de sortie. Mais en pareil cas on voit sans peine que sur l'arc de sortie correspondant à la partie additive de l'intégrale $dy$ est constamment positif. On aura par conséquent

$$(2) \quad S = +\int_{t_0}^{T} x\, dy = +\int_{t_0}^{T} f(t)\varphi'(t)\, dt$$

Si l'on ajoute les relations (1) et (2) on obtient la formule générale

$$(3) \quad S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (f\varphi' - \varphi f')\, dt$$

Par exemple, pour l'ellipse entière si l'on pose

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t,$$

lorsque $t$ varie depuis zéro jusqu'à $2\pi$ on parcourt la courbe une fois: on aura, par conséquent, pour l'ellipse entière

$$S = \frac{ab}{2}\int_{0}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \pi ab$$

Comme dernier exemple, considérons une courbe unicursale représentée par les deux équations

$$x = \frac{A}{C} \qquad y = \frac{B}{C}$$

$A$, $B$, $C$ étant des polynômes entiers. Nous supposons que $t$ variant de $t_0$ à $T$ on parcoure une boucle fermée de cette courbe. La formule (3) donne

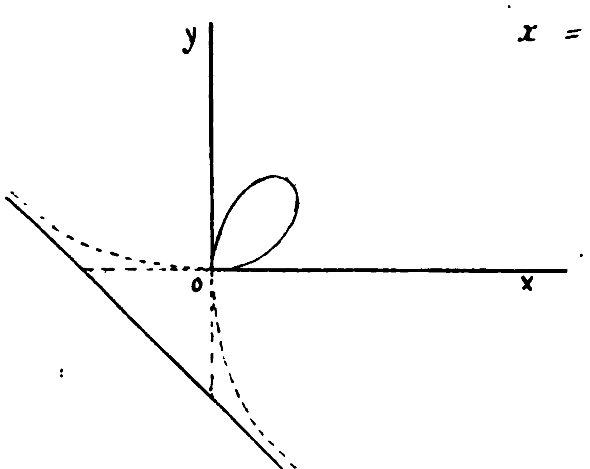
$$(4)\quad S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \frac{AB' - BA'}{C^2}\, dt$$

Les formules (1) ou (2) donneraient sous l'intégrale $C^3$ en dénominateur. Soit par exemple à évaluer l'aire du folium

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Nous aurons en faisant $y = tx$ :

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$




La boucle sera parcourue lorsque $t$ aura varié de $0$ à $+\infty$ ; on aura ici

$$A = 3at \quad B = 3at^2 \quad C = 1+t^3$$

$$AB' - BA' = 18a^2t^2 - 9a^2t^2 = 9a^2t^2$$

et en appliquant la formule (4)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\, dt$$

ou enfin

$$S = \frac{3a^2}{2}$$

IV. — Aires en coordonnées polaires — Soit $OX$ l'axe polaire, $O$ le pôle. Cherchons l'aire d'un secteur $OAB$ comprise entre la courbe et les deux rayons $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$. Soit $OMM'$ un secteur élémentaire d'angle $\Delta\omega$ ; on voit immédiatement que ce secteur est compris entre deux secteurs circulaires de même angle et ayant respectivement pour rayons $\rho$ et $\rho + \Delta\rho$ ; l'aire exacte du secteur $OMM'$ sera donc égale à $\frac{\rho^2}{2}\Delta\omega$, $\rho$ étant intermédiaire entre $\rho$ et $\rho + \Delta\rho$. La somme de tous les éléments analogues, qu'on peut supposer en nombre infini sera donc donnée par l'intégrale

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\omega$$

$\rho$ étant supposé exprimé en fonction de $\rho$.

Exemples. 1°. Lemniscate. — Cette courbe a pour équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$$

Si l'on prend $\alpha = 0$, on a ici :

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{\beta} \cos 2\omega \, d\omega = \frac{a^2}{4} \sin 2\beta$$

En particulier la demie boucle $AMB$ s'obtiendra en faisant $\beta = \frac{\pi}{4}$ et on aura

$$S = \frac{a^2}{4}$$

2° Soit encore la conique (Hermite, cours d'analyse 1891)

$$\frac{1}{\rho^2} = A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega$$

on aura :

$$2S = \int \frac{d\omega}{A\cos^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\sin^2\omega}$$

On peut faire la substitution $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t$. Mais ici il suffit de faire $\operatorname{tg}\omega = t$ pour être amené à la forme rationnelle et ce fait se présente toutes les fois que la fonction à transformer satisfait à la condition $f(\omega + \pi) = f(\omega)$ ; on le voit d'ailleurs immédiatement dans le cas actuel en posant

$$2S = \int_\alpha^\beta \frac{\frac{d\omega}{\cos^2\omega}}{A + 2B\operatorname{tg}\omega + C\operatorname{tg}^2\omega} = \int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta} \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}$$

Si on fait $\alpha = 0$, $p = \frac{\pi}{2}$ on aura le 1/4 d'ellipse (en supposant $AC - B^2 > 0$).

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{AC - B^2}}$$

V. — Coordonnées curvilignes — Supposons maintenant que $x$, $y$ soient exprimés en fonction de deux coordonnées curvilignes quelconques $u$, $v$ par deux équations de la forme

$$x = f(u, v) \qquad y = \varphi(u, v)$$

Si on pose

$$J = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}$$

on sait que l'intégrale (voir page 130)

$$\iint_{(C)} F(x, y)\, dx\, dy$$

se transforme en une autre

$$\iint_{(C)} F(f, \varphi)\, J\, du\, dv$$

En particulier l'aire de la courbe fermée (C) sera exprimée par

$$S = \iint_{(C)} J\, du\, dv$$

Cette intégrale se ramène à deux intégrales simples dont les limites se déterminent sans difficulté.

Supposons qu'à l'intérieur du contour (C) deux des courbes $v = const.$ ne se coupent pas, non plus que deux courbes $u =$ constante. — Cela aura lieu en particulier si $J$ conserve un signe constant à l'intérieur de $C$. — Alors les deux systèmes de courbes coordonnées diviseront l'aire en un réseau de quadrilatères curvilignes ; soient $u = \alpha$, $v = \beta$ les deux courbes extrêmes de la première famille ; elles toucheront le contour $C$ en deux points $A\ B$ ; ces deux points diviseront le contour en deux arcs $BmA$, $Bm'A$, ayant deux équations de la forme

$$u = \varphi(v) \qquad u = \varphi_1(v)$$

La portion d'aire comprise entre deux courbes $v =$ constante aura pour expression

$$dv \int_{\varphi(v)}^{\varphi_1(v)} J\, du$$

et l'aire totale sera :

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} dv \int_{\varphi(v)}^{\varphi_1(v)} J\, du$$

Il résulte de ce qui précède que l'aire du quadrilatère $MM_1\ M'M_1'$ formé par quatre lignes coordonnées infiniment voisines, est au point de vue infinitésimal, égale à l'élément d'intégrale $J\,du\,dv$. Or si on considère le parallélogramme construit sur les deux cordes $MM_1$, $M'M_1'$ on trouve très aisément que cette aire infiniment petite a pour expression $J\,du\,dv$, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. — On pourra donc, dans chaque quadrature particulière, considérer l'aire élémentaire en question comme un parallélogramme rectiligne ce qui sera souvent plus commode que de calculer $J$.

---

# Vingt-deuxième Leçon.

## Rectification des Courbes. Calcul approché des intégrales définies.

1° **Longueur d'un arc de courbe** — Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque $M$ d'une courbe plane ou gauche peuvent être exprimés en fonction d'une variable $t$ par trois équations de la forme

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

Nous supposons que les fonctions $f$, $\varphi$, $\psi$, ainsi que leurs dérivées, sont continues tout le long d'un arc $AB$ dont les extrémités correspondent aux valeurs $t_0$ $T$. Il s'agit de définir ce qu'on doit entendre par ces mots : longueur de l'arc $AB$.

Inscrivons dans cet arc une ligne polygonale $A M_1 M_2 \quad M_{n-1} B$ de $n$ cotés, cette ligne est supposée variable de telle sorte que $n$ augmente indéfiniment ; chaque côté tendant vers $0$. Cherchons ce que devient, dans ces conditions, le périmètre $P$ de cette ligne. Nous aurons :

$$P = \sum_0^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2+(z_{i+1}-z_i)^2} = \sum_0^{n-1} \delta t_i \sqrt{\left(\frac{\delta x_i}{\delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\delta y_i}{\delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\delta z_i}{\delta t_i}\right)^2}$$

D'après l'hypothèse faite sur la continuité des dérivées les rapports $\frac{\delta x}{\delta t}$, $\frac{\delta y}{\delta t}$, $\frac{\delta z}{\delta t}$ tendent uniformément vers $f'(t)$, $\varphi'(t)$ $\psi'(t)$ dans tout l'intervalle $(t\, T_0)$. Donc le radical

$$\sqrt{\left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta y}{\delta t}\right)^2+\left(\frac{\delta z}{\delta t}\right)^2}$$

tend uniformément vers la fonction

$$F(t) = \sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

En d'autres termes si on se donne arbitrairement un nombre $\varepsilon$, on pourra supposer $n$ assez grand pour qu'en posant :

$$\sqrt{\left(\frac{\delta x_i}{\delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\delta y_i}{\delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\delta z_i}{\delta t_i}\right)^2} = F(t_i)+\varepsilon_i$$

$|\varepsilon_i|$ soit, pour toute valeur de $i$, inférieure à $\varepsilon$. Dans ces conditions la valeur de $P$ peut s'écrire

$$P = \sum_0^{n-1} F(t_i)\delta t_i + \theta\,\varepsilon\,(T-t_0) \qquad |\theta|<1$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n. Il en résulte immédiatement

$$\lim \int_{t_0}^{T} F(t)\, dt$$

cette limite est donc indépendante de la loi d'inscription ; nous la prendrons comme définition de la longueur de l'arc A B. En désignant cette longueur par s nous aurons

$$(1)\quad s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

Observons que la formule (1) équivaut à la suivante :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

où la variable indépendante n'est pas spécifiée.

II. Applications. 1º Cycloïde. – Dans le cas de la cycloïde on a :

$$x = R(t - \sin t) \qquad y = R(1 - \cos t)$$
$$dx = 2R \sin^2\frac{t}{2}\, dt \qquad dy = 2R \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\, dt$$

D'où :

$$ds = 2R \sin\frac{t}{2}\, dt$$

en supposant qu'on prenne les arcs croissants dans le sens où t augmente. Prenons pour origine des arcs le point de rebroussement $t = 0$ ; l'arc indéfini sera

$$(3)\quad s = \int_0^t 2R \sin\frac{t}{2}\, dt = 8R \sin^2\frac{t}{4}$$

Cette formule permet de rectifier géométriquement un arc quelconque de cycloïde, c'est-à-dire construire une droite d'égale longueur. Cette rectification n'est possible que pour certaines courbes très particulières ; par extension on appelle rectification l'opération analytique qui a pour but la détermination d'une longueur d'arc.

La formule (3) pour $t = \pi$ donne la longueur d'une boucle entière $S = 8R$.

2º Chaînette. Dans le cas de la chaînette on a :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx \ , \quad dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx$$

Si on compte les arcs à partir du sommet de la courbe, il vient

$$(4)\quad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

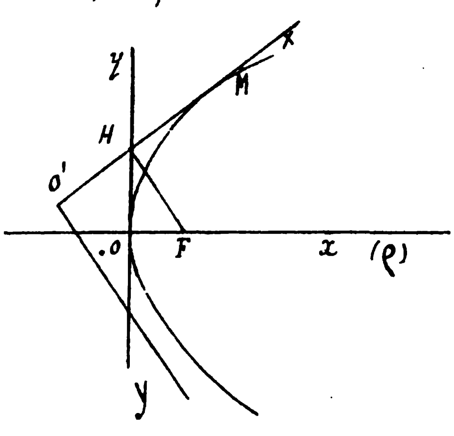
On en conclut cette autre expression $s = a \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha$ étant l'inclinaison de

la tangente sur $ox$.

3° Parabole. – Soit encore une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. On a ici :

$$y^2 = 2px \qquad y\,dy = p\,dx \qquad ds = dy\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}$$

Prenons le sommet pour origine des arcs, nous devrons intégrer à partir de $O$, ce qui donne




$$s = \text{arc } OM = \frac{1}{p}\int_0^y dy\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}$$

ou

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{p^2} + \frac{p}{2}\,L\,\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

On déduit de cette formule une conséquence intéressante. Prenons sur la tangente en $M$ une longueur $O'M = s$; et menons $O'Y$ perpendiculaire à $O'M$. On reconnait sans difficulté que l'on a, $F$ étant le foyer de la courbe :

$$FH = \frac{1}{2}\sqrt{y^2+p^2} \qquad O'H = \frac{p}{2}\,L\,\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

Imaginons qu'on fasse rouler la courbe sur la tangente $O'X$ supposée fixe, le foyer $F$ décrira une courbe dont les coordonnées $X$, $Y$ seront données, en fonction du paramètre variable $y$, par les formules précédentes. – Or on déduit aisément 2 formules

$$\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p} = e^{\frac{2X}{p}} \qquad \frac{-y+\sqrt{y^2+p^2}}{p} = e^{-\frac{2X}{p}}$$

et en éliminant $y$ :

$$Y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2X}{p}} + e^{-\frac{2X}{p}}\right)$$

Le lieu est donc une chaînette de paramètre $\frac{p}{2}$.

4° Ellipse. – On a pour l'ellipse rapportée à ses axes

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad ds : -\frac{b}{a}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

On obtient $s$ par une intégrale elliptique :

$$(5) \qquad s = \frac{1}{a}\int \frac{a^4-c^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^4-c^2x^2)}}\,dx$$

où $c$ est la demi distance focale ; $s$ est la différence entre deux intégrales l'une de première, l'autre de seconde espèce. C'est même au rôle qu'elles jouent dans la rectification de l'ellipse que ces intégrales doivent leur nom. – Si nous posons

$$x = a\sin\varphi \qquad K = \frac{c}{a}$$

et que nous comptions les arcs à partir du sommet $x=0\ y=b\ \varphi=0$, nous obtenons:

$$(6) \qquad s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

c'est l'intégrale même que Legendre désignait sous le nom d'intégrale de seconde espèce.

III. – Coordonnées polaires. – Les formules de transformation

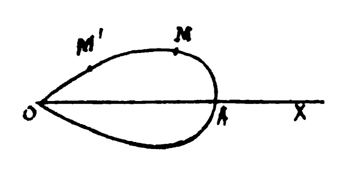
$$x = \rho\cos\omega \qquad y = \rho\sin\omega$$

donnant immédiatement

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2$$

Si l'une des coordonnées est donnée en fonction de l'autre, long de la courbe considérée, le calcul de l'arc est encore ramené à celui d'une intégrale définie.

Prenons, pour application, le lemniscate qui a pour équation




$$\rho^2 = a^2\cos 2\omega$$

On aura ici

$$d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[a^4\sin^2 2\omega\,d\omega^2 + a^4\cos^2 2\omega\,d\omega^2\right]$$

d'où:

$$ds = \frac{a^2}{\rho}\,d\omega = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

$s$ est donc fourni par une intégrale elliptique.

$$s = a\int\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

Si on suppose l'arc compté à partir de A, la limite inférieure de l'intégrale sera 0; si on prend le centre de la courbe pour origine des arcs, cette limite sera $\frac{\pi}{4}$. On aura donc

$$\text{arc } OM = a\int_0^{\alpha}\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} \qquad \text{arc } OM' = a\int_{\alpha'}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}$$

$\alpha, \alpha'$ étant les angles polaires correspondant à $M, M'$.

Dans la seconde intégrale faisons la substitution

$$\cos t\cos\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 2\omega = \operatorname{tg}^2 t \qquad d\omega = \frac{-dt}{\sqrt{\cos 2t}}$$

Nous aurons alors

$$\text{arc } OM' = a\int_0^{\beta'}\frac{dt}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$\beta'$ étant lié à l'arc $\alpha'$ par la condition $\cos\beta'\cos\alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après cela si nous supposons que l'angle polaire $\alpha$ soit lié à $\alpha'$ par cette relation

$$\cos\alpha\cos\alpha' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

les deux arcs $OM$, $OM'$ auront la même longueur. Cette relation est due à Fagnano.

IV. — Formule de Legendre — Revenons aux coordonnées rectilignes ; soit $\alpha$ l'inclinaison de la normale sur $OX$, $H$ la projection de l'origine sur cette même tangente.



Si on désigne par $p$, $q$ les deux segments $OH$, $HM$, on a immédiatement

$$x = p\cos\alpha + q\sin\alpha$$
$$y = p\sin\alpha - q\cos\alpha$$

Il suffit de projeter $OHM$ et $OM$ sur $OX$, $OY$. Différentions

$$dx = (dp + q\,d\alpha)\cos\alpha + (dq - p\,d\alpha)\sin\alpha$$
$$dy = (dp + q\,d\alpha)\sin\alpha - (dq - p\,d\alpha)\cos\alpha$$

D'ailleurs la relation nécessaire

$$dx\cos\alpha + dy\sin\alpha = 0$$

permet de dédoubler les égalités obtenues et donne :

$$(7) \qquad q\,d\alpha + dp = 0$$

$$dx = (dq - p\,d\alpha)\sin\alpha, \; -dy = (dq - p\,d\alpha)\cos\alpha$$

On en déduit immédiatement $ds = dq - p\,d\alpha$ et par suite

$$(8) \qquad s = q - \int p\,d\alpha$$

c'est la formule de rectification de Legendre. Mais il ne faut pas perdre de vue la dernière des formules (7) qui fournit $q$ lorsque l'on connaît $p$.

Prenons comme exemple l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On aura ici

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} \qquad q = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}}$$

D'où en prenant pour origine des arcs le sommet $x = a$, $y = 0$, $\alpha = \varphi$

$$(9) \qquad s = \frac{-c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}} + \int_\varphi^\alpha \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}\; d\alpha$$

La dernière intégrale peut s'écrire

$$a\int_\varphi \sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha}\; d\alpha$$

Si nous nous reportons au paragraphe II, nous reconnaissons un arc d'ellipse compté du sommet B jusqu'au point dont l'angle excentrique est $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ; on déduit immédiatement de là le théorème remarquable de Fagnano, dont voici l'énoncé :

Au point M de l'ellipse, faisons correspondre le point M' dont l'angle excentrique est égal à $HOB=\beta$, les arcs BM, AM', et le segment de droite HM sont liés par la relation

$$BM - AM' = HM$$

Nous ajouterons : le segment H'M' correspondant à M' est égal à HM ; il existe en général sur le quadrant deux points M et M' pour lesquels HM a une longueur donnée $l$ ; et ces deux points sont ceux qui se correspondent dans le théorème de Fagnano. Nous nous dispenserons de démontrer ce théorème élémentaire.

V. Théorème de Landen. — Nous terminerons par une dernière application relative à l'arc d'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

On a l'arc compté à partir du sommet $x=a$, $y=0$, en changeant $b^2$ en $-b^2$ ce qui donne

$$s=-\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha}}+\int_0^\alpha\sqrt{a^2\cos^2\alpha-b^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

L'intégrale du second membre peut s'écrire

$$\int_0^\alpha\sqrt{a^2-(b^2+a^2)\sin^2\alpha}\,d\alpha$$

Ainsi une intégrale de la forme $\int_0^\alpha\sqrt{A^2-B^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$ représente un arc d'ellipse si $B<A$, et si $B>A$ elle représente un arc d'hyperbole, augmenté d'un segment rectiligne. Nous déduirons de cette remarque un théorème important, connu sous le nom de théorème de Landen et qu'on peut démontrer très simplement de la manière suivante (voir Williamson, Integral Calculus p. 232).

Considérons un triangle dont deux côtés $a$ $b$ sont constants et dont tous les autres éléments sont variables désignons par $C_1$ la somme des angles $A+B$. On a immédiatement

$$c\,dC_1=(a\cos B+b\cos A)(dA+dB)$$

D'où en intégrant.

$$\int c\,dC_1=\int a\cos B\,dA+\int b\cos A\,dB+a\sin B+b\sin A+\text{Const.}$$

ce qui peut s'écrire

$$\int\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C_1}\;dC_1=\int\sqrt{a^2-b^2\sin^2A}\;dA+\int\sqrt{b^2-a^2\sin^2B}\,dB+2a\sin b+\text{const.}$$

Si on suppose $a>b$ la première intégrale du 1° membre représente un arc

d'ellipse, la seconde un arc d'hyperbole augmenté d'un segment rectiligne ; enfin l'intégrale du premier membre peut s'écrire

$$\int \sqrt{(a+b)^2 \cos^2\frac{C_1}{2} + (a-b)^2 \sin^2\frac{C_1}{2}}\, dC_1$$

et représente un arc d'ellipse ; $2a \sin B + \text{const}$ est un segment de droite. Donc :

Tout arc d'hyperbole s'exprime à l'aide d'une partie rectifiable et de deux arcs d'ellipse.

C'est le théorème de Landen ; les valeurs limites de $A$, $B$, $C_1$ dans les intégrales précédentes sont liées entre elles par les relations qu'il ne faut pas perdre de vue :

$$a \sin B = b \sin A \qquad C_1 = A + B$$

## VI — Calcul approché des intégrales définies

— La définition même de l'intégrale comme limite de somme fournit un moyen de calculer les valeurs approchées de cette intégrale. Lorsqu'on sait développer la fonction sous le signe, le développement en série donne par lui-même une formule d'approximation. Mais il existe des procédés uniformes de calcul qui sont d'une application plus simple et qui ont pour la plupart une origine géométrique.

1° Méthode de Simpson. — Soit à calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Cette intégrale est représentée géométriquement par l'aire du trapèze curviligne $AB\,ab$. La méthode directe tirée de la définition même de l'intégrale consiste à remplacer cette aire par une somme de rectangles. On pourrait encore en remplaçant l'arc $AB$ par la ligne polygonale correspondante remplacer l'aire par une somme de trapèzes. On peut aussi par les différents points de subdivision faire passer une ligne, composée d'arcs courbes, ligne que l'on subsistera à la courbe donnée $y = f(x)$.

La méthode de Simpson consiste à décomposer l'intervalle $ab$ en $n$ intervalles égaux et à faire passer par trois points successifs de division de la courbe une parabole du second degré, ayant son axe parallèle à $Oy$, ce qu'on peut toujours faire d'une façon déterminée.

Supposons d'abord que l'équation de la courbe soit

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

L'aire serait, dans ces conditions

$$S = A\,\frac{b^3 - a^3}{3} + B\,\frac{b^2 - a^2}{2} + C\,(b-a)$$

Or si on exprime $ABC$ en fonction des deux ordonnées extrêmes et de l'ordonnée moyenne correspondante à $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient sans difficulté

$$S = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Si l'on applique maintenant cette formule à une suite d'arcs de paraboles passant par les points $AM_1M_2$, $M_2M_3M_4$, $M_4M_5M_6$, et ainsi de suite, l'aire cherchée sera remplacée par une somme d'aires paraboliques qui aura pour expression

$$S = \frac{b-a}{6n}\left(4P + 2I - y_0 - y_{2n}\right)$$

$2n$ étant le nombre total des subdivisions $P$ la somme des ordonnées de rang pair $I$ la somme des ordonnées de rang impair.

2° Méthode d'interpolation. L'intervalle $ab$ étant encore divisé en $n$ parties égales ou non on peut faire passer un arc d'une parabole unique par tous les points de division. On sait, en effet, que l'on peut toujours constituer un polynôme de degré $n$ qui coïncide avec une fonction donnée pour les $n+1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$. Ce polynôme, comme on le sait, est unique et son expression est d'ailleurs la suivante

$$P = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_n)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots\ldots(x_1-x_n)} + \ldots + f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

En substituant l'intégrale $\int_{x_0}^{x_n} P\,dx$ s'approchera d'autant plus de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ que $n$ sera plus grand. Pour donner à cette méthode une forme régulière, on suppose que les limites de l'intégrale aient été ramenées aux valeurs fixes 0 et 1. Il suffit, pour obtenir ce résultat de faire la substitution

$$x = a + (b-a)t \qquad f(x) = \varphi(t)$$

En outre, la subdivision de $ab$ est supposée faite en parties égales, de sorte qu'on a

$$x = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{n} \qquad x_2 = \frac{2}{n} \ldots\ldots x_n = 1$$

Si dans la formule d'interpolation qui précède, on considère le polynôme qui multiplie $f(x_1)$ ce polynôme, pour une valeur particulière donnée à $n$ ($n$ étant par exemple une puissance de 10) est connu une fois pour toutes. Ses coefficients peuvent être calculés et la formule donnée prend la forme :

$$\varphi(t)\ \varphi(0)P_0 + \varphi(\tfrac{1}{n})P_1 + \qquad + \varphi(\tfrac{i}{n})P_i + \qquad + \varphi(1)P_n$$

D'où en intégrant

$$\varphi(0)\int_0^1 P_0\,dt + \varphi(\tfrac{1}{n})\int_0^1 P_1\,dt + \qquad + \varphi_1\int_0^1 P_n\,dt.$$

Les intégrales qui figurent en coefficients, portant sur des polynômes à coefficients connus, peuvent être calculées une fois pour toutes et leurs valeurs consignées dans des tables. — Il suffira alors, pour chaque fonction particulière, de calculer les nombres $\varphi(0), \varphi(\frac{1}{n}), - \varphi(1)$.

3°. – Méthode de Gauss. La méthode de Gauss consiste à prendre pour valeurs intermédiaires non plus des nombres équidistants, mais les racines du polynôme $X_n$ de Legendre, après avoir ramené les limites à être $-1, +1$, ce qu'on peut faire par la substitution.
$$x = a + \frac{b-a}{2}(t+1)$$

Le polynôme $X_n$ est défini par l'égalité

$$X_n = \frac{1}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^n}$$

L'équation $X_n = 0$ qui est du degré $n$ a ses racines réelles, inégales et comprises entre $-1, +1$. C'est une conséquence immédiate du théorème de Rolle.[1] Le polynôme $X_n$ présente en outre une propriété importante. — Si dans la formule générale (voir page 81) d'intégration par parties.

$$\int f(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = f\varphi^{(n-1)} - f'\varphi^{(n-2)} + f''\varphi^{(n-3)} \quad \pm f^{(n-1)}(x)\varphi(x) \mp \int f^{(n)}(x)\varphi(x)\,dx$$

on fait $\varphi(x) = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$ et qu'on intègre entre les limites $-1, +1$, on a

$$\int_{-1}^{+1} X_n\, f(x)\,dx = \mp \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx.$$

Si donc $f(x)$ est un polynôme entier de degré moindre que $n$ on aura

$$\int_{-1}^{+1} X_n\, f(x)\,dx = 0$$

Ceci posé revenons à l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$$

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $2n-1$ qui se raccorde avec $F(x)$ pour $2n$ valeurs parmi lesquelles figurent les racines $\alpha_1, \alpha_2 \quad \alpha_n$ de l'équation $X_n = 0$

L'intégrale sera remplacée par :

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx$$

Divisons $P(x)$ par $X_n$ nous aurons $P(x) = X_n Q_n + R_n$, $Q_n$ étant de degré $n-1$ ; on aura donc d'après la propriété démontrée plus haut :

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} X_n Q_n\,dx + \int_{-1}^{+1} R_n\,dx = \int_{-1}^{+1} R\,dx$$

Ainsi on sera ramené à une intégrale portant seulement sur un polynome de degré $n-1$, et cela bien qu'on ait pris pour point de départ un système de $2n$ valeurs intercalaires ; cette réduction constitue le grand avantage de la méthode de Gauss.

Il est nécessaire de remarquer que le polynôme $R_n$ peut être calculé à priori et ne dépend en aucune façon des volumes intermédiaires autres que $\alpha_1, \alpha_2$ --- On a en effet par définition même.

$$P(\alpha_i) = R_n(\alpha_i) = F(\alpha_i)$$

Car $X_n(\alpha_i) = 0$. Donc $P(x)$ est le polynome de degré $n-1$ qui coïncide av $F(x)$ pour les valeurs particulières $\alpha_1 \alpha_2 \; \alpha_n$.

---

[1] Nous reviendrons, dans la 2e partie du cours, sur les propriétés des fonctions X

# Vingt troisième Leçon.

## Volumes des corps solides. – Aires des surfaces courbes.

**I. – Volume d'un corps solide.** – Nous supposons connu seulement le volume du prisme à base rectangle. – Considérons un espace limité par une surface fermée $S$; cette surface est supposée continue ou formée d'un nombre fini de portions dont chacune soit continue. Menons trois séries de plans parallèles à trois plans rectangulaires $XOY$, $YOZ$, $ZOX$; nous formons ainsi un réseau de prismes dont nous conserverons seulement ceux qui sont tout entiers contenus à l'intérieur de $S$. Si maintenant nous faisons croître le nombre de ces prismes de telle sorte que les trois dimensions de chacun d'eux tendent en même temps vers 0, la somme de leurs volumes tendra vers une limite $V$, indépendante de la loi d'inscription et l'on aura

$$(1) \quad V = \iiint_{(S)} dx\, dy\, dz$$

Cela résulte de la définition même de l'intégrale triple. C'est cette limite $V$ qu'on appelle le volume de l'espace considéré.

Il est nécessaire d'établir que la valeur de l'intégrale est indépendante du système des axes: le raisonnement peut être calqué d'une manière absolue sur celui que nous avons fait au sujet des aires planes; nous nous contenterons d'en énumérer les différentes parties.

1°. – Le volume $V$ tel que nous l'avons défini est égal pour un espace résultant de la juxtaposition de deux autres, à la somme des volumes des deux espaces partiels.

2°. – Le volume d'un tétraèdre est égal au 1/3 du produit de l'aire d'une quelconque de ses faces par la hauteur correspondante. – On en déduit l'expression d'un volume limité par une surface polyédrique quelconque; en particulier le volume du prisme oblique.

3°. – Si on inscrit dans la surface $S$ une surface polyédrique dont le nombre des faces croisse indéfiniment, chacune d'elles tendant vers 0, le volume limité par cette surface sera, à chaque instant, indépendant du système des axes, et on verra, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au sujet des aires, que ce volume polyédrique a pour limite $V$. Le théorème sera donc complètement démontré.

En particulier si on rapporte la surface $S$ à des axes obliques, l'intégrale triple de la formule (1) devra être multipliée par le sinus du trièdre des axes: c'est

à dire par le volume d'un prisme construit sur trois segments égaux à l'unité et dirigés suivant $ox, oy, oz$.

II. – Applications. – Nous avons donné (page 126) le détail des calculs à effectuer dans le cas général pour le calcul d'une intégrale triple ; – ces calculs pouvant être souvent très simplifiés.

Supposons qu'il s'agisse d'évaluer le volume d'un segment obtenu en coupant le corps par les deux plans parallèles $z = a$, $z = b$. On aura.

$$V = \int_a^b dz \iint dx\,dy$$

la courbe $(C)$ désignant ici la section faite par le plan mobile dont l'ordonnée est $z$, dans la surface latérale du corps. L'intégrale double n'est autre que l'aire même de cette courbe ; c'est une fonction de $z$ qu'on devra d'abord chercher à évaluer ; nous le désignerons par $S(z)$ ; quand on reconnaîtra $S$ on aura pour ce volume de segment

$$(2)\quad V = \int_a^b S(z)\,dz.$$

1°. – Supposons comme premier exemple, que la surface latérale soit un cylindre ; la courbe $(C)$ restant constamment égale à elle-même $S(z)$ sera une constante égale à la base $B$ du cylindre et on aura :

$$V = (b-a)B$$

c'est le produit de la base par la hauteur.

2°. – Si la surface latérale est un cône dont le sommet soit sur $OZ$, le plan de base parallèle à $XOY$, et dont la base et la hauteur soient $B$, $h$, on aura

$$S(z) = \frac{z^2}{h^2}.B$$

D'où :

$$V = \int_a^b \frac{B}{h^2} z^2 dz = \frac{(b-a)B}{3h^2}(a^2 + b^2 + ab)$$

c'est l'expression connue du volume d'un tronc de cône.

3°. – Plus généralement supposons que $S(z)$ soit un trinôme du second degré en $z$.

$$S(z) = Az^2 + Bz + C$$

Supposons qu'on ait à évaluer le segment compris entre les deux plans $z = a$ $z = -a$ ; appelons $B, B', B''$ les aires des trois sections $z = a$, $z = -a$, $z = 0$, nous aurons : $(3)\quad B = Aa^2 + Ba + C \quad B' = Aa^2 - Ba + C \quad B'' = C$

D'autre part

$$V = \int_{-a}^{+a} (Az^2 + Bz + C)\,dz = 2\left(\frac{Aa^2}{3} + C\right)a$$

Si on désigne par $H$ la hauteur $\underline{2a}$ du segment, et qu'on tienne compte des relations (3) il vient

$$(4)\quad V = \frac{H}{6}(B + B' + 4B'')$$

Cette formule, où n'entrent que des quantités géométriques, comprend comme

cas particuliers toutes celles que fournit la géométrie élémentaire. — Cela tient à ce fait remarquable que, toutes les fois que la surface latérale est une surface réglée, la fonction $S(z)$ est un trinôme du second degré ainsi que nous allons le démontrer.

D'après sa forme même cette proposition sera établie en toute généralité si nous la démontrons pour le cas où la génératrice est réelle. — Soient alors

$$x = az + p \qquad y = bz + q$$

les équations de cette génératrice, $a, b, p, q$ étant des fonctions d'une même variable $t$, qui variera de $t_0$ à $T$ quand on fera le tour de la surface latérale; laissant $z$ constant on aura :

$$S(z) = \int_{t_0}^{T} (bz + q)(a'z + p')\, dt.$$

ou encore

$$S(z) = z^2 \int_{t_0}^{T} a'b\, dt + z \int_{t_0}^{T} (bp' + qa')\, dt + \int_{t_0}^{T} q p' dt$$

Les trois intégrales étant des constantes, le théorème est démontré.

Par exemple si on veut le volume d'un ellipsoïde entier on pourra prendre comme plans de base deux plans tangents parallèles. On aura ici $B = 0$ $B' = 0$ $V = \frac{2}{3} B'' H$. donc le volume de l'ellipsoïde s'obtient en multipliant l'aire d'une section centrale quelconque par les deux tiers de la distance comprise entre les deux plans tangents parallèles à cette section.

Considérons encore un paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

les axes sont supposés obliques; cherchons le volume d'une calotte limitée par les deux plans $z = 0$ $z = h$. On aura ici $B = 0$. Les deux sections homothétiques $B'' B'$ seront entre elles comme les carrés des lignes homologues, dans les deux ellipses: on aura donc $B'' = \frac{B'}{2}$ : et par suite :

$$V = \frac{h}{6}(B' + 4B'') = \frac{h}{2} B'$$

Le segment considéré a donc un volume deux fois moindre que le cylindre qui aurait même base et même hauteur.

4°. — Comme exemple important du cas où l'on est ramené immédiatement à une intégrale simple, considérons une surface de révolution autour de l'axe des $z$; proposons nous d'évaluer le volume limité par cette surface, par deux plans de parallèles $z = \alpha$, $z = \beta$ enfin par deux plans méridiens faisant entre eux un angle. On aura ici évidemment,

$$S(z) = \frac{\omega}{2} \rho^2 \quad V = \int_\alpha^\beta \frac{\omega}{2} \rho^2 dz$$

$\rho$ étant le rayon du parallèle; $\rho$ et $z$ sont liés par une relation qui n'est autre que l'équation du méridien même de la surface. — Si en particulier on veut le volume du segment complet compris entre les deux plans $z = \alpha$, $z = \beta$, il faudra faire $\omega = 2\pi$.

$$S(z) = \pi \rho^2 \qquad V = \pi \int_\alpha^\beta \rho^2 dz.$$

III. — Au lieu d'une tranche ou segment compris entre deux plans parallèles, on peut avoir à évaluer un solide limité inférieurement par le plan XOY, supérieurement par une surface courbe $z = f(x, y)$, et latéralement par un cylindre ayant ses génératrices parallèles à OZ, et pour base une courbe donnée (C) située dans le plan XOY. On est alors ramené à une intégrale double, si en effet, on intègre d'abord par rapport à $z$ depuis $z=0$ jusqu'à $z = f(x,y)$, on aura:

$$(5) \qquad V = \iint_{(c)} f(x, y)\, dx\, dy$$

c'est la représentation géométrique de l'intégrale double la plus générale, comme l'aire du trapèze curviligne et celle de l'intégrale simple.

Exemples. — 1° Supposons la courbe (C) un parallélogramme limité par les droites $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$, et prenons pour surface supérieure le paraboloïde hyperbolique

$$z = \frac{xy}{c}$$

Nous aurons alors

$$V = \int_b^{b'} dy \int_a^{a'} \frac{xy}{c}\, dx = \frac{a'^2 - a^2}{2} \cdot \frac{b'^2 - b^2}{2} \cdot \frac{1}{c} = (a'-a)(b'-b)\, \frac{a'b' + ab' + ba' + ab}{4c}$$

C'est la surface du rectangle de base, multipliée par la moyenne arithmétique des arêtes latérales.

2°. — Cherchons encore le volume commun à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

et au cylindre

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

qui passe par le centre de la sphère et présente un diamètre deux fois moindre. On a ici

$$V = \iint \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

l'intégrale double s'étendant à tout l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2ax$; on aura donc:

$$V = \int_0^{a} dx \int_{-\sqrt{2ax - x^2}}^{+\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy$$

Le calcul s'achèverait sans aucune difficulté, mais il est clair que les coordonnées rectangulaires ne sont pas celles qui conviennent le mieux dans le cas actuel.

IV. — Volumes en coordonnées curvilignes. Supposons les coordonnées de chaque point M de l'espace exprimées à l'aide de trois variables $u, v, w$, par trois équations de la forme

$$(6) \qquad x = f(u, v, w) \qquad y = \varphi(u, v, w) \qquad z = \psi(u, v, w)$$

La formule (1) transformée à l'aide de ces relations donne

$$(7) \quad \dots\dots\dots\dots \quad V = \iiint J \, du \, dv \, dw.$$

J étant le déterminant fonctionnel

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$$

La détermination des limites constituera dans chaque cas un problème particulier.

Considerons maintenant un point M de l'espace et les trois courbes coordonnées qui passent par ce point; les tangentes à ces trois droites ont respectivement pour coefficients de direction

$$C_1) \quad \frac{\partial f}{\partial u} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$C_2) \quad \frac{\partial f}{\partial v} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$C_2) \quad \frac{\partial f}{\partial w} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial w} \quad \frac{\partial \psi}{\partial w}$$

Supposons OXYZ rectangulaires, le sinus du trièdre formé par les trois directions précédentes est évidemment égal à :

$$\frac{1}{A.B.C} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{J}{A.B.C}$$

en posant

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2} \quad B = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2} \quad C = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)^2}$$

Ce sinus est en effet égal à 6 fois le volume du tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées :

$$0, 0, 0; \frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{1}{A}\frac{\partial \psi}{\partial u}; \frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{1}{B}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{1}{B}\frac{\partial \psi}{\partial v}; \frac{1}{C}\frac{\partial f}{\partial w} \quad \frac{1}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial w} \quad \frac{1}{C}\frac{\partial \psi}{\partial w}$$

Ceci posé quand on passe des valeurs $u, v, w$ aux valeurs $u+du$, $v+dv$, $w+dw$ les trois longueurs d'arcs des courbes coordonnées ont pour valeurs principales

$$A\,du, \quad B\,dv, \quad C\,dw$$

Si maintenant nous évaluons le volume du parallélipipède construit sur ces trois arêtes infiniment petites nous trouvons

$$ABC \,.\, du\, dv\, dw \,\frac{J}{A.B.C} = J\,du\,dv\,dw.$$

On retrouve donc précisément l'élément qui figure dans l'intégrale triple (7). En d'autres termes on pourra, au lieu de faire une transformation analytique, calculer directement le volume d'un parallélipipède construit sur les éléments des trois lignes coordonnées qui

partent du point M, en les considérant comme des droites.

Par exemple considérons les coordonnées polaires définies par les équations

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$\theta$ est ici la colatitude, $\varphi$ la longitude. On voit immédiatement que les trois lignes coordonnées forment constamment un trièdre trirectangle et ont respectivement pour longueurs

$$dr \qquad r\sin\theta\, d\varphi \qquad r\, d\theta$$

On aura donc pour élément de volume $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ ; c'est la formule même qu'aurait donné le calcul du déterminant fonctionnel puisque $J = r^2 \sin\theta$.

Quant aux limites de l'intégration on les calculera aisément dans chaque cas particulier. Si le point O est à l'intérieur du corps, on groupera d'abord les éléments contenus dans un pinceau le long duquel $r$ variera seul, $d\theta$, $d\varphi$ restant constants on aura ainsi à intégrer par rapport à $r$ de $r = 0$ jusqu'à $r = f(\theta, \varphi)$ cette dernière équation étant celle de la surface extérieure du corps ; on intégrera ensuite par rapport à $\theta$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ ce qui donnera le volume d'un onglet d'angle $d\varphi$, et enfin par rapport à $\varphi$ de $-0$ à $2\pi$ on aura ainsi

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{f(\theta,\varphi)} r^2 dr = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f^3(\theta,\varphi)\, d\theta$$

Si au contraire le point O est à l'extérieur du corps, on devra séparer sa surface extérieure en deux parties à l'aide de la courbe suivant laquelle cette surface est touchée par le cône circonscrit du point O ; chaque rayon vecteur aura (dans le cas le plus simple) un point d'entrée et un point de sortie et les deux nappes de la surface seront représentées par deux équations différentes
$$r = f(\theta, \varphi) \qquad r = f_1(\theta, \varphi)$$

Si on considère maintenant les deux plans tangents extrêmes $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ menés par OZ et qui comprennent entre eux la surface, ils déterminent sur la courbe de contact deux points A, B qui séparent cette ligne d'ombre en deux parties ayant respectivement des équations de la forme
$$\theta = F(\varphi) \qquad \theta = F_1(\varphi)$$
et on aura alors

$$V = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{F(\varphi)}^{F_1(\varphi)} d\theta \int_{f(\theta,\varphi)}^{f_1(\theta,\varphi)} r^2 dr = \frac{1}{3}\int_\alpha^\beta d\varphi \int_{F(\varphi)}^{F_1(\varphi)} \left[f_1^3(\theta,\varphi) - f^3(\theta,\varphi)\right] d\theta$$

Il est souvent commode d'avoir recours aux coordonnées semi polaires définies par les équations
$$z = z \qquad x = \rho\cos\omega \qquad y = \rho \sin\omega$$

Ici les lignes coordonnées sont encore rectangulaires ; ce sont deux droites et un arc de cercle ayant respectivement pour longueurs $dz \quad d\rho \quad \rho\, d\omega$.

On aura donc $$V = \iiint \rho\, d\rho\, d\omega\, dz$$

Revenons par exemple au volume du paragraphe précédent. Les deux surfaces sphériques qui limitent le volume ont pour équations

$$z = +\sqrt{a^2 - \rho^2} \qquad z = +\sqrt{a^2 - \rho^2}$$

On aura donc $$V = 2\iint \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\omega\, d\rho$$

L'équation de la base du cylindre est ici $\rho = a\cos\omega$ et on devra intégrer de $\rho = 0$ à $\rho = a\cos\omega$ puis enfin de $\omega = -\frac{\pi}{2}$ à $\omega = +\frac{\pi}{2}$ ; on aura donc :

$$V = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{a\cos\omega} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho = \frac{4}{3}\,a^3\int_0^{+\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\omega)\,d\omega = \frac{2}{3}\pi a^3 - \frac{8}{9}a^3$$

**V — Aire d'une surface courbe** — Considérons une surface courbe et sur cette surface une ligne fermée (C). Que doit-on entendre par l'aire de la portion de surface que limite la courbe (C)? Il serait naturel d'inscrire dans cette portion de surface une surface polyédrique et de chercher si l'aire de cette surface polyédrique a une limite quand on fait croître indéfiniment le nombre des faces, chacune d'elles tendant vers 0, et le contour du polyèdre tendant à se confondre avec (C). Or il est difficile d'établir rigoureusement l'existence de cette limite et la démonstration qu'on en donne ordinairement prête à de sérieuses objections (Voir dans la 2e Edition du cours de Mr Hermite, l'objection de Mr Schwarz). On doit donc chercher un autre mode de définition.

Soit (C') la projection de (C) sur le plan des $x\,y$ ; inscrivons dans l'aire (C') une infinité de rectangles par des parallèles à $OX$, $OY$ et sur chacun de ces rectangles élevons un prisme droit parallèle à $OZ$ ; ce prisme détachera dans la surface un élément curviligne $\sigma$ ; menons le plan tangent en un point quelconque pris à l'intérieur de cet élément ; il coupera le prisme suivant un quadrilatère dont je désignerai l'aire par $\sigma$.

La somme des aires de tous ces quadrilatères aura évidemment une limite déterminée quand le nombre des rectangles inscrits dans (C') augmentera indéfiniment chacun d'eux tendant vers 0 ; et cette limite sera

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad S = \iint_{(C')} F(x,y)\,dx\,dy$$

$F(x,y)$ étant, en général, l'inverse du cosinus de l'angle que le plan tangent en un point $(x,y)$ fait avec le plan des $x\,y$. C'est cette limite que nous prendrons pour définition de l'aire de surface courbe limitée par la courbe (C).

On pourrait encore objecter que l'aire ainsi définie dépend d'un système d'axes particuliers ; voici comment on peut démontrer que la valeur de $S$ reste la même quelle que soit la direction des axes. Il est d'abord bien évident, par la définition même de $S$, que cette quantité n'est pas altérée quand on imprime aux axes une rotation autour de $OZ$ et une translation quelconque. Ceci posé, imaginons qu'on ait exprimé les coordonnées $x, y, z$ de chaque point à l'aide de deux coordonnées intrinsèques $u, v$ dépendant uniquement de la surface elle même et nullement des axes. Si on pose :

$$x = f(u,v) \qquad y = \varphi(u,v) \qquad z = \psi(u,v)$$

$$A = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad B = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}$$

On aura d'abord

$$F(u,v) = \frac{1}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

Si on transforme alors la formule (8) en y introduisant les variables u, v, on aura :

$$(9) \text{ . . . . . . . . . } S = \iint_{(C)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$$

Cette expression est symétrique par rapport aux trois axes OX, OY, OZ ; on peut donc sans inconvénient remplacer, dans la définition, l'axe des z par l'un des deux autres, OX par exemple ; on voit alors qu'on pourra imprimer au système d'axes, sans changer (S) trois rotations quelconques autour de OX, OY, OZ, puis une translation arbitraire, ce qui revient à dire qu'on pourra leur donner une position quelconque dans l'espace.

Remarque — La formule (9) conduit à une autre conséquence importante. Les courbes u = const. v = const. décomposent la courbe (C) en quadrilatère curviligne tels que MPQM' ; au lieu de ce quadrilatère, considérons un parallélogramme ayant pour sommet M pour angle en M l'angle des tangentes aux deux lignes coordonnées, et pour côtés rectilignes les éléments d'arcs MP, MQ ; on trouvera sans difficulté que l'aire de ce parallélogramme est $\sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv$. On pourra donc évaluer l'aire S en cherchant la limite de la somme de tous ces parallélogrammes - Cette remarque, démontre à nouveau que S est indépendant du système des axes, et donne en même temps un moyen géométrique d'évaluer l'élément de l'intégrale.

Par exemple, sur une sphère de rayon R chaque point étant déterminé par sa longitude φ et sa colatitude θ, on reconnaît immédiatement que les coordonnées sont orthogonales et que les éléments de longueur des lignes coordonnées (parallèle et méridien) sont égaux respectivement à $R \sin\theta\, d\varphi$, $R\, d\theta$ on aura donc immédiatement et sans passer par un calcul de transformation

$$S = R^2 \iint_{(C)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Si on fait la transformation $\varphi = \omega$ $R \sin\theta = \rho$, on a S en coordonnées demi polaires

$$S = R \iint_{(C')} \frac{\rho\, d\omega\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Comme application coupons la sphère par le cylindre $x^2+y^2-2Rx=0$.

ou $$\rho = R \cos\omega$$

et cherchons l'aire comprise dans la boucle d'intersection qui se trouve sur l'hémisphère supérieur. Nous aurons pour la moitié de cette aire

$$\frac{S}{2} = R \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} d\omega \int_0^{R\cos\omega} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$= R_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\omega)\, d\omega$$

d'où $$S = R^2 (\pi - 2)$$

Si on imagine un second cylindre symétrique du premier par rapport à Oz, l'ensemble des deux cylindres découpera sur l'hémisphère une surface égale à $2\pi R^2 - 4R^2$, donc enfin la portion restante de cet hémisphère aura pour surface $4R^2$ (problème de Viviani).

---

# Note sur les équations différentielles et les fonctions implicites.

I — Considérons un système d'équations de la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = f(x, u, v, w) \qquad \frac{dv}{dx} = \varphi(x, u, v, w) \qquad \frac{dw}{dx} = \psi(x, u, v, w).$$

Les fonctions de quatre variables $f, \varphi, \psi$ étant supposées déterminées, finies et continues lorsque $x, u, v, w$ varient dans les intervalles.

$(x_0 - a, x_0 + a)$ $(u_0 - b, u_0 + b)$ $(v_0 - b, v_0 + b)$ $(w_0 - b, w_0 + b)$

Nous désignerons par $A$ le module maximum des fonctions $f, \varphi, \psi$, dans le champ ainsi déterminé. Nous admettrons enfin que ces fonctions admettent, par rapport à $u, v, w$, des dérivées partielles du premier ordre, déterminées et finies et nous appellerons $B$ le module maximum de ces dérivées.

De cette dernière hypothèse et du théorème des accroissements finis relatif aux fonctions de plusieurs variables, il résulte qu'on a :

$$(2) \ldots\ldots \left| f(x, u', v', w') - f(x, u, v, w) \right| < 3B\lambda$$

$(u, v, w)$ $(u', v', w')$ étant deux systèmes de valeurs contenues dans le champ donné, $\lambda$ désignant le plus grand des trois modules $|u' - u|$, $|v' - v|$, $|w' - w|$.

Ceci posé nous allons démontrer la proposition suivante :

Théorème — Il existe trois fonctions $u, v, w$, de la variable $x$ qui satisfont aux conditions suivantes :

1° Elles se réduisent respectivement à $u_0, v_0, w_0$, pour $x = x_0$ et restent déterminées, finies, continues et dérivables dans un intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ convenablement restreint.

2° Ces fonctions et leurs dérivées, dans ce même intervalle, satisfont identiquement aux équations (1).

Ce théorème fondamental est une généralisation de ce fait que toute fonction continue admet une fonction primitive. La démonstration que nous allons reproduire a été donnée tout récemment par Mr Picard [1].

Posons successivement :

$$(3) \begin{cases} u_1 = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, u_0, v_0, w_0)\, dx & v_1 = v_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, u_0, v_0, w_0)\, dx & w_1 = w_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(x, u_0, v_0, w_0)\, dx \\ u_2 = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, u_1, v_1, w_1)\, dx & v_2 = v_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, u_1, v_1, w_1)\, dx & w_2 = w_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(x, u_1, v_1, w_1)\, dx \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, u_{m-1}, v_{m-1}, w_{m-1})\, dx & v_m = v_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, u_{m-1}, v_{m-1}, w_{m-1})\, dx & w_m = w_0 + \int_{x_0}^{x} \psi(x, u_{m-1}, v_{m-1}, w_{m-1})\, dx \end{cases}$$

---

[1] Bulletin de la Société Mathématique de France. Tome XIX, page 61.

Ces fonctions $u_m$, $v_m$, $w_m$ s'obtiennent par des opérations parfaitement définies ; ces fonctions se réduisent à $u_0$, $v_0$, $w_0$ pour $x = x_0$. Nous allons montrer d'abord que, m augmentant indéfiniment elles tendent vers des limites finies, ces limites seront des fonctions de $x$.

Prenons par exemple $u_m$ ; si on pose

$$U_1 = u_1 - u_0 \qquad U_2 = u_2 - u_1 \qquad U_3 = u_3 - u_2 \qquad U_m = u_{m-1} - u_m$$

on aura :

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots + U_m$$

Il suffit de prouver que la série

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_m + \dots$$

est convergente. Or on a d'abord, d'après les relations (3)

$$(4) \qquad |U_1| < A\rho$$

$\rho$ étant un nombre au plus égal à $a$ et le module de $x - x_0$ étant supposé inférieur à $\rho$. Nous devrons d'abord supposer que $\rho < \frac{b}{A}$ et dans ces conditions $u_1$, $v_1$, $w_1$ resteront comprises dans les limites $(u_0 - b, u_0 + b) \dots (w_0 - b, w_0 + b)$. Le même raisonnement s'applique de proche en proche, et par suite toutes les intégrations indiquées sont légitimes. On a d'ailleurs d'après les équations (3) :

$$(5) \qquad \frac{dU_m}{dx} = f(x, u_{m-1} v_{m-1} w_{m-1}) - f(x, u_{m-2} v_{m-2} w_{m-2})$$

Si on appelle en général $\lambda_m$ le plus grand des trois modules

$$|u_m - u_{m-1}| \quad |v_m - v_{m-1}| \quad |w_m - w_{m-1}|$$

l'inégalité (2) montre qu'on aura

$$(6) \qquad \left|\frac{dU_m}{dx}\right| < 3B\lambda_{m-1}$$

Or

$$U_m = \int_{x_0}^{x} \frac{dU_m}{dx}\, dx$$

puisque $U_m$ s'annule pour $x = x_0$ on aura donc :

$$|U_m| < 3B\lambda_{m-1}|x - x_0|$$

ou encore

$$\lambda_m < 3B\lambda_{m-1}\delta$$

$\delta$ étant un nombre quelconque égal ou inférieur à $\rho$ si nous supposons $|x - x_0| < \delta$.

Les inégalités (4) et (7) donnent

$$|U_m| < (3B\delta)^m A$$

Si donc on prend $\delta < \frac{1}{3B}$ la série considérée sera convergente ; la convergence sera d'ailleurs absolue et uniforme dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ; $\delta$ étant en résumé inférieur à la plus petite des trois quantités

$$a \,, \quad \frac{b}{A} \,, \quad \frac{1}{3B}$$

Donc $u_m$ tend vers une limite $u$, qui est une fonction de $x$ ; de même $v_m$ $w_m$ tendent vers des limites $v$, $w$.

Nous allons démontrer à présent que ces fonctions satisfont aux équations 1) ; elles vérifieront alors toutes les conditions énoncées dans le théorème

Or l'inégalité (6) montre clairement que la série

$$(8)\quad \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx} + \frac{dU_3}{dx} \cdots + \frac{dU_m}{dx} + \cdots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, (puisque les $A$ se succèdent comme les termes d'une progression géométrique décroissante). Dès lors $u$ admet une dérivée qui est justement la somme de la série (8) ; mais cette somme est facile à évaluer ; en effet la somme $S_m$ des $m$ premiers termes est évidemment

$$S_m = f(x, u_m, v_m, w_m)$$

D'après la continuité de la fonction $f$, cette somme tend vers $f(x, u, v, w)$ quand $u_m, v_m, w_m$ tendent respectivement vers $u, v, w$. On a donc bien

$$\frac{du}{dx} = f(u, v, w)$$

et de même pour les autres équations (1). Le théorème est dès lors complètement démontré.

II — Nous pouvons maintenant établir sans difficulté, au moins dans le cas d'une seule variable indépendante, le théorème relatif à l'existence d'un système de fonctions implicites, théorème que nous avons énoncé sans démonstration (page 15)

Prenons trois équations de la forme

$$(9)\quad F(x, u, v, w) = 0 \qquad \Phi(x, u, v, w) = 0 \qquad \Psi(x, u, v, w) = 0$$

$F$, $\Phi$, $\Psi$ satisfaisant aux mêmes conditions que tout à l'heure $f, \varphi, \psi$ ; supposons les de plus dérivables par rapport à $x$ et considérons le système différentiel

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial w}\dfrac{dw}{dx} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial w}\dfrac{dw}{dx} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial w}\dfrac{dw}{dx} = 0 \end{cases}$$

Supposons que, dans le champ donné $[(x-x_0\ x+a)\ (u_0-b, u_0+b) - (w_0-b, w_0+b)]$ on ait constamment :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial F}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial \Psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial v} & \dfrac{\partial \Psi}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

et admettons enfin que toutes les dérivées partielles qui figurent ici soient continues.

Les relations (10) pourront alors être résolues, pour chaque système de valeurs, par rapport à $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ et on en tirera un système différentiel de la forme (1). Soit $U\ V, W$, les trois fonctions intégrales dont nous avons démontré l'existence. Si

nous substituons ces fonctions dans $F, \Phi, \Psi$ nous aurons trois fonctions composées d'une seule variable indépendante $x$ ; et leurs dérivées seront toutes trois identiquement nulles dans l'intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, d'après les relations (10). Donc on aura identiquement dans ce même intervalle :

$$F(x, U, V, W) = \text{const} \qquad \Phi(x, U, V, W) = \text{const} \qquad \Psi(x, U, V, W) = \text{const}$$

mais si on fait $x = x_0$, $U, V, W$ se réduisent respectivement à $u_0, v_0, w_0$. Si donc $x_0$ $u_0$ $v_0$ $w_0$ sont un système de valeurs vérifiant les équations (9) on aura identiquement

$$F(x, U, V, W) = 0 \qquad \Phi(x, U, V, W) = 0 \qquad \Psi(x, U, V, W) = 0$$

Il existe donc trois fonctions de $x$ satisfaisant aux relations (9) et se réduisant à $u_0, v_0, w_0$ pour $x = x_0$.

Remarque — La condition relative au déterminant fonctionnel se réduit à ce que $J$ ne s'annule pas pour $x = x_0$, $u = u_0$ – $w = w_0$. En effet $J$ étant évidemment une fonction continue dans le champ $(a, b)$ restera forcément différent de 0 dans un champ convenablement restreint autour des valeurs initiales ; et ce nouveau champ de variation pourra toujours être substitué au champ primitif dans le raisonnement qui précède.

---

Imp. F. Hermet, 70, rue de Rennes. Paris.

# A LA MÊME LIBRAIRIE

**Acta Mathematica,** M. MITTAG-LEFFLER, rédacteur en chef. — Tomes I à X, le vol. . . . . **25 fr. »**
Tome XI et suivants, le vol. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **18 fr. 75**

**Duclaux (E.),** membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne. — *Cours de physique et de météorologie,* professé à l'Institut agronomique, 1 beau volume gr. in-8°, IV-504 p., 175 fig., dont 44 en deux couleurs, 1891. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **7 fr. 50**

**American Journal of Mathematics,** Simon NEWCOMB and Th. CRAIG, edit. — Tomes II à XI, le vol. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **28 fr. »**
Tome XII en cours de publication.

**Hermite (Ch.).** — *Cours de la Faculté des Sciences sur les intégrales définies, la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et les fonctions elliptiques,* 4e éd. entièrement refondue, in-4° lith., VI-293 p., 1891. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **15 fr. »**

**Appell.** — *Cours de mécanique rationnelle,* publié par MM. ABRAHAM et DELASSUS, élèves de l'École Normale supre, in-4° lith., 1888. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **18 fr. »**

**Despeyrous.** — *Cours de mécanique rationnelle,* avec des notes par M. G. DARBOUX, de l'Institut, 2 forts vol. grand in-8°, 1884-86. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **22 fr. »**
— *Mémoire sur les équations résolubles algébriquement,* in-8°, 1887. . . . . . . . . . . . . . . . **6 fr. »**

**Tannery,** maître de conférences et sous-directeur à l'École Normale supérieure. — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* gr. in-8° de VIII-401 p., 1886. . . . . . . . . . . . . . . **12 fr. »**

**Terquem (A.) et Damien (B. C.),** professeurs à la Faculté des Sciences de Lille. — *Introduction à la physique expérimentale :* Unités; Calcul des erreurs; Mesure des quantités primitives : longueurs, masses, temps, 1 vol. gr. in-8°, 300 p. compactes, 68 fig. gravées, 1888. . . . . . . . . . . . **10 fr. »**

**Bois-Reymond (Paul du)** (trad. G. MILHAUD et A. GIROT). — *Théorie générale des fonctions,* in-8°, 221 p., 1887. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **8 fr. »**

**Gruey,** professeur à la Faculté des Sciences et directeur de l'Observatoire de Besançon. — *Exercices d'astronomie,* à l'usage des élèves des Facultés et des Observatoires, 1 beau volume gr. in-8°, 346 p., 22 pl. gravées, 1889. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **15 fr. »**

**Ampère.** — *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques,* 2e éd. conforme à la première, in-4°, avec planches gravées, 1885.
Tirage sur papier fort. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5 fr. »**
Tirage sur papier de Hollande. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **8 fr. »**

**Descartes.** — *Géométrie,* petit in-4° carré, 32 fig. gr. intercalées, 1886.
Tirage sur papier glacé. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5 fr. »**
Tirage sur papier de Hollande. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **8 fr. »**

**Possé (C.),** professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg. — *Sur quelques applications des fractions continues algébriques,* in-8°, 1886. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5 fr. »**

**Goursat.** — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre,* gr. in-8°, 354 p. compactes, 1891. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **12 fr. »**
C'est l'ouvrage le plus important que l'on ait encore écrit sur cette branche de l'analyse.

**Kœnigs (G.),** maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale. — *Leçons de l'agrégation classique de mathématique,* in-4° lith., 1891. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **9 fr. »**

**Duhem (P.).** — *Cours de physique mathématique et de cristallographie de la Faculté des Sciences de Lille,* 2 vol. in-4° lith., 1891-92, env. 750 p. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **28 fr. »**

## *OUVRAGES EN SOUSCRIPTION :*

**Cours de la Faculté des Sciences de Lille :**

**Analyse,** par M. DEMARTRES. — L'ouvrage formera 3 parties. On peut souscrire à la 2e partie, en envoyant un mandat de **8** fr. à l'ordre de M. HERMANN, ou à la 2e et 3e partie en envoyant un mandat de **15** fr.

**Mécanique** (cours de licence), par M. PAINLEVÉ. Souscription à l'ouvrage complet . . . . **19 fr. »**

**Mécanique** (cours d'agrégation), par M. PAINLEVÉ. Souscription à l'ouvrage complet. . . **9 fr. »**

Bordeaux. — Impr. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11

FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

1890-91

# COURS D'ANALYSE

PROFESSÉ PAR

**M. DEMARTRES**

ET RÉDIGÉ PAR

**M. E. LEMAIRE**

## DEUXIÈME PARTIE

### PROPRIETÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

*8, Rue de la Sorbonne, 8*

1892

VI. 8688

Farrar fund

# TABLE DES MATIÈRES

## I. Fonctions analytiques en général.



## II. Fonctions uniformes.



## III. Fonctions doublement périodiques.

## IV. Fonctions multiformes.





Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.

# Première Leçon.

## Fonctions de variables complexes.

I. — Une quantité imaginaire $z = x + iy$ peut être représentée dans un plan par le point $m$ dont les coordonnées sont $x$ et $y$; $m$ s'appelle l'image de $z$. Inversement à tout point $m$ correspond sans ambiguïté une imaginaire $z = x + iy$ qu'on appelle l'affixe de $m$. On sait que le module $r$ de $z$ est égal à la distance de $m$ à l'origine, cette distance étant prise en valeur absolue. Son argument est l'angle dont il faut faire tourner $Ox$ dans le sens direct pour l'amener à coïncider avec la demi-droite $Om$; il est déterminé à un multiple de $2\pi$ près. On sait de plus que deux imaginaires $z$ et $z'$ ayant pour images $m$ et $m'$, si on mène par $m$ une droite $mm''$ égale et parallèle à $Om'$ et de même sens, l'affixe de $m''$ sera égale à $z + z'$. Enfin le produit de plusieurs imaginaires s'obtient en faisant le produit de leurs modules et la somme de leurs arguments.

Lorsque $x$ et $y$ sont indépendants et que l'image de $z$ se déplace dans une aire $(c)$; on dit que $(c)$ est le champ de la variable $z$. Considérons deux fonctions de $x$ et $y$.

$$X = \varphi(x, y) \qquad Y = \psi(x, y)$$

indépendantes l'une de l'autre, mais déterminées dans le champ $(c)$. La quantité $u = X + iY$ se trouve déterminée pour chaque valeur de $z$ on dit qu'elle est fonction de $z$ et exprime cette dépendance en écrivant

$$u = f(z)$$

Au point $m$ image de la variable correspond un point $M$ image de la fonction dont les coordonnées sont $X = \varphi(x, y)$ $Y = \psi(x, y)$. La fonction peut être représentée soit dans le même plan que la variable soit dans un plan différent.

**Définitions.** — Si à une position de $m$ correspond un point unique $M$, on dit que la fonction est bien déterminée dans le champ $(C)$. Pour cela il faut et il suffit que $X$ et $Y$ soient deux fonctions bien déterminées de $x$, $y$.

Si quelle que soit la position de $m$ dans $(C)$, le module de $u$ reste inférieur à un nombre fixe $A$, la fonction est dite finie dans le champ $(C)$. Pour cela il est nécessaire et suffisant que $X$ et $Y$ soient elles-mêmes finies dans l'intérieur de $(C)$

Nous dirons que $u$ est continue au point $m_0$ du champ $(C)$, si étant donné un nombre positif $\mathcal{E}$ quelconque, on peut décrire du point $m_0$ comme centre un cercle de rayon $\eta$ tel que pour toutes les valeurs de $z$ intérieures à ce cercle, toutes les valeurs correspondantes de $u$ restent à l'intérieur du cercle de rayon $\mathcal{E}$ décrit de $M_0$ comme centre. En d'autres termes, $u$ est continue au point $m_0$ si on peut donner à la variable $z$, dans une direction quelconque, à partir de $z_0$, un accroissement de module assez petit pour que le module de l'accroissement de la fonction reste inférieur à $\mathcal{E}$.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que $X$ et $Y$ soient continues pour $x = x_0$ $y = 0$. En effet si la fonction est continue on doit avoir:

$$(1) \qquad \left[\varphi(x,y) - \varphi(x_0 y_0)\right]^2 + \left[\psi(x,y) - \psi(x_0 y_0)\right]^2 < \mathcal{E}^2$$

pour toutes les positions de $m$ intérieures au cercle de rayon $\eta$. Or ceci ne peut avoir lieu que si chacune des différences $\varphi(x,y) - \varphi(x_0, y_0)$ et $\psi(x,y_0) - \psi(x_0 y_0)$ est elle-même inférieure à $\mathcal{E}$.

Réciproquement, si $X$ et $Y$ sont continues, on peut choisir $\eta$ assez petit pour que chacune des différences précédentes reste en valeur absolue inférieure à $\frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}}$ et dès lors l'inégalité (1) sera vérifiée.

D'après cela, si $m$ se rapproche indéfiniment de $m_0$ en suivant une direction quelconque, $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ auront respectivement pour limites $\varphi(x_0 y_0)$ et $\psi(x_0 y_0)$ donc $f(z)$ aura $f(z_0)$ pour limite. C'est une autre manière d'exprimer la continuité au point $z_0$.

Si la fonction $f(z)$ est continue en chaque point du champ $(C)$ nous dirons qu'elle est continue dans le champ $(C)$.

**Remarque.** — Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit continue dans l'aire $(C)$ et sur le contour de cette aire; elle sera alors uniformément continue, c'est-à-dire, que la quantité $\eta$ précédemment définie pour un point $m_0$ de cette aire pourra, $\mathcal{E}$ étant donné, être prise toujours la même, quelle que soit la position de $m_0$ dans l'aire ou sur son contour. En effet, $X$ et $Y$ fonctions de variables réelles, étant continues dans $(C)$ et sur son contour, on sait[1]

---

[1] Voir 1ère Partie – page 118.

qu'on peut trouver un même nombre $\eta$ pour toute position de $m_0$ dans $(C)$ ou sur son contour, et tel qu'on ait

$$\text{mod } \Delta X < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$
$$\text{mod } \Delta Y < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tant qu'on reste à l'intérieur du cercle de rayon $\eta$; par suite on aura dans les mêmes conditions

$$\text{mod } \Delta u < \varepsilon$$

$\eta$ étant pris toujours le même.

**II.** — Supposons qu'on donne à $z$ un accroissement $\Delta z$ représenté par le segment $m\,m'$ la fonction $u = f(z)$ prend un accroissement correspondant $\Delta u$ représenté par le segment $MM'$, et si elle est continue, lorsque $m'$ se rapproche indéfiniment du point $m$ en suivant un chemin quelconque, cet accroissement tend vers zero. Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ peut tendre vers une limite finie, mais si $X$ et $Y$ ont été choisies arbitrairement, cette limite dépendra en général de la courbe suivie par $m'$ pour se rapprocher de $m$. Un exemple simple rend compte de ce fait.

$$\text{Soit} \quad u = x - iy.$$

Si on se déplace parallèlement à l'axe des $y$ à partir de $m$, on a $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = -1$. Si on se déplace parallèlement à l'axe des $x$, on a $\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = 1$. Si on se déplace dans l'azimut $\alpha$, ci. si $\Delta y = h \sin \alpha$ $\Delta x = h \cos \alpha$, on aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = (\cos \alpha - i \sin \alpha)^2$$

rapport dont la limite varie avec $\alpha$.

Cela posé, si quelque soit le chemin suivi par $m'$ pour se rapprocher de $m$, la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ existe et a une valeur unique au point $m$, nous dirons que la fonction est monogène en ce point. Dans ce cas la limite de $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ s'appellera la dérivée de la fonction au point $m$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, nous allons le voir, que $X, Y$ satisfassent à des conditions bien déterminées. Lorsqu'il y aura une dérivée pour toutes les valeurs de $z$ appartenant à un champ $(C)$ cette dérivée sera une fonction $f'(z)$ de $z$. Les fonctions qui engendrent ainsi une dérivée unique pour chaque point sont dites monogènes dans le champ $(C)$.

Soit toujours $u = X + iY$. Laissons $y$ fixe et donnons à $x$ un accroissement $\Delta x$, c'est-à-dire supposons que $m'$ se rapproche de $m$ suivant une parallèle à l'axe des $x$. On a :

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x} + i\,\frac{\psi(x+\Delta x, y) - \psi(x,y)}{\Delta x}$$

Pour qu'il y ait une dérivée dans la direction considérée, il faut que les deux termes du second membre aient des limites, c'est-à-dire que $\varphi$ et $\psi$ soient dérivables par rapport à $x$, et on aura alors pour la dérivée estimée parallèlement à l'axe des $x$:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\,\frac{\partial Y}{\partial x} \quad (1)$$

Déplaçons-nous maintenant suivant une parallèle à l'axe des $y$, on a:

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,y)}{i\,\Delta y} + \frac{\psi(x, y+\Delta y) - \psi(x,y)}{\Delta y}$$

Il faut donc encore ici que $\varphi$ et $\psi$ soient dérivables par rapport à $y$; et la dérivée estimée parallèlement à l'axe des $y$ sera:

$$-i\,\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (2)$$

Égalant les deux valeurs (1) et (2) trouvées pour $f'(z)$ nous aurons les deux conditions:

$$(A) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Il est donc nécessaire que $\varphi$ et $\psi$ admettent dans le champ $(C)$, des dérivées partielles satisfaisant aux équations (A).

Nous supposerons de plus que les dérivées partielles soient continues et nous allons montrer que dans ce cas les conditions trouvées sont suffisantes. On a en effet, dans le cas général

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) + i\,[\psi(x+h, y+k) - \psi(x,y)]}{h+ik}$$

Or on peut écrire:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x,y) = h\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + k\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h\alpha + k\beta$$

$$\psi(x+h, y+k - \psi(x,y) = h\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + k\,\frac{\partial \psi}{\partial y} + h\gamma + k\,\delta$$

$\alpha, \beta\ \gamma\ \delta$ étant des infiment petits): Si donc, on pose $h = \rho\cos\alpha$ $k = \rho\sin\alpha$, on aura, ($m$ et $n$ étant 2 infiniment petits)

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\cos\alpha\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,(\cos\alpha\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial \psi}{\partial y} + \rho(m+in)}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\cos\varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\,(\cos\alpha\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin\alpha\,\frac{\partial \psi}{\partial y})}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

Éliminons au moyen des conditions (A) supposées vérifiées, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$; il vient:

et $$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ce qui donne bien une dérivée unique et indépendante de $\alpha$. –

Nous appellerons analytique une fonction monogène dont la dérivée est continue. Pour qu'une fonction soit analytique, il faut et il suffit, en résumé, que les fonctions $\varphi$, $\psi$ aient des dérivées continues et satisfassent aux équations (A)

**III.** – Revenons aux équations fondamentales (A). Nous démontrerons bientôt que si les fonctions $X = \varphi(x, y)$ $Y = \psi(x, y)$ satisfont aux conditions que nous leur avons imposées, il en est de même de leurs dérivées partielles. En particulier celles-ci admettent elles-mêmes des dérivées partielles continues. Nous pouvons donc différentier les équations (A) la première par rapport à $x$, la seconde par rapport à $y$, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y\, \partial x} \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x\, \partial y}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$$

On aurait de même

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Donc aucune des fonctions X, Y ne peut être prise arbitrairement ; l'une et l'autre doivent être solutions de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Toutes les fois qu'on aura une solution de $\Delta V = 0$, on pourra la prendre pour partie réelle de la fonction analytique $X + iY$, et $Y$ sera alors déterminée à une constante près, à l'aide des équations (A). L'étude des fonctions analytiques dans toute leur généralité se réduit donc à celle des solutions de l'équation $\Delta V = 0$. On voit par là quel rôle considérable cette équation joue dans l'analyse ; son importance n'est pas moindre en physique mathématique. Nous allons voir comment elle intervient dans d'importantes questions de géométrie

**IV.** – **Représentation conforme.** – Les équations

$$X = \varphi(x, y) \qquad Y = \psi(x, y)$$

peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point $m$ un autre point $M$ situé dans le même plan ou dans un plan différent ; elles définissent donc une transformation géométrique. A toute courbe $(c)$ décrite par $m$ correspond une courbe $(C)$. Nous dirons que la transformation conserve les angles si à deux courbes quelconques $(c)$ et $(c_1)$ de la première figure, correspondent deux autres courbes $(C)$ et $(C_1)$ se coupant sous le même angle que les deux premières. La conservation sera directe ou inverse suivant que le sens de rotation

pour passer de $(C)$ à $(C_1)$ sera ou non le même que pour passer de $(c)$ à $(c_1)$

Si $X$ et $Y$ définissent une fonction analytique, elles donnent lieu à une transformation avec conservation directe des angles. Cela tient à ce que l'angle des parallèles $ot$, $oT$ aux tangentes en $m$ et $M$ à $(c)$ et $(C)$ représente précisément l'argument de la dérivée de la fonction analytique. Cet argument étant invariable, les parallèles $ot_1$ $oT_1$ aux tangentes en $m$ et $M$ à $(c_1)$ et $(C_1)$ donneront $t_1oT_1 = toT$ une même rotation amènera par suite $ot_1$ sur $ot$, $oT_1$ sur $oT$.

Proposons-nous maintenant de chercher <u>toutes</u> les transformations capables de conserver les angles.

Remarquons d'abord que si la conservation est directe pour les fonctions $X, Y$, elle devient inverse pour les fonctions $X, -Y$, car les deux courbes $(C)(C')$ qui correspondent à une même courbe $(c)$ sont symétriques par rapport à une droite fixe. On peut donc se contenter de chercher tous les systèmes de fonctions qui conservent directement les angles, on aura les autres en changeant le signe de $Y$.

Par hypothèse $T_1oT = t_1ot$; donc $t_1oT_1 = toT$, et cela constamment quand on tourne autour de $m$.

Or, on a : $$\operatorname{tg} xoT = \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + y'\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial y}} \qquad \operatorname{tg} xot = y'$$

d'où :

$$\operatorname{tg} toT = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + y'^2\frac{\partial\psi}{\partial y}}$$

expression qui doit être indépendante de $y'$ ce qu'expriment les relations

$$(1) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

L'élimination de $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ entre (1) (2) (3) conduit à :

$$(1 + \lambda^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

ou $$(2') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

si on observe que $\lambda^2 + 1 = 0$ n'a pas de sens puisque le rapport $\frac{\partial \psi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est réel. La comparaison de (2') avec (1) et (3) donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Ce sont les conditions pour que la fonction $X + iY$ soit analytique. Avec la conservation inverse, on trouverait les conditions pour que $X - iY$ soit analytique.

Le mode général de transformation étudié précédemment porte le nom de représentation conforme.

Appliquons ce qui précède à la fonction $\frac{k^2}{z}$. Elle est nécessairement analytique, car le raisonnement qui établit l'existence de la dérivée de $\frac{k}{x}^2$ s'applique ici sans modification. Or, on a :

$$\frac{K^2}{z} = \frac{K^2}{x + iy} = \frac{K^2(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

d'où $$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \quad Y = + \frac{K^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (u = X - iY)$$

La transformation ainsi définie conserve donc les angles, mais avec renversement du sens de rotation ; or des dernières équations on tire

$$X^2 + Y^2 = \frac{K^4}{x^2 + y^2} \qquad Xy \; Yx = 0$$

c'est-à-dire qu'on retrouve ainsi la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Soit encore la fonction $z^2$ qui est à priori, analytique.

On a, $$X = x^2 - y^2 \quad Y = 2xy$$

et la transformation ainsi définie a lieu avec conservation directe des angles.

Voici une autre application importante :

## V - Systèmes orthogonaux et isothermes.

– Si les coordonnées d'un point d'un plan sont définies par deux équations de la forme :

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \varphi(u, v)$$

$u$ et $v$ sont dites les coordonnées curvilignes de ce point ; les courbes $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, forment deux familles de courbes qu'on appelle lignes coordonnées.

Le déplacement infiniment petit $ds$ d'un point est donné par une relation de la forme :

$$ds^2 = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2.$$

Cherchons tous les systèmes orthogonaux et isothermes de coordonnées curvilignes, c'est-à-dire tous les systèmes tels que l'on ait

$$B = 0 \qquad A = c.$$

Dans ce cas, on a identiquement

$$dx^2 + dy^2 = A\,(du^2 + dv^2)$$

d'où, en supposant $u$ et $v$ exprimés en fonction de $x$ et de $y$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{A} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A} \qquad (3)$$

Les relations (1) (2) (3) déterminent $u$, $v$ et $A$.

Si l'on pose $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial v}{\partial y}$

on a, à cause de (1) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$

Éliminons $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $A$ entre (2) (3) (4), on a la condition

$$(\lambda^2 - 1)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \qquad (5)$$

$u$ et $v$ étant des fonctions réelles, on ne peut annuler le deuxième facteur de (5) qu'en posant, soit $\lambda = 0$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, soit $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$. Dans le premier cas, on a aussi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ : $u$ et $v$ ne dépendent que de $y$, c'est-à-dire ne sont pas indépendantes. Dans le second cas, la fonction $v$ se réduit à une constante, et nous supposons, $u$, $v$ essentiellement variables : On doit donc annuler $\lambda^2 - 1$ :
$\lambda = 1$, $\lambda = -1$ indiquent à cause des relations (4) que $u + iv$ ou $u - iv$ doit être une fonction analytique de $z$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les coordonnées $u$ et $v$ forment un système orthogonal et isotherme est donc que l'une des fonctions $u + iv$, $u - iv$, soit analytique.

Remarquons que $A$ est donné par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{A}.$$

$ds^2$ est dès lors complètement déterminé.

**Exemples.** — A la fonction analytique $z^2$ correspond le système orthogonal et isotherme $x^2 - y^2 = C^{te}$, $xy = C^{te}$ formé d'hyperboles équilatères concentriques. A la fonction analytique $\dfrac{1}{z}$ correspond le système orthogonal et

et isotherme $\qquad \dfrac{x}{x^2+y^2} = C^{te}, \quad \dfrac{y}{x^2+y^2} = C^{te}$

formé de cercles tangents à $Ox$ et à $Oy$ au point $O$.

VI. — Observons qu'on peut mettre sous d'autres formes les équations fondamentales (A). Soient, par exemple, $R$ et $\Theta$ le module et l'argument de la fonction, en sorte que l'on ait

$$u = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

en faisant varier séparément $x$ et $y$ on a deux expressions de la dérivée, savoir:

$$f'(z) = \frac{\partial R}{\partial x}(\cos\Theta + i\sin\Theta) + R(i\cos\Theta - \sin\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + iR\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

$$if'(z) = \frac{\partial R}{\partial y}(\cos\Theta + i\sin\Theta) + R(i\cos\Theta - \sin\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} + iR\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

d'où en égalant:

$$(B) \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial\Theta}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

équations équivalentes aux équations (A); — on voit en même temps quelle est la forme qu'il convient de donner à la dérivée, enfin on en déduit immédiatement:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial L R}{\partial x} + i\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

Nous tirerons de cette relation la conséquence suivante: il est bien clair que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est comme $f(z)$ une fonction analytique, donc les courbes

$$R = \text{const} \qquad \Theta = \text{const}$$

forment d'après le paragraphe précédent, un système orthogonal et isotherme. Ainsi on aura un point système de courbes en considérant les courbes d'égal module et celles d'égal argument pour une fonction analytique quelconque. (Voir Darboux Théorie générale des surfaces — Tome I — page 162).

Par exemple soit $f(z) = (z-a)(z-b)$; c'est évidemment là une fonction analytique; car la règle élémentaire de dérivation d'un polynôme entier s'applique à une variable imaginaire. — Or soit $A$, $B$, les deux points dont les affixes sont $a$, $b$, $m$ le point dont l'affixe est $z$. Les courbes d'égal module de la fonction sont définies par la condition $mA \cdot mB = \text{const}$; ce sont donc des ellipses de Cassini ayant pour foyers $AB$. — D'ailleurs l'argument de $f(z)$ est la somme des angles que font avec $OX$ les deux segments $Am$, $Bm$. Si on égale à une constante la tangente de cet argument, on aura en désignant par $a, b, a' b'$ les coordonnées de $A, B$:

$$\frac{\dfrac{y-b}{x-a} + \dfrac{y-b'}{x-a'}}{1 \quad \dfrac{(y-b)(y-b')}{(x-a)(x-a')}} = \text{const}.$$

ce sont des hyperboles équilatères admettant AB pour diamètre ; ces hyperboles et les ellipses de Casini forment donc un double système orthogonal et isotherme.

**VII. – Différentielle.** – Nous nommerons différentielle le produit de la dérivée par l'accroissement h donné à la variable et nous représenterons cette différentielle par dy : on aura donc

$$dy = f'(z).\,h$$

Dans le cas particulier où $f(z) = z$, $h = dz$ et nous écrirons $dy = f'(z)\,dz$.

La différentielle est la partie principale de $f(z+h) - f(z)$, c'est-à-dire que la partie complémentaire de l'accroissement serait infiniment petite par rapport à la différentielle. ($\beta$ est dit infiniment petit par rapport à $\alpha$ quand le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ a pour limite 0).

Pour que la fonction $f(z)$ reste constante dans une aire donnée il faut et il suffit que sa différentielle y soit identiquement nulle, ou, ce qui revient au même, puisque dz est arbitraire, il faut et il suffit que $f'(z) = 0$. On le voit imédiatement en remarquant que la condition $f'(z) = 0$ s'exprime, dans le cas des fonctions analytiques par les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

qui expriment évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que X et Y soient l'une et l'autre des constantes dans l'aire donnée.

---

# Deuxième Leçon.

---

## Définition des fonctions simples fondamentales.

---

**I. – Fonctions holomorphes. Points singuliers.** – Lorsque dans une aire donnée (C) une fonction $u$ sera susceptible d'une valeur unique, quel que soit le chemin qui conduise à ce point, on dira qu'elle est uniforme dans cette aire ; si elle est constamment uniforme, finie, continue et analytique, nous dirons qu'elle est holomorphe dans l'aire (C). On appelle point singulier un point tel que, pour l'affixe de ce point, une des conditions précédentes cesse d'être satisfaite. Faisons d'abord les remarques suivantes :

1°. – Si u et v sont holomorphes dans l'aire (C), il en est de même de $au + bv$, $uv$, a et b étant des constantes imaginaires. Les différentielles s'obtiennent

comme dans le cas des variables réelles et on a :

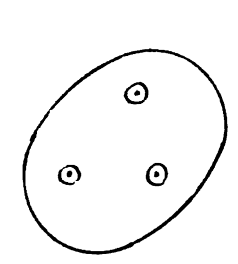
$$\Delta'(au+bv) = a\,\Delta u + b\,\Delta v \quad \text{d'où} \quad d(au+bv) = adu + bdv$$

$$\Delta(uv) = u\,d\Delta + v\,\Delta u \quad \text{d'où} \quad d(uv) = udv + vdu$$

2°. – Si $u$ est une fonction de $z$, holomorphe dans le champ $(C')$ et que les valeurs correspondantes de cette fonction $u$ restent comprises dans une aire pour laquelle la fonction $f$ soit holomorphe, $f(u)$ sera une fonction $v$ de $z$, holomorphe dans l'aire $(C)$ et on aura, comme dans le cas des variables réelles

$$\Delta v = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \Delta u \quad \text{d'où} \quad dv = f'(u)\,du$$

3°. – Le rapport $\frac{u}{v}$ de deux fonctions holomorphes n'est pas holomorphe ; supposons que $a$ soit une valeur de $z$ qui annule $v$ sans annuler $u$ ; en se plaçant assez près du point $a$, le module de $u$ restera supérieur à un nombre fixe et celui de $v$ s'abaissera au-dessous de toute quantité donnée, $v$ étant continu : donc $\frac{u}{v}$ devient infini au point $a$ ; l'inverse $\frac{v}{u}$ est holomorphe au point $a$. Un pareil point singulier s'appelle un pôle de la fonction $\frac{u}{v}$. La fonction $\frac{u}{v}$ n'aura d'autres points singuliers que des pôles dans $(C)$. Si autour de chacun d'eux on enlève du plan une aire fermée, de dimensions aussi petites qu'on voudra, on formera une aire à plusieurs contours dans laquelle la fonction sera holomorphe. Cela est analogue au procédé employé dans le cas des variables réelles, lorsqu'on supprime de l'intervalle dans lequel elle se meut une petite portion $a-\varepsilon, a+\varepsilon$ entourant une valeur critique de la variable. Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une aire donnée, sauf en de certains points isolés qui sont des pôles, on dit que la fonction est méromorphe dans l'aire $(C)$. Il résulte de ce qui précède qu'un polynôme entier est une fonction holomorphe et qu'une fraction rationnelle est méromorphe et cela dans le plan tout entier. Nous acquerrons dans cette même leçon la notion de points singuliers tout-à-fait différents des pôles. Pour le moment, nous allons définir d'une façon précise les autres fonctions simples que nous connaissons dans le cas des variables réelles.



## II. Fonction exponentielle.

– Proposons-nous par analogie avec $e^x$, de déterminer une fonction holomorphe dans tout le plan et satisfaisant pour toutes les valeurs de $z$ et de $z'$ à l'équation :

$$(1) \qquad f(z+z') = f(z)\,f(z')$$

Si nous faisons $z' = 0$, nous avons d'abord $f(0) = 1$. Comme d'ailleurs $f(z)$ doit être holomorphe aux environs de $0$, nous avons aussi, $h$ tendant

vers zéro :

$$\lim \frac{f(h)-1}{h} = f'(0)$$

et l'équation (1) nous donne

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f(z)\,\frac{f(h)-1}{h}$$

On en déduit, en passant à la limite,

$$f'(z) = f(z)\cdot f'(0)$$

Donc la fonction cherchée doit se reproduire par la dérivation au facteur constant près $f'(0)$. Pour que cette fonction coïncide avec la fonction $e^x$ pour les valeurs réelles de $z$, il faudra supposer $f'(0)=1$, d'où enfin

$$f(z) = f'(z)$$

Ceci posé, soient $R$ et $\Theta$ le module et l'argument de $f(z)$ nous aurons comme on l'a vu

$$f(z) = R\,(\cos\Theta + i\sin\Theta)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial R}{\partial x} + i\,R\,\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

et en égalant les seconds membres,

$$(2)\qquad \frac{\partial R}{\partial x} = R \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0$$

Les conditions pour que la fonction soit analytique, sont d'ailleurs

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\,\frac{\partial\Theta}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\,\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

On aura donc en définitive,

$$(3)\quad \frac{\partial R}{\partial x} = R\,,\ \frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial\Theta}{\partial y} = 1$$

et, pour $x=0$ $y=0$,

$$(4)\qquad R = 1 \qquad \Theta = 2K\pi$$

Ces conditions déterminent $R$ et $\Theta$.

$$\begin{cases}\Theta = y + 2k\pi\\ R = e^x\end{cases}$$

et on a, en définitive,

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Nous représenterons cette fonction par le symbole $e^z$. ses propriétés fondamentales sont exprimées par les relations :

$$(5)\qquad e^z = e^x(\cos y + \sin y)$$

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \qquad e^0 = 1 \qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \qquad e^z e^{-z} = 1$$

Toutes les propriétés de $e^x$ se démontrent par un calcul analogue pour $e^z$, mais il en est une qui sera nouvelle pour nous : c'est la périodicité. $e^z$ se reproduit quand $y$ augmente de $2K\pi$, c'est-à-dire quand $z$ augmente de $2iK\pi$.

Nous exprimerons ce fait en disant que $e^z$ admet la période $2i\pi$. Elle n'en admet aucune autre, car toute période $\omega$ se détermine par l'identité.

$$e^{z+\omega} = e^z \qquad \text{ou} \qquad e^\omega = 1$$

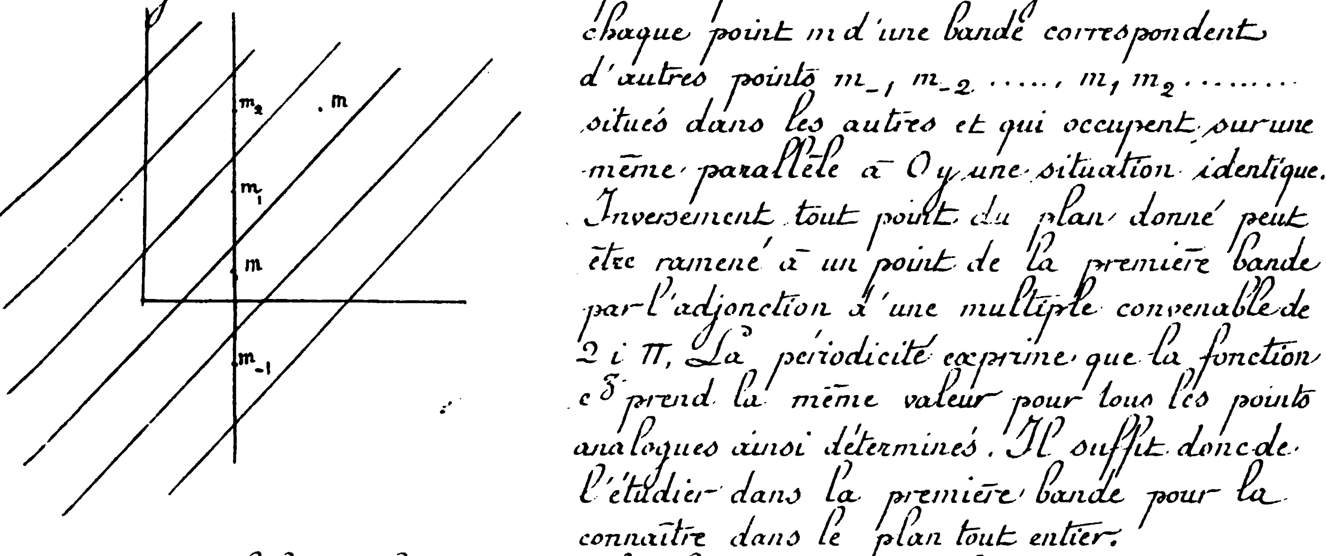
Or si l'on a $\omega = \alpha + i\beta$, cette égalité entraîne

$$e^\alpha = 1 \qquad \beta = 2K\pi$$

d'où

$$\omega = 2iK\pi$$

La périodicité se représente géométriquement de la manière suivante. Divisons le plan en bandes par des droites parallèles, dont la direction diffère de $Oy$ et dont la distance complétée parallèlement à $Oy$ soit $2\pi$. A chaque point $m$ d'une bande correspondent d'autres points $m_{-1}, m_{-2}, \ldots\ldots, m_1, m_2, \ldots\ldots$ situés dans les autres et qui occupent sur une même parallèle à $Oy$ une situation identique. Inversement tout point du plan donné peut être ramené à un point de la première bande par l'adjonction d'une multiple convenable de $2i\pi$. La périodicité exprime que la fonction $e^z$ prend la même valeur pour tous les points analogues ainsi déterminés. Il suffit donc de l'étudier dans la première bande pour la connaître dans le plan tout entier.




$e^z$ est holomorphe dans tout le plan et ne s'annule jamais, car son module $e^x$ ne s'annule pour aucune valeur finie de $x$. D'ailleurs, en dehors de zéro, $e^z$ prend une fois et une seule dans chaque bande toute valeur assignée d'avance car l'égalité

$$e^z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

équivaut aux suivantes $e^x = r$, $y = \theta + 2K\pi$, qui déterminent dans chaque bande un point et un seul ayant pour affixe

$$z = Lr + i(\theta + 2K\pi).$$

**III. Fonctions** $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$. — L'équation (5) donne pour $x = 0$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

On en déduit d'abord qu'une imaginaire de module $r$ et d'argument $\theta$ peut être représentée par $re^{i\theta}$. On a ensuite

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad \operatorname{tang} y = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}}$$

et les fonctions de variables réelles $\cos y$, $\sin y$, $\operatorname{tg} y$ se trouvent exprimées à l'aide d'une fonction de variable imaginaire. Il est évident que toutes les propriétés de ces fonctions circulaires pourraient se déduire des formules précédentes, en faisant usage des propriétés établies plus haut, de l'exponentielle $e^z$. Or, si nous considérons les fonctions parfaitement définies

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},$$

elles sont analytiques dans tout le plan, et les calculs dont nous venons de parler s'y appliquent sans modification. Nous les prendrons pour définition des fonctions circulaires directes et nous poserons

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

Nous aurons ainsi, sans qu'il soit besoin de les démontrer, les résultats suivants :

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1 \qquad \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cos 0=1 \qquad \sin 0=0 \qquad \operatorname{tg} 0=0$$

$$\cos(-z)=+\cos z \qquad \sin(-z)=-\sin z \qquad \operatorname{tg}(-z)=-\operatorname{tg} z$$

$$\frac{d\cos z}{dz}=-\sin z \qquad \frac{d\sin z}{dz}=\cos z \qquad \frac{d\operatorname{tg} z}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\cos(z+z')=\cos z\cos z'-\sin z\sin z' \qquad \sin(z+z')=\sin z\cos z'+\sin z'\cos z \qquad \operatorname{tg}(z+z')=\frac{\operatorname{tg} z+\operatorname{tg} z'}{1-\operatorname{tg} z\operatorname{tg} z'}$$

$$\cos(z+2\pi)=\cos z \qquad \sin(z+2\pi)=\sin z \qquad \operatorname{tg}(z+2\pi)=\operatorname{tg} z$$

$$\cos(z+\pi)=-\cos z \qquad \sin(z+\pi)=\sin z \qquad \operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg} z$$

Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ admettent pour période $2\pi$, il suffit de les étudier dans une bande dont l'amplitude parallèlement à $Ox$ est $2\pi$. Elles sont holomorphes dans tout le plan et prennent deux fois dans chaque bande une valeur quelconque $A$ assignée d'avance. En effet, si on prend pour inconnue $e^{zi}$ ou $u$, on a à résoudre l'équation du second degré

$$u+\frac{1}{u}=2A,$$

qui a des racines différentes de zéro : donc $u$ prend une fois et une seule dans chaque bande [1] la valeur de chaque racine. Comme le produit des racines est égal à 1, les valeurs correspondantes de $z$ ont une somme égale à $2K\pi$, $K$ étant un nombre entier. Les zéros de $\cos z$ sont donnés par la formule $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, ceux de $\sin z$ par $\underline{K}$ $z=\gamma\pi$.

---

[1] Quand $z$ reste dans une bande d'amplitude $2i\pi$, $zi$ reste dans une bande d'amplitude $2\pi$.

La fonction $\operatorname{tg} z$ est méromorphe dans tout le plan : elle admet comme pôles les zéros de $\sin z$. Sa période est $\pi$ et la largeur des bandes est diminuée de moitié. Les points du plan où elle prend une valeur $A$ sont donnés par

$$i\left(u - \frac{1}{u}\right) = A\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

$$u^2(A - i) + A + i = 0$$

ou

$$e^{2zi} = \frac{i + A}{i - A},$$

ce qui donne un point et un seul dans chaque bande.

**IV. Irrationnelles.** — Il y a lieu de considérer les fonctions inverses de celles que nous venons de définir. L'égalité $z = f(u)$ définit $u$ comme fonction de $z$ ; on l'appelle fonction inverse de $f(z)$. Nous établirons plus tard à quelles conditions cette fonction existe et nous démontrerons son existence dans les cas particuliers que nous allons étudier ; d'ailleurs en admettant l'existence de la fonction inverse et en supposant $f(z)$ analytique dans les environs d'un point donné, on aura, comme pour les variables réelles,

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta u} = \frac{\Delta z}{\Delta u} \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{f'(u)}$$

La fonction inverse est donc analytique.

Considérons la fonction $u$ inverse de $z^2$ :

$$u^2 = z$$

Si l'on pose $z = r e^{\theta i}$, on a

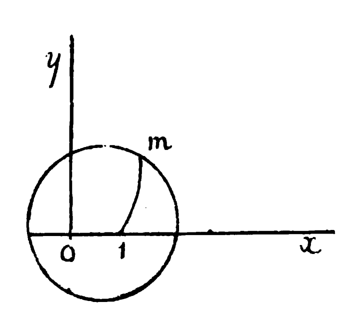
$$u = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta + 2K\pi}{2} + i \sin\frac{\theta + 2K\pi}{2}\right),$$

et, en donnant à $K$ les valeurs 0 et 1,

$$u_0 = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_1 = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] = -u_0$$

Chacune de ces déterminations est finie, continue et analytique dans tout le plan. Elles sont représentées par des points symétriques par rapport à l'origine. Supposons que $z$ parte d'un point déterminé du plan, le point 1 par exemple et suive un chemin continu quelconque aboutissant au point $m$ sans passer par l'origine. Attachons-nous à suivre la détermination $u_0$ : elle a au début la valeur $+1$ et la continuité nous donnera sans ambiguïté la valeur de la fonction au point $m$. Cette valeur est, dans ces conditions, bien déterminée, mais elle dépend du chemin suivi. Si, en effet, $m$ décrit une courbe fermée n'entourant pas l'origine, quand on sera revenu au point $m$ le module et l'argument auront repris la même valeur. $M_0$ décrit donc une courbe fermée. Il n'en est pas ainsi si le chemin de $m$ entoure




l'origine : quand $m$ sera revenu au point de départ, $\theta$ aura varié d'un multiple entier de $2\pi$ et l'argument de $M_0$ de $K\pi$. Si $K$ est pair, la courbe décrite vient se terminer à son point de départ $M_0$ ; si $K$ est impair, on aboutit au point symétrique $M_1$. La fonction peut donc prendre au point $m$, suivant le chemin considéré deux valeurs et n'est pas uniforme. L'origine joue donc un rôle considérable dans la détermination de la fonction c'est d'ailleurs un point singulier. Si, en effet, on suit, à partir du point 1, un chemin qui passe par l'origine, la continuité donnera en chaque point la valeur de $u$, tant qu'on n'aura pas atteint le point 0. Quand on sera en 0, comme aux environs de ce point les deux valeurs sont infiniment petites, on pourra adopter l'une aussi bien que l'autre. En d'autres termes les deux branches représentatives de la fonction $u$ passent par l'origine : on peut passer du point 0 sur l'une quelconque des deux sans violer la continuité. L'origine est un point d'incomplète détermination. Si nous supprimons du plan une aire de dimensions aussi petites qu'on voudra entourant le point 0 le chemin décrit par la variable ne pourra plus passer par ce point critique et la fonction aura alors en chaque point du plan, une valeur déterminée (pour un chemin donné, elle sera finie, continue mais ne sera pas uniforme. Les déterminations $u_0$ et $u_1$ doivent être considérées, non comme deux fonctions distinctes mais comme deux branches d'une fonction unique : c'est le premier exemple d'une fonction multiforme. On peut d'ailleurs bien aisément isoler l'une de l'autre les deux déterminations de la fonction, il suffit de mener à partir du point 0 une ligne arbitraire $OH$ s'étendant à l'infini, et de restreindre le champ de la variable $z$ à l'ensemble des chemins qui ne rencontrent pas $OH$. Dans ce champ restreint, l'équation $u^2 = z$ définit deux fonctions qui restent distinctes l'une de l'autre ; chacune de ces deux fonctions est alors uniforme et par suite holomorphe. — La ligne $OH$ s'appellera une coupure.

**Remarque.** — La dérivée est donnée par la relation $u' = \frac{1}{2u}$, ce qui la détermine sans ambiguité.

On est conduit à des résultats analogues si on étudie la fonction inverse de $z^p$, définie par l'égalité :

$$u^p = z$$

[redacted]



On a

$$u_k = r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2K\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2K\pi}{p}\right)$$

et si on donne à $K$ les valeurs $0, 1, 2 \ldots\ldots p-1$, on obtient les $m$ déterminations de la fonction. Les $p$ points $M_0, M_1, \ldots M_{p-1}$ qui correspondent à une même valeur de $z$ d'affixe $m$ forment un polygone régulier de centre $O$. Si l'affixe de $z$ décrit une courbe fermée $(C)$ qui part de $m$ et y revient, et si au début on se place au point $M_0$, on aboutira en ce même point si $(C)$ n'entoure pas l'origine: sinon le chemin de la fonction ira de $M_0$ à un autre sommet du polygone. Si $(C)$ passe par l'origine, les $m$ valeurs de $u$ s'annulent en même temps et quand $m$ dépassera $O$ la continuité ne nous indiquera plus sur quelle branche nous devons nous diriger: l'origine est un point critique algébrique. L'équation définit en résumé une fonction finie continue et analytique, mais multiforme et ayant $K$ valeurs distinctes en chaque point du plan. – On isolera les différentes déterminations et chacune d'elles deviendra uniforme, si on supprime les environs de l'origine et qu'on pratique comme précédemment une coupure $OH$.

En raisonnant de même sur l'équation

$$u^2 = (z-a)(z-b)$$

on verra qu'elle définit une fonction ayant deux points singuliers d'embranchement $a, b$. Si on supprime du plan deux régions infiniment petites autour de ces deux points, la fonction prendra en chaque point une valeur déterminée pour un chemin donné suivi par la variable; deux chemins ayant mêmes points de départ et d'arrivée conduiront à une même valeur de la fonction, si ces deux chemins tournent l'un et l'autre un nombre pair de fois, ou tous deux un nombre impair de fois autour d'un point critique; – au contraire ils conduiront à deux valeurs de la fonction, égales et de signes contraires, s'ils entourent l'un un nombre pair, l'autre un nombre impair de points critiques. – La fonction n'est pas uniforme; en rejoignant les points $a, b$ par une ligne, que le chemin de la variable sera assujetti à ne jamais rencontrer, on séparera les deux déterminations, dont chacune sera alors uniforme.

La dérivée de la fonction serait d'ailleurs donnée par la relation:

$$u' = \frac{2z-a-b}{2u}$$

## V Logarithme. – La fonction logarithmique

$$u = L\,z$$

sera définie par l'équation

$$e^u = z.$$

Soient $r$ et $\theta$ le module et l'argument de $z$, $u$ a pour expression

$$u = L\,r + \theta i.$$

$\theta$ étant susceptible d'une infinité de valeurs, $u$ aura une infinité de valeurs représentées par des points situés sur une parallèle à $Oy$ distants de $2\pi$. On passe de l'une à une autre pour une même valeur de $z$ d'affixe $m$ lorsque $\theta$ augmente d'un multiple de $2\pi$, c'est-à-dire lorsque $m$ décrit un chemin qui entoure l'origine pour revenir à sa position initiale. L'ensemble de ces valeurs correspondantes à chaque point du plan forme donc des branches d'une même fonction multiforme pouvant prendre en chaque point une infinité de valeurs. Sa dérivée est donnée par la formule

$$u' = \frac{1}{z},$$

elle est donc uniforme. Si la variable s'avance jusqu'à l'origine, toutes les valeurs deviennent infinies, ce point est un point singulier. Si près que l'on soit de ce point, la fonction a une infinité de valeurs situées sur une parallèle à $Oy$ qui s'éloigne indéfiniment : l'origine, est donc un point singulier qui n'est ni un pôle, ni un point critique algébrique ; On devra interdire à la variable l'accès d'une région aussi petite qu'on voudra, autour de ce point. — Si en outre on fait dans ce plan une coupure de forme quelconque s'étendant à l'infini, à partir du point $O$, on aura, non pas une fonction multiforme, mais une infinité de fonctions distinctes, dont chacune sera uniforme.

**VI. Arc tg $z$.** — Comme exemple de fonctions circulaires inverses il sera bon d'étudier de la même manière l'arc-tangente $u$ donné par

$$\operatorname{tg} u = z \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}} = iz$$

On en tire

$$e^{2ui} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$u = \frac{1}{2i} L\,(i-z) - \frac{1}{2i} L\,(i+z)$$

C'est une fonction analogue au logarithme. Elle a deux points singuliers transcendants sur $Oy$, $i$ et $-i$. En les enlevant et en les réunissant par une coupure, on rend la fonction uniforme. La dérivée de la fonction est d'ailleurs uniforme

$$u' = \frac{1}{1+z^2}.$$

## VI. — Domaine d'un point — Valeur infinie de la variable.

On appelle domaine d'un point $M$ l'ensemble des valeurs de $z$ qui correspondent aux points contenus à l'intérieur d'une aire de forme et de dimensions indéterminées, entourant le point $M_0$, et supposée assez petite pour que la fonction satisfasse en tous ces points à de certaines conditions qui sont vérifiées au point $M_0$. — Par exemple dire qu'une fonction est continue dans le domaine

de $M_0$ (ou de $z_0$), c'est dire qu'elle est continue en $M_0$ et que de plus on peut trouver un contour de dimensions finies, mais aussi petit ailleurs qu'on voudra, entourant $M_0$ et dans lequel la fonction reste continue.

A ce point de vue le domaine de l'Infini est l'ensemble des valeurs de $z$ dont le module est supérieur à un nombre fixe $R$ à la condition que $R$ puisse être supposé plus grand que tout nombre donné; Si on pose $z=\frac{1}{\zeta}$, lorsque l'image $M$ de $z$ restera extérieure à un cercle de rayon $R$ ayant $O$ pour centre, l'image $p$ de $\zeta$ restera intérieure à un cercle de rayon $\frac{1}{R}$ ayant aussi le point $O$ pour centre; le domaine de l'infini pour $z$ correspond donc au domaine de l'origine pour $\zeta$; nous considérerons alors l'infini comme une valeur particulière bien déterminée, attribuée à la variable et nous dirons que pour $z=\infty$ $f(z)$ présente une certaine propriété, lorsque cette propriété appartiendra à $f(\frac{1}{\zeta})$ dans le domaine de $\zeta=0$.

L'étude d'une fonction à l'infini et nécessaire pour que la fonction soit complètement connue. – Nous indiquerons rapidement cette étude pour les fonctions les plus simples.

1°. – Polynôme entier. – Si on pose

$$f(z)=A_0 \quad + A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} \qquad + A_{p-1} z + A_p$$

Si on pose

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{A_0+A_1\zeta+A_2\zeta^2 \qquad + A_p\zeta^p}{\zeta^p}$$

On voit que le point à l'infini est un pôle d'ordre $p-q$, $q$ étant l'indice du 1er coefficient $A_0 A_1$ qui ne s'annule pas; donc $f(z)$ est méromorphe pour toutes les valeurs de $z$, avec un seul pôle $z=\infty$.

2°. – Fraction rationnelle. – Soit

$$f(z)=\frac{A_0 z^p + A_1 z^{p-1} \qquad\qquad + A_{p-1} z + A_b}{B_0 z^q + B_1 z^{q-1} \qquad\qquad + B_q}$$

On en déduira:

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\zeta^{p-q}\frac{A_0+A_1\zeta \qquad\qquad + A_p\zeta^p}{B_0+B_1\zeta \qquad\qquad + B_q\zeta^q}$$

Donc, l'infini est un point ordinaire si $p=q$; c'est un pole si $p<q$. On en conclut que $f(z)$ est méromorphe pour toutes les valeurs finies ou infinies de $z$.

3°. – Considérons $e^z$. – L'infini est ici un point singulier; si $a$ désigne une imaginaire donnée l'équation $e^z = a$ a une infinité de racines, et il y a un nombre infini de ces racines qui sont extérieures à un cercle de rayon $R$, quelque grand que soit $R$. – Donc, dans les environs du point $\infty$, $e^z$ est absolument indéterminée, puisqu'elle prend autant de fois qu'on veut n'importe qu'elle valeur donnée d'avance. – Ce point à l'infini est donc très-différent d'un pôle; nous

y reviendrons plus tard ; c'est ce qu'on appelle un point singulier essentiel. Il résulte de là que $e^z$ est holomorphe pour toute valeur finie de $z$ et admet l'$\infty$ comme point singulier essentiel. – C'est là ce qui distingue $e^z$ d'un polynôme entier pour lequel le point $\infty$ serait un pôle.

# Troisième Leçon.

## Extension du calcul différentiel et intégral aux fonctions de variables imaginaires.

I **Fonctions de plusieurs variables.** – Considérons $n$ quantités imaginaires $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$, représentées pour plus de clarté dans les plans différents et respectivement variables dans des aires $(C_1)$ $(C_2)$ - - - $(C_n)$.

Posons, en général,

$$z_j = x_j + i y_j ,$$

et soient $X$ et $Y$ deux fonctions données des $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_n$. L'imaginaire

$$u = X + i Y$$

sera une fonction de $z_1, z_2, \ldots z_n$, définie dans le champ $(C_1)(C_2), \ldots\ldots (C_n)$ et cette dépendance s'exprime par l'égalité $u = f(z_1 z_2 \ldots z_n)$ La fonction sera déterminée, finie et continue si les deux fonctions $X$, $Y$ présentent ces caractères relativement aux $2n$ variables dont elles dépendent

**Dérivées partielles.** – Si, quand on ne fait varier que $z_i$, la fonction de $z_i$ ainsi formée admet une dérivée continue, cette dérivée dans laquelle on rendrait aux autres variables leur liberté sera dite la dérivée partielle de $n$ par rapport à $z_i$ et se représentera par le symbole $\frac{\partial f}{\partial z_i}$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} - \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0$$

Si ces conditions sont vérifiées par les $n$ valeurs de $i$, la fonction admet $n$ dérivées partielles continues $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial z_n}$. Ce sera une fonction analytique de $z_1, z_2, \ldots z_n$. Elle sera holomorphe dans le champ $(C_1)(C_2)$ - - - - $(C_n)$ si pour toutes les valeurs correspondantes des variables elle est uniforme, finie continue et analytique.

**Différentielle totale.** — $h_1, h_2, h_3 \ldots h_n$ étant un système d'accroissements, nous appellerons différentielle totale l'expression

$$du = \frac{\partial f}{\partial z_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} h_2 + \quad + \frac{\partial f}{\partial z_n} h_n$$

d'où on déduit $dz_i = h_i$ et par suite

$$du = \frac{\partial f}{\partial z_i} \partial z_i + \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 + \quad + \frac{\partial f}{\partial z_u} dz_u$$

La propriété fondamentale consiste en ce qu'on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que $u$ se réduise à une constante dans le champ donné, en écrivant que $du = 0$ quels que soient $dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$. Il est aisé de le démontrer; d'abord cette condition est évidemment nécessaire; si maintenant on la suppose remplie, on aura pour $i = 1, 2 \quad u$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{\partial X}{\partial x_i} + i\frac{\partial Y}{\partial x} - i\frac{\partial X}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0$$

on en conclut $\frac{\partial X}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y_i} = \frac{\partial Y}{\partial y_i} = 0$. Les fonctions $X, Y$ sont donc, l'une et l'autre, indépendante de toutes les variables $x_i, y_i$; elle se réduisent donc à deux constantes dans le champ donné.

**II. Fonctions composées.** — Supposons que les variables $z_1, z_2 \ldots z_n$ soient elles-mêmes fonctions de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$ et restent dans le champ $(C_1)(C_2) \ldots (C_n)$ quand ces dernières variables resteront dans un champ $(K_1)(K_2)\ldots(K_p)$, la fonction composée $f$ étant fonction analytique des fonctions composantes $z_1, z_2, \ldots z_n$ et celles-ci étant fonctions analytiques de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_p$. Posons d'une manière générale

$$\zeta = \xi + i\eta$$

$\zeta, \xi$ et $\eta$ étant affectés successivement des indices $0, 1, 2, \ldots n$. Si les dérivées partielles de $f$ existent, elles sont de la forme:

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + i\frac{\partial Y}{\partial \xi}.$$

Or on a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \cdots\cdots + \frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \cdots + \frac{\partial X}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \cdots\cdots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \xi} + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial \xi}$$

Si on tient compte de ce que $f$ est fonction analytique de $z_1, z_2 \cdots z_n$, on a

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial x_1} + i\frac{\partial Y}{\partial y_1} - i\frac{\partial X}{\partial y_1} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y_1} + i\frac{\partial Y}{\partial y_1}\right)$$

et les relations (2) donnent

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}+i\frac{\partial Y}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial \xi}+\dots+\frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial z}{\partial \xi}+i\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\dots+\frac{\partial f}{\partial z_n}\frac{\partial y_n}{\partial \xi}\right)$$

Mais on peut écrire

$$\frac{\partial z_k}{\partial Z}=\frac{\partial x_k}{\partial \xi}+i\frac{\partial y_k}{\partial \xi}$$

On a donc enfin

$$(3)\quad \frac{\partial X}{\partial \xi}+i\frac{\partial Y}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial \zeta}+\dots+\frac{\partial f}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial z_n}{\partial \zeta}$$

On arriverait évidemment à la même expression en calculant la quantité

$$(4)\quad \frac{\partial Y}{\partial \eta}-i\frac{\partial X}{\partial \eta}$$

Or nous avons vu qu'on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit analytique en égalant les expressions (3) et (4). $f$ est donc fonction analytique de $z_1, z_2 \dots z_p$ et la forme générale de ses dérivées partielles est donnée par la formule (3).

D'après cela, la différentielle totale <u>du</u> a exactement la même forme, que les $z$ soient les variables indépendantes, ou soient des fonctons composantes; ce théorème et celui qui fournit les conditions pour que $u$ reste constante dans une aire donnée entraînent comme conséquences toutes les propositions et tous les procédés de calcul différentiel que nous avons donnés, dans le cas des variables réelles; et qui se trouvent ainsi étendus aux cas de fonctions analytiques de variables complexes.

Toute la partie du calcul intégral qui se rapporte à l'Intégration indéfinie se trouve généralisée du même coup, car les résultats auxquels conduit la recherche des fonctions primitives se vérifieraient par des calculs de dérivation qui restent les mêmes, que les variables soient réelles ou imaginaires.

III.– **Fonctions implicites.** Le déterminant d'un système de fontions se définit comme dans le cas des variables réelles et toutes les particularités qui s'y rattachent subsistent en raison des généralisations qui précédent.

Passons aux fonctions implicites : soit

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2, \dots\dots z_n)=0 \\ f_2(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2, \dots\dots z_n)=0 \\ \text{-------------------} \\ f_p(u_1, u_2, \dots\dots u_p, z_1, z_2 \dots\dots z_n)=0 \end{cases}$$

un système de $p$ équations entre les $n+p$ variables $u_1, u_2, \dots u_p, z_1, z_2, \dots z_n$ ; nous supposons que les fonctions $f_1, f_2 \dots f_p$, sont des fonctions $\varphi$

[redacted]



holomorphes de ces variables dans un champ (C)

Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ un système de valeurs satisfaisant aux équations (1), contenues dans le champ (C) et n'annulant pas le déterminant

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots\ldots f_p)}{D(u_1, u_2, \ldots\ldots u_p)}$$

Ceci posé, nous démontrerons plus tard qu'il existe $p$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_p$ des $n$ variables $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ satisfont aux conditions suivantes :

1°. – Elles se réduisent respectivement à $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_p$, pour les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ données aux $z$

2°. – Elles sont holomorphes dans un champ (C') convenablement choisi et comprenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$.

3°. – Pour toutes les valeurs de $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ contenues dans le champ (C') les fonctions $f_1, f_2 \ldots\ldots f_p$ s'annulent identiquement quand on y remplace les $u$ par les $\varphi$ correspondants.

Les fonctions $\varphi$ ainsi définies sont dites fonctions implicites. Leurs différentielles totales et leurs dérivées partielles se calculent évidemment comme pour les variables réelles. Il en est de même des fonctions inverses qui sont un cas particulier des précédentes.

Les généralisations qui précèdent sont encore limitées aux fonctions qui résultent d'un nombre fini d'opérations effectuées sur les fonctions qui servent d'éléments.

Il y a lieu maintenant d'étendre rapidement la théorie des séries aux cas où les termes seraient des quantités complexes.

IV. – Séries. – Une série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 \qquad + u_n$$

où l'on a : $u_n = a_n + i b_n$ en désignant par $a_n$ et $b_n$ deux constantes réelles données, est convergente lorsque la somme

$$S_n = a_1 + a_2 + \text{----} + a_n + i(b_1 + b_2 + \text{----} + b_n)$$

tend vers une limite déterminée $S$ n augmentant indéfiniment. Il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que les séries

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$$

$$(3) \qquad b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots$$

soient convergentes. Si elles ont pour sommes $A$ et $B$, on a

$$S = A + iB$$

Considérons la série formée par les modules des termes de la série (1)

$$(4) \qquad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \text{---} + \rho_n + \ldots\ldots$$

Si elle est convergente, il en sera de même des séries

$$(5) \qquad |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

$$(6) \qquad |b_1| + |b_2| + |b_3| + \cdots + |b_n| + \cdots$$

dont les termes sont au plus égaux aux termes de même rangs de la série (4): les séries (2) et (3) sont donc absolument convergentes. La série proposée (1) est alors convergente et on peut de plus intervertir l'ordre de ses termes d'une manière quelconque sans altérer ni la convergence ni la somme de la série, l'interversion des termes étant entendue comme dans le cas des séries à termes réels (Voir 1ère Partie, page 46)

Si dans les cases d'un tableau à double entrée, on inscrit une double suite de quantités imaginaires $a_j^K + i\, b_j^K$, on forme une série à double entrée. Si les modules de ses termes forment une série double convergente, la série elle-même sera convergente et on pourra l'évaluer à l'aide d'une courbe de sommation arbitraire sans altérer ni la convergence ni la valeur de sa somme. Il suffit pour le voir de comparer à la série des modules les deux séries doubles formées par les quantités $a_j^K$, d'une part, $b_j^K$ d'autre part. On en déduit par un raisonnement identique à celui que nous avons déjà fait (1ère Partie page 49), que le produit de deux séries linéaires absolument convergentes est fourni par la même règle que dans les cas des termes réels.

**Théorème.** – Si on multiplie les termes de la série (1) absolument convergente par des quantités imaginaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ de module fini, la série

$$(7) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n + \cdots$$

est elle-même absolument convergente.

Puisque le module de $\alpha_n$ reste inférieur à un nombre fixe $A$, le module de $\alpha_n u_n$ est plus petit que $A\,|u_n|$; la série (7) est donc absolument convergente.

**Convergence uniforme.** – Supposons que les termes de la série (1) soient des fonctions d'une variable $z$ mobile dans une aire donnée $(C)$. Si à tout nombre $\varepsilon$ on peut faire correspondre un nombre $p$ tel que l'on ait, quel que soit $z$:

$$(8) \qquad |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de $n$ égales ou supérieurs à $p$, la série sera uniformément convergente dans l'aire $(C)$. Pour une telle série on a immédiatement le théorème suivant:

**Théorème.** – Lorsque les termes d'une serie sont des fonctions de $z$, continues dans une aire $C$, dans laquelle la série converge uniformément, la somme de la série est elle-même une fonction continue.

En effet, $z$ et $z+h$ étant deux valeurs contenues dans $C$, on aura

$$S(z+h) - S(z) = [S(z+h) - S_n(z+h)] + [S_n(z+h) - S_n(z)] + [S_n(z) - S(z)]$$

Or si on se donne un nombre positif $\varepsilon$ on pourra d'abord déterminer $n$ de telle sorte qu'on ait à la fois, quels que soient $z$ et $z+h$ :

$$|\rho(z+h)-\rho_n(z+h)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad |\rho_n(z)-\rho(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$n$ étant ainsi déterminé il existera un nombre $\eta$ tel que $|\rho_n(z+h)-\rho_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$, puisque $\rho_n(z)$ est la somme d'un nombre déterminé de fonctions continues, lorsque $|h|<\eta$.

Dans ces conditions on aura, pour $|h|<\eta$ :

$$|\rho(z+h)-\rho(z)|<\varepsilon$$

ce qui exprime la continuité de $\rho(z)$.

**V. – Séries entières.** – Nous laisserons de côté, pour le moment, ce qui concerne les séries en général et nous insisterons d'une façon particulière sur les séries de la forme :

$$(1) \qquad a_0+a_1z+a_2z^2+\dots \quad +a_nz^2+\dots$$

où $a_0, a_1 \quad a_n \dots$ sont des constantes.

Supposons que pour une certaine valeur $Z$ la série (1) soit convergente ; si $z$ est de module moindre que $Z$ la progression géométrique.

$$1+\frac{z}{Z}+\frac{z^2}{Z^2} \qquad +\frac{z^n}{Z^n}+$$

sera absolument convergente ; si nous multiplions son terme général par $a_n Z^n$ qui reste fini puisqu'il a pour limite $0$ nous formerons une série convergente ; or nous reconstituerons ainsi la série (1) ; donc

Si la série (1) converge pour une certaine valeur de $z$, elle est absolument convergente pour toute valeur de module moindre.

Il est clair que la série converge pour $z=0$ puisqu'elle se réduit à $a_0$ ; il peut se présenter trois cas.

1°. – Ou bien la série est divergente, quel que soit $z$, sauf pour $z=0$. Telle est la série

$$1+z+4z^2 \qquad +n^nz^n+\dots$$

2°. – Ou bien elle converge pour toute valeur de $z$ – C'est le cas de la série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2} \qquad +\frac{z^n}{1.2.\ n}+\dots$$

car le rapport d'un terme au précédent tend vers 0 quand $n$ croît indéfiniment d'où résulte que la série des modules est convergente

3°. – Ou bien enfin il y aura des valeurs autres que 0 pour lesquelles la série sera convergente, d'autres pour lesquelles elle sera divergente. Telle est la série

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}\dots \qquad +\frac{z^n}{n}+\dots$$

qui converge pour $z=-1$ et qui dit divergente pour $z=1$. Dans ce dernier cas soit $R$ le plus petit module des valeurs de $z$ pour lesquelles la série cesse d'être convergente

Nous appellerons cercle de convergence un cercle $c$ de rayon $R$ décrit de l'origine comme centre ; cette dénomination est justifiée par le théorème suivant.

**Théorème.** – La série est convergente pour tout point situé à l'intérieur du cercle $C$, elle est divergente pour tous les points situés à l'extérieur.

En effet de la définition même de $R$ il résulte que la serie est convergente tant que $z$ n'a pas atteint le module $R$, c'est à dire tant qu'on reste à l'intérieur de $c$ ; d'autre part si pour une valeur $Z$ extérieure à $(C)$ la série était convergente elle le serait, d'après le théorème démontré plus haut, pour toute valeur de module moindre et par suite ne cesserait pas d'être convergente pour une valeur de module $R$.

On ne peut d'ailleurs rien affirmer en ce qui concerne la circonférence même du cercle ; il peut y avoir convergence tout le long de cette circonférence, comme il peut y avoir constamment divergence, ou convergence en de certains points, divergence en d'autres points.

Par exemple la série

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} \qquad + \frac{z^n}{n} +$$

est convergente pour $Z=-1$ donc son rayon de convergence est au moins égal à 1 ; d'autre part elle est divergente pour $z=1$ (série harmonique) donc son rayon ne peut dépasser I. Donc enfin la série a pour rayon de convergence I.

**Séries dérivées, séries intégrales.** – Nous nommerons série dérivée la série

$$a_1 + 2a_2 z \qquad + (n+1)a_{n+1} z^n +$$

obtenue en remplaçant chaque terme par sa dérivée de même en remplaçant $a_n z^n$ par $\frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ qui en est une fonction primitive on forme une série.

$$a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 \qquad + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} +$$

que nous appellerons serie intégrale. Ces deux séries sont convergentes dans le cercle $(C)$ ; en effet soit $z$ une valeur de module moindre que $R$ ; $Z$ une valeur de module intermédiaire les deux séries qui ont pour terme général

$$v_n = (n+1)\left(\frac{z}{Z}\right)^n \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{z}{Z}\right)^{n+1}$$

sont absolument convergentes car pour $n$ infini on a

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{z}{Z} \qquad \lim \frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{z}{Z}$$

et $\left|\frac{z}{Z}\right| < 1$. Dès lors multiplions $v_n$ par $a_{n+1} Z^n$ qui tend évidemment vers 0 quand $n$ augmente indéfiniment, nous aurons une série convergente qui évidemment ne sera autre que la série dérivée ; on reproduit de même la série intégrale en multipliant $w_n$ par $a_n . Z^{n+1}$ qui tend également vers 0 ; donc cette série intégrale est convergente.

En raisonnant sur la série dérivée comme sur la série elle-même on aura une nouvelle série dérivée et ainsi de suite, de sorte qu'on déduira de là une suite illimitée de séries dérivées toutes convergentes dans le cercle C. – On aura de même une suite illimitée de séries intégrales, dont la $p^{\text{ième}}$ commencera par un polynôme de degré $p-1$ à coefficients arbitraires et qui, toutes convergeront dans le cercle C.

Il résulte de ce qui précède que toutes les séries obtenues de la sorte auront un même cercle de convergence qui sera précisément C. En effet R étant le rayon de convergence de l'une quelconque de ces séries on aura, d'après ce qu'on vient de voir, $R' \geqq R$ ; d'autre part, la série donnée sera par rapport à celle-là, soit une série intégrale, soit une série dérivée d'où l'on conclura $R \geqq R'$. – On a donc nécessairement $R' = R$.

## VI. Fonction définie par une série entière.

– Soit $f(z)$ la somme de la série (1); $f(z)$ est une fonction finie et uniforme dans tout l'intérieur du cercle (C). Nous allons établir qu'elle est continue, et pour cela il nous suffira de faire voir qu'elle converge uniformément dans tout le cercle C, ou plutôt dans un cercle de rayon $R'$, $R'$ étant inférieur à R et d'ailleurs aussi voisin qu'on voudra de R.

En effet la série

$$|a_0| + |a_1| R' + \qquad + |a_n| R'^n + \text{------}$$

est convergente et par suite on peut, étant donné un nombre $\varepsilon$, trouver un entier p tel qu'on ait pour $n \geqq p$

$$|a_n| R'^n + |a_{n+1}| R'^{n+1} + \text{---------} \quad < \varepsilon.$$

Soit, maintenant, z l'affixe d'un point quelconque pris à l'intérieur du cercle de rayon $R'$; on aura les mêmes valeurs de z.

$$|f(z) - f_n(z)| < |a_n| R'^n + |a_{n+1}| R'^{n+1} + \text{---}$$

et par suite

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

donc la série est bien uniformément convergente et par suite continue pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que R'.

$f(z)$ est donc uniforme, finie et continue dans le cercle (C); nous allons enfin montrer qu'elle est analytique et déterminer sa dérivée. – Considérons pour cela la série double

$$
\begin{array}{llll}
 & a_0 & & \\
 & a_1 z & a_1 h & \\
(2) & a_1 z^2 & 2a_2 z.h \quad a_2 h^2 & \\
 & \vdots & & \\
 & a_n z^n & \frac{n}{1} a_n z^{n-1} h \quad \frac{n(n-1)}{1.2} a_n z^{n-2} h^2 \text{-------} & a_n h^n \\
 & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Nous supposons toujours $|z| < R$ – Si nous remplaçons $z$, $h$, et les $\underline{a}$ par leurs modules $r$, $\rho$, $\alpha$ nous aurons :

$$(3)\quad \begin{array}{llll} \alpha_0 & & & \\ \alpha_1 r & \alpha_1 \rho & & \\ \alpha_2 r^2 & 2\alpha_2 \rho r & \alpha_2 r^2 & \\ \vdots & & & \\ \alpha_n r^n & \frac{n}{1}\alpha_n r^{n-1}\rho & & \alpha_n \rho^n \\ \vdots & & & \vdots \end{array}$$

Or le tableau (3) est convergent quand on l'évalue par lignes horizontales ; il se réduit en effet à la série linéaire :

$$\alpha_0 + \alpha_1 (r+\rho) + \alpha_2 (r+\rho)^2 + \qquad + \alpha_n (r+\rho)^n +$$

et $r+\rho$ est l'affixe d'un point de l'axe $OX$, intérieur à $C$, pourvu que $h$ soit, comme nous le supposons, inférieur à $R - \mathcal{E}$ ; cette série linéaire est donc la série des modules de (1) pour un point intérieur à (C) elle est donc convergente.

Dès lors le tableau (2) des modules étant convergent, pour un mode particulier d'évaluation, il en est de même du tableau (2) et de plus on peut calculer la somme à l'aide de tel mode d'évaluation qu'on voudra.

En l'évaluant par lignes horizontales on trouve

$$a_0 + a_1 (z+h) + a_2 (z+h)^2 + \dots + a_n (z+h)^n + \qquad = f(z+h)$$

Evaluons le maintenant par lignes verticales nous aurons

$$f(z) + \frac{h}{1} f_1 (z) + \frac{h^2}{1.2} f_2 (z) \dots\dots + \frac{h^n}{1.2.\dots n} f^{(n)}(z) +$$

$f_i$ représentant la somme de la série dérivée d'ordre $i$. – On aura donc :

$$f(z+h) = f(z) + \frac{h}{1} f_1 (z) + \frac{h^2}{1.2} f_2 (z) + \dots\dots$$

d'où

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z) + \frac{h}{1.2} f_2(z) \dots\dots\dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.n} \cdot f_n(z) +$$

$z$ étant constant faisons décroître $\underline{h}$ ; le second membre est une série entière convergente dans un cercle de rayon $R - z$. Donc ce second membre variera d'une manière continue et comme il se réduit à $f_1(z)$ pour $h = 0$ il tendra vers $f_1(z)$ pour $h$ infiniment petit donc on aura :

$$\lim \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1 (z)$$

Donc enfin $f(z)$ a une dérivée qui n'est autre que la série dérivée.

En résumé.

1°. – La somme d'une série entière est une fonction holomorphe dans le cercle de convergence.

2°. – Elle admet une suite illimitée de dérivées toutes holomorphes dans le même

cercle et dont chacune se déduit de la précédente en remplaçant chaque terme par sa dérivée

3°. - On obtient par l'opération inverse une suite illimitée de séries dont chacune a pour dérivée celle qui la précède ; et qui définissent également des fonctions holomorphes dans le cercle C.

**Remarque.** - Si la série reste convergente en un point $\zeta$ du cercle de convergence et que $A + i B$ soit la somme de cette série il est facile de montrer que la continuité s'étendra jusqu'à ce point inclusivement, c'est-à-dire que $f(z)$ tendra vers $A$, quand $z$ tendra vers $\zeta$, pourvu que l'on se déplace suivant le rayon qui aboutit au point $\zeta$.

En effet soit $\alpha$ l'argument de $\zeta$, si on pose $a_n e^{ni\alpha} = b_n$, $z = re^{\alpha i}$, on aura

$$f(z) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 \quad\quad + b_n r^n +$$

Soit maintenant $b_n = A_n + i B_n$, les deux séries étant réelles

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n \dots$$
$$B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \quad\quad + B_n r^n + \dots$$

Sont par hypothèse convergentes pour $z = R$ et ont pour sommes respectives $A, B$ ; donc d'après un théorème démontré (1° Partie page 54) ces deux sommes varient d'une manière continue et ont pour limites $A, B$ quand $z$ tend vers $R$. Donc enfin $f(z)$ tend d'une manière continue vers $A + iB$ quand $z$ tend vers $\zeta$. - Il serait d'ailleurs impossible de rien affirmer, si on se rapprochait de ce point $\zeta$ suivant tout autre chemin Cf. [illegible]

## VII°. - Définition des fonctions simples.

- Les séries entières que nous avons rencontrées dans la théorie des variables réelles se généralisent sans difficulté ! Par exemple la série.

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} \dots \quad + \frac{z^n}{1.2.n} + \dots$$

étant convergente pour $z$ réel et aussi grand qu'on voudra, est convergente pour toute valeur de $z$. elle définit une fonction holomorphe pour toute valeur finie de $z$ et qui se reproduit par la dérivation il est donc naturel de prendre cette série comme définition de $e^z$. On retrouve ainsi la même fonction que nous avons définie par la propriété $f(z+z') = f(z) \cdot f(z')$

De même les deux séries

$$\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \quad\quad \pm \frac{z^n}{n} \mp$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \dots$$

étant convergentes pour une valeur de module 1 et divergentes pour toute valeur de module plus grand définissent dans le cercle de rayon 1 deux fonctions holomorphes qui présenteraient des propriétés analogues à celles de $L(1+x)$ et de $\operatorname{arctg} x$. Il

est dès lors naturel de les prendre comme définition de deux fonctions nouvelles que nous représenterons par $L(1+z)$, arc tg $z$ ; ces fonctions sont moins générales que celles que nous avons désignées antérieurement par le même symbole ; elles représentent les déterminations du logarithme et de l'arc tangente qui s'annulent pour $z=0$.

Remarque. – Si on différentie $n$ fois l'équation

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 \qquad + A_x z^u + \dots$$

et qu'on y fasse ensuite $z=0$, on obtient la relation

$$A_n = \frac{1}{1.2..n} f^{(n)}(0)$$

On en conclut qu'une fonction donnée ne peut être développée que d'une manière en série entière dans un cercle de rayon donné. –

# Quatrième Leçon.

## Intégrales définies.

I – Définition – La notion d'intégrale définie s'introduit d'une façon toute naturelle, de la manière suivante, dans la théorie des fonctions de variables complexes.

Soit $f(z) = X+iY$ une fonction de $z$ qui reste déterminée, finie et continue tout le long d'un arc fini $AB$. Partageons cet arc en $n$ arcs partiels par les points $A, M_1, M_2 \dots M_p \dots M_{n-1}, B$ ; soit $z_p$ l'affixe de $M_p$ et considérons la somme

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} f(z_p)(z_{p+1} - z_p)$$

Je dis que, si $n$ augmente indéfiniment de telle sorte que chacun des arcs partiels tende vers 0, $S_n$ aura une limite déterminée, c'est-à-dire indépendante de la loi de subdivision ; cette limite sera, par définition, l'intégrale définie de la fonction $f(z)$ prise le long du contour $AB$ et nous la représenterons par le symbole

$$I = \int_{(AB)} f(z)\, dz.$$

Pour démontrer l'existence de cette limite, nous supposerons que l'arc $AB$ est continu, c'est-à-dire tel qu'on puisse exprimer le long de cet arc, $x$ et $y$ par deux fonctions continues $\varphi(t)$ $\psi(t)$ d'une même variable ; dans ces conditions $X$ et $Y$ deviendront par substitution deux fonctions de $t$, qui variera de $t_0$ à $T$ quand on parcourra $AB$. Ceci posé, on aura,

$$f(z_p)(z_{p+1} - z_p) = (X_p + iY_p)(\delta x_p + i\delta y_p)$$

et par suite :

$$S_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} (X_p \delta x_p - Y_p \delta y_p) + i \sum_{p=0}^{p=n-1} (X_p \delta y_p + Y_p \delta x_p).$$

Or si $n$ augmente indéfiniment, les deux sommes ci-dessus ont des limites parfaitement déterminées égales respectivement aux deux integrales définies :

$$\int_{t_0}^{T} (X\varphi' + Y\psi')\,dt\,, \qquad \int_{t_0}^{T} (X\psi' - Y\varphi')\,dt$$

prises le long de $AB$ ; le théorème énoncé est donc démontré et on a de plus ;

$$\int_{(AB)} f(z)dz = \int_{(AB)} (X\,dx - Y\,dy) + i\int_{(AB)} (X\,dy + Y\,dx)$$

La définition qui précède donne lieu aux remarques suivantes

1° La démonstration ne suppose en aucune façon que la fonction $f(z)$ soit analytique, elle ne suppose même pas que cette fonction soit définie en dehors du chemin d'intégration.

2° Elle subsiste évidemment si $f(z)$, tout en restant finie, cesse d'être continue en un nombre limité de points du contour $AB$ ; elle subsiste également si ce contour est formé d'un nombre fini d'arcs dont chacun satisfasse à la condition de continuité que nous avions imposée au contour total.

3° L'intégrale prise le long d'un contour formé de deux chemins consécutifs est égale à la somme des intégrales prises le long de deux contours partiels ; elle a deux valeurs égales et de signes contraires, pour un même contour parcouru dans deux sens différents.

4° Enfin on a évidemment, d'après la définition même

$$\int_{AB} f(z)\,dz \leq lM$$

$l$ étant la longueur du contour, $M$ le module maximum de $f(z)$ le long de ce contour.

## II _ Contour fermé. _

Supposons que le contour soit fermé et qu'on le suive dans un sens déterminé ; la fonction $f(z)$ supposée déterminée en chaque point, pourra cependant revenir en $A$ avec sa valeur initiale ou avec une autre valeur ; dans le premier cas nous dirons que $f(z)$ est uniforme le long de $AB$.

Si cela a lieu, on aura la même valeur de l'intégrale définie, quel que soit le point de départ.

En effet, $f(z)$ reprenant en $A$ sa valeur initiale aboutira en un point quelconque $M$ du contour avec une seule et unique valeur, quel que soit le nombre de fois et le sens dans lequel on aura parcouru la courbe. Si $I$ et $I'$ désignent les deux intégrales correspondant à deux points de départ $A, A'$, on aura évidemment

$$I = (AA') + (A'M) \qquad I' = (A'MA) + (AA')$$

$(C)$ indiquant l'intégrale le long du chemin $C$ ; or comme les valeurs initiales de la fonction sont les mêmes dans les deux cas, on a bien $I = I'$.

Il n'en serait plus de même si $f(z)$ n'était pas uniforme.

Pour éclaircir ceci par un exemple, prenons comme contour un cercle de centre O et de rayon R ; et cherchons l'intégrale de $\sqrt{z}$ prise le long de ce contour. On a ici

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$dz = R(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

et l'intégrale est, $\alpha$ désignant l'argument du point de départ :

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)(i\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$$

elle se scinde en deux autres et peut s'écrire

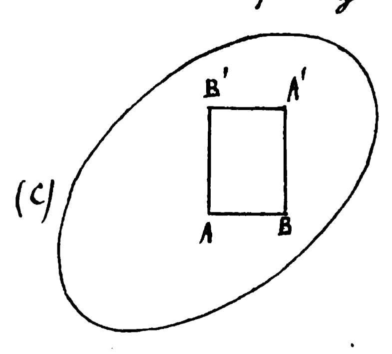
$$-\sqrt[3]{R}\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \sin\frac{3\theta}{2}\,d\theta + i\sqrt[3]{R}\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\cos\frac{3\theta}{2}\,d\theta = \frac{2}{3}\sqrt[3]{R}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + i\sin\frac{3\theta}{2}\right]_\alpha^{2\pi+\alpha} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{R}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + i\sin\frac{3\alpha}{2}\right)$$

L'intégrale dépend donc absolument de $\alpha$ ; cela tient à ce que la fonction $f(z)$ n'est pas uniforme le long du contour d'intégration.

Considérons au contraire le cas $f(z) = \frac{1}{z}$ ; on aura en intégrant encore le long d'un cercle de rayon (R) :

$$\int \frac{dz}{z} = i\int_\alpha^{2\pi+\alpha} d\theta = 2i\pi.$$

L'intégrale ne dépend pas du point de départ, c'est-à-dire de $\alpha$ ; cela tient à ce que $\frac{1}{z}$ est uniforme le long du contour d'intégration.




Ce qui précède nous amène naturellement à la question suivante : Dans une aire donnée (C) on peut tracer une infinité de contours fermés ; si la fonction $f(z)$ est déterminée, finie, continue et uniforme, à l'intérieur de (C) chaque contour donnera une intégrale indépendante du point de départ ; quelles conditions faut-il ajouter aux précédentes pour que cette intégrale soit la même sur tous les contours considérés ?

Il est d'abord évident que la valeur constante de l'intégrale devra être 0 puisque l'on peut donner aux contours d'intégration des dimensions infiniment petites. – (Nous supposons ici que l'aire soit limitée par un contour unique). Envisageons, en général, l'intégrale curviligne :

$$(1) \qquad \int (P\,dx + Q\,dy).$$

et cherchons dans quel cas cette intégrale sera nulle le long de tout contour fermé intérieur à (C) ; Nous supposons que les fonctions réelles P, Q, sont continues et uniformes et admettent des dérivées partielles du premier ordre, également continues pour tous les systèmes de valeurs de $x$, $y$ correspondant aux points situés sur le contour ou dans son intérieur ; la région que nous appelons

intérieure est choisie arbitrairement entre les deux régions que sépare le contour ; nous dirons alors que le sens direct, sur ce contour, est celui dans lequel un observateur doit le parcourir pour avoir à sa gauche la région intérieure. — Ceci posé il faut d'abord que P et Q soient uniformes le long de toute ligne tracée à l'intérieur de (C) cela résulte de ce qui précède. — Pour obtenir une nouvelle condition nécessaire, considérons un carré $ABA'B'$ de côté $l$, et écrivons que l'intégrale (1) est nulle le long du périmètre de ce carré. Soit

$$P = \varphi(x,y) \qquad Q = \phi(x,y)$$

on aura en désignant par $a, b$ les coordonnées de $A$ :

$$\int_a^{a+l} \varphi(x,b)\,dx + \int_b^{b+l} \psi(a+l,y)\,dy + \int_{a+l}^{a} \varphi(x,b+l)\,dx + \int_{b+l}^{b} \psi(a,y)\,dy = 0$$

ou

$$\int_a^{a+b} \left[\varphi(x,b+l) - \varphi(x,b)\right] dx = \int_{b}^{b+l} \left[\psi(a+l,y) - \psi(a,y)\right] dy$$

ou, en remarquant que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ sont continues

$$\int_a^{a+l} \varphi'_y(x, b+\theta l)\,dx = \int_b^{b+l} \psi'_x(a+\lambda l, y)\,dy$$

$\theta$ et $\lambda$ étant compris entre 0 et 1. Appliquons le théorème de la moyenne (1[ère] Partie, page 108) à chacune de ces deux intégrales nous aurons en divisant par $l$ :

$$\varphi'_y(a_1, b_1) = \psi'_x(a_2, b_2)$$

$a_1$, $a_2$ étant compris entre $a$ et $a+l$, $b_1$, $b_2$ entre $b$ et $b+l$. — Si maintenant nous faisons tendre $l$ vers 0 et que nous observions que $a, b$ sont les coordonnés d'un point absolument arbitraire, nous aurons la condition cherchée savoir

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

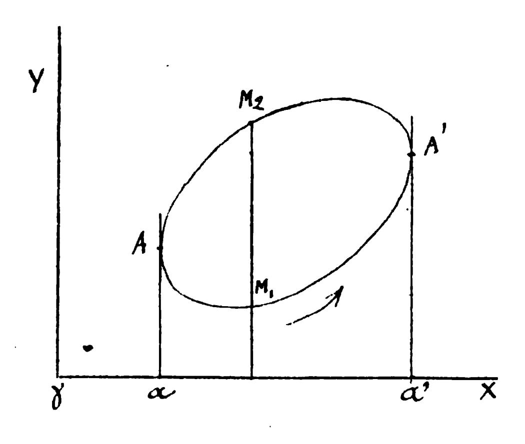
III — La relation (2) exprime que $P\,dx + Q\,dy$ doit être une différentielle totale exacte ; cette condition est nécessaire d'après ce qui précède ; nous allons établir qu'elle est suffisante. Pour cela considérons l'intégrale double

$$\iint_{(c)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = V$$

étendue à tous les points de l'aire limitée par une courbe $C$, intérieure à $C$ ; elle représente le volume compris entre le plan des $x, y$, un cylindre parallèle à $OZ$ et ayant $C_1$ pour section droite et enfin la surface $z = \frac{\partial P}{\partial y}$. — Supposons, pour simplifier que la courbe $C_1$ soit convexe, et intégrons d'abord par rapport à $y$ puis par rapport à $x$, nous aurons :

$$V = \int_a^{a'} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy$$

$a$ $a'$ étant les abscisses extrêmes de (C), $y_1$, $y_2$ étant les deux fonctions de $x$ qui




correspondent aux points d'entrée et de sortie d'une parallèle à $Oy$, par rapport à la courbe $(C)$ ; la première intégration se fait immédiatement et on a :

$$V = \int \left[ \varphi(x y_2) - \varphi(x y_1) \right] dx$$

Si on remarque que $x$ va en croissant de $a$, $a'$ sur l'arc inférieur $AM_1A'$ et au contraire décroit de $a'$ à $a$ sur $A'M_2A$ ; on voit immédiatement que $V$ s'exprime par l'intégrale curviligne :

$$V = -\int_{(C_1)} \varphi(x,y)\,dx = -\int_{(C_1)} P\,dx$$

On démontrerait de même que

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = +\int_{(C_1)} \psi(x,y)\,dy = +\int_{(C)} Q\,dy$$

On aura donc en définitive

$$(3) \quad \int_{(C_1)}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{(C_1)} (P\,dx + Q\,dy)$$

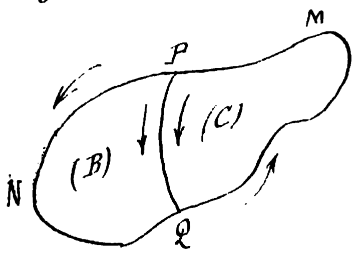
Cette relation qui permet de transformer une intégrale double en intégrale curviligne et inversement, met en évidence la propriété que nous voulions démontrer ; si en effet $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ l'intégrale étant évidemment nulle, il en est de même de l'intégrale curviligne considérée.

En résumé les fonctions uniformes $P\,Q$ étant supposées finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, en tous les points d'une aire donnée et sur son contour, pour que l'intégrale curviligne

$$\int P\,dx + Q\,dy$$

prise entre deux points quelconques de cet aire, soit indépendante du contour d'intégration, il faut et il suffit que $P\,dx + Q\,dy$ soit une différentielle totale exacte.

**Remarques.** — . Nous avons supposé convexe le contour fermé d'intégration ; or on voit immédiatement que l'intégrale prise le long du contour d'une



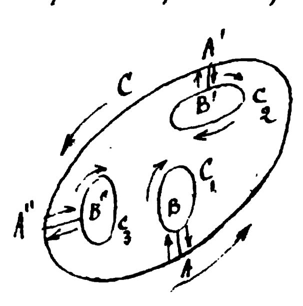

aire A qui résulte de la juxtaposition de deux aires partielles BC est égale à la somme des Intégrales prises le long des contours des deux aires partielles. On a en effet, en supposant les contours parcourus dans le sens direct et en désignant toujours par $(C)$ l'Intégrale prise le long d'une ligne $(C)$

$$(QMPNQ) = \left[(QMP) + (PQ)\right] + \left[(QP) + (PNQ)\right]$$

à cause de l'égalité $(PQ) + (QP) = 0$.

D'après cela on pourra toujours par des transversales décomposer l'aire en une

somme limitée d'aires partielles dont chacune soit convexe, et le théorème général démontré plus haut se trouve ainsi étendue à une aire limitée par un seul contour, de forme quelconque.




On a souvent à considérer des aires à connexion multiple, c'est-à-dire limitées par plusieurs contours ; par exemple l'aire comprise entre une courbe $C$ et d'autres courbes $C_1 C_2 C_3$ intérieures à la première. Le résultat obtenu précédemment s'applique à une pareille aire et donne lieu à un énoncé différent. Relions les courbes $C_1 C_2 C_3$ au contour extérieur par des traverses de forme quelconque $AB$, $A'B'$, $A''B''$ — Suivons le contour fermé ($ABC_1BA.AA'.A'B'C_2B'.B'A'.A'A''B''C_3B''A''.A''A$) dans le sens indiqué par les flèches. Le contour étant fermé l'intégrale sera nulle ; si on supprime les parties relatives aux traverses, dont chacune est parcourue deux fois dans deux sens opposés, il reste : 1° l'intégrale relative au contour extérieur ; 2° chacune des intégrales relatives au contour $C_1 C_2 C_3$, supposés parcourus dans le sens rétropode si on envisage les aires intérieures à ces contours. — Donc enfin, si on parcourt les quatre contours dans le sens direct on est conduit à ce nouvel énoncé :

L'intégrale prise le long du contour intérieur est égale à la somme des intégrales prises dans le même sens le long de chacun des contours intérieurs.

## IV — Théorème de Cauchy. —

Revenons à une fonction de variable complexe $f(z) = X + iY$ ; nous avons trouvé plus haut :

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C)} (X\,dx - Y\,dy)\,i + \int_{(C)} (X\,dy + Y\,dx)$$

Si la fonction $f(z)$ est continue, uniforme et de plus analytique dans l'aire limitée par $C$, et sur le contour lui-même, chacune des intégrales considérées sera nulle d'après ce qui précède puisque l'on aura dans ce cas.

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

De là le théorème suivant :

**Théorème. —** L'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long d'un contour fermé intérieur à une aire dans laquelle $f(z)$ reste holomorphe, est nulle.

On en déduit immédiatement, par un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut, que, si $f(z)$ est holomorphe dans une aire limitée par plusieurs contours fermés, et sur ces contours eux-mêmes, l'Intégrale prise le long du contour extérieur est égale à la somme des intégrales prises le long des contours intérieurs, ceux-ci étant parcourus dans le même sens.

Enfin on peut encore énoncer le même théorème sous l'une des formes suivantes :

L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un chemin $a, b$ ne dépend que des limites et non du chemin d'intégration, pourvu que le chemin reste compris à l'intérieur d'une aire dans laquelle la fonction soit holomorphe.

L'Intégrale prise le long d'un contour fermé ne varie pas si on déforme ce contour sans lui faire atteindre aucun point pour lequel la fonction cesse d'être holomorphe.

A cause de l'importance du théorème précédent nous en donnerons une autre démonstration, fondée uniquement sur la notion de la dérivée; cette démonstration a été donnée par M. Goursat (acta Math. Tome IV page 197). Elle repose sur les lemmes suivants:

**Lemme I** — Lorsqu'une fonction est holomorphe dans une aire et sur son contour, l'expression

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)$$

tend uniformément vers 0 quand $h$ tend vers 0

Si nous posons en effet

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) \qquad f'(z) = \psi'_x + i\psi'_x \quad h = \alpha + i\beta$$

nous aurons

$$f(z+h)-f(z) = \Delta\varphi + i\Delta\psi = \alpha(\varphi'_x + \varepsilon) + \beta(\varphi'_y + \varepsilon') + i\alpha(\psi'_x + \varepsilon'') + i\beta(\psi'_y + \varepsilon''')$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ tendant uniformément vers 0 avec $\alpha$ et $\beta$ puisqu'on suppose $\varphi'_x\ \psi'_x$ continues dans l'aire et sur son contour (I. page 119) — Si on remplace alors $\varphi'_y$ par $\psi'_x$, $\psi'_y$ par $\varphi'_x$

$$f(z+h) - f(z) = (\alpha + i\beta)(\varphi'_x + i\psi'_x) + \alpha\,\varepsilon + \beta\,\varepsilon' + i\alpha\,\varepsilon'' + i\beta\,\varepsilon'''$$

Or si on se donne un nombre positif $\lambda$, on peut trouver un nombre $\eta$ indépendant de $x, y$ et tel que pour $|h| < \eta$, $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$, soient des modules inférieurs à $\lambda$, et que par suite $\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + i\alpha\,\varepsilon'' + i\beta\,\varepsilon'''$ ait un module moindre que $4\lambda|h|$; on en conclut

$$\frac{f(z+h) - fz}{h} - \varphi'_x - i\psi'_x \quad < 4\lambda$$

pour les mêmes valeurs de $h$; donc le lemme est démontré.

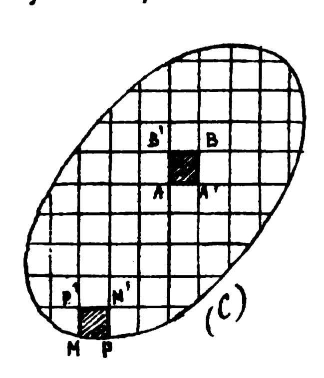
**Lemme II.** — Chacune des intégrales $\int dz$, $\int z\,dz$ est nulle, quand on le prend le long d'un contour fermé quelconque

Cela est à peu près évident; on a, en effet:

$$\int dz = \int dx + i\int dy \qquad \int z\,dz = \int x\,dx - \int y\,dy + i\int(x\,dy + y\,dx)$$

Or les quantités $x, y, \frac{x^2}{z}, \frac{y^2}{z}, x, y$ sont des fonctions uniformes dont la variation totale est évidemment nulle quand on parcourt une ligne fermée

quelconque ; le lemme est donc établi.




Ceci posé menons deux suites de droites parallèles à OX OY, équidistants de manière à inscrire dans l'aire un réseau de carrés de côté $l$. L'intégrale de la fonction uniforme $f(z)$ prise le long de C est égale à la somme des intégrales prises le long de chacun des contours partiels ainsi déterminés.

Soit d'abord un carré ABA'B' complètement intérieur à (C) ; $z$ un point intérieur à ce carré ; posons

$$(1) \quad \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - f'(z_1) = \varphi(z, z_1)$$

et d'après le lemme (1), si $z$ est l'affixe d'un point situé sur le contour du carré on pourra supposer $l$ assez petit pour avoir partout $|\varphi(z, z_1)| < \varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre arbitraire. Nous supposerons que $l$ ait été déterminé de telle sorte que cela ait lieu. L'égalité (1) donne alors

$$\int f(z)\,dz = f(z_1)\int dz + f'(z_1)\int z\,dz - z_1 f'(z_1)\int dz + \int \varphi(z, z_1)(z-z_1)\,dz$$

Si nous prenons l'intégrale le long du contour ABA'B', les trois premiers termes du 2$^{\text{e}}$ membre sont nuls (Lemme II) ; et la dernière intégrale porte sur une fonction dont le module maximum est inférieur, le long du contour, à $l\sqrt{2}.\varepsilon$, car $|z-z_1| < l\sqrt{2}$ ; d'ailleurs le contour d'intégration étant de longueur $4l$ on a

$$\left|(AA'BB')\right| < 4l^2\sqrt{2}.\varepsilon.$$

Donc si on fait la somme des intégrales relatives à tous les carrés complets, on aura une somme dont le module sera certainement moindre que

$$4A\varepsilon\sqrt{2}$$

A étant l'aire totale comprise dans la courbe (C).

Passons maintenant à un carré écorné par le contour MPM'P' ; nous aurons encore

$$\int f(z)\,dz = \int \varphi(z, z_1)(z-z_1)\,dz$$

$z_1$ étant l'affixe d'un point intérieur ; ici encore la fonction soumise à l'intégration a un module moindre que $\varepsilon . l\sqrt{2}$ ; d'autre part la longueur du contour est certainement inférieure à $4l+\sigma$, $\sigma$ étant la longueur de la partie curviligne ; le module de l'intégrale est donc moindre que $(4l+\sigma)\varepsilon l\sqrt{2}$ et la somme de toutes les intégrales correspondantes aura un module inférieur à

$$4A\varepsilon\sqrt{2} + S l\varepsilon\sqrt{2}$$

$S$ étant la longueur totale du contour C. On aura donc enfin

$$\left|\int_{(C)} f(z)\,dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}\left[8A + Sl\right]$$

Mais cette intégrale est une constante et puisque son module est inférieur à un nombre positif qui est absolument arbitraire, on en conclut que cette intégrale est nulle - ce qu'on voulait démontrer

Il est évident que cette démonstration ne suppose absolument rien sur la forme du contour, qui peut être formé d'une seule courbe, ou de plusieurs courbes distinctes.

## V_ Intégrale considérée comme fonction de sa limite supérieure. —

La fonction $f(z)$ étant supposée holomorphe dans une aire $(C)$, relions un point fixe A de cette aire à un point variable M d'affixe $z$, et cela par un chemin contenu dans l'aire. L'integrale $\int f(z)\,dz$ prise le long de ce chemin sera indépendante du chemin lui-même et se réduira à une fonction $F(z)$ de la limite supérieure. Cette fonction est, d'après le théorème précédent uniforme dans l'aire $(C)$. Nous allons montrer de plus qu'elle est continue et analytique.

M' M A

En effet donnons à $z$ un accroissement $MM'$ que nous supposerons dirigé suivant une droite de direction quelconque et que nous désignerons par $h$. On a évidemment

$$F(z+h) - F(z) = \int_{(MM')} f(z+u)\,du$$

$u$ variant de $0$ à $h$ quand on parcourt $MM'$. Or on a

$$f(z+u) = f(z) + \varphi(z,u)$$

$\varphi(z,u)$ étant une fonction continue de $u$, qui s'annule pour $u=0$. On aura donc:

$$F(z+h) - F(z) = f(z)\int_0^h du + \int_0^h \varphi(z,u)\,du$$

ou

$$F(z+h) - F(z) = h f(z) + \int_0^h \varphi(z,u)\,du$$

Mais, à cause de la continuité, si on se donne un nombre $\varepsilon$, on pourra lui faire correspondre un nombre $\eta$ tel que pour $|h| < \eta$, on ait $|\varphi(z,u)| < \varepsilon$ tout le long de la droite $MM'$; dans ces conditions l'integrale aura un module moindre que $\varepsilon h$; on en conclura

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) < \varepsilon$$

Donc enfin $F(z)$ est continue et, de plus, a une dérivée déterminée, qui n'est autre que $f(z)$. En résumé la fonction $F(z)$ est holomorphe dans l'aire $(C)$

## VI — Dérivation sous le signe. —

Quelques-unes des propriétés des intégrales définies réelles s'étendent au cas d'une variable imaginaire - Nous nous arrêterons à l'une des plus importantes qui concerne la dérivation sous le signe.

Supposons une fonction $f(z,u)$ holomorphe dans le champ $(C, C')$ des deux variables $z, u$. Soit $AB$, un arc contenu dans l'aire $C$. L'intégrale $\int_{(AB)} f(z,u)\,dz$ est une fonction de $u$ définie dans l'aire $C'$. Nous la désignerons par $F(u)$.

Cette fonction de $u$ est évidemment finie et uniforme ; nous allons prouver qu'elle est continue et analytique et trouver l'expression de sa dérivée. Soient $u$, $u+h$ deux valeurs de $u$, appartenant à l'aire $C'$. On a :

$$F(u+h) - F(u) = \int_{(AB)} \left[ f(z, u+h) - f(z,u) \right] dz$$

Par hypothèse $f(z,u)$ est holomorphe par rapport à $u$ dans le champ $(C')$ ; d'après un lemme démontré plus haut, si on pose

$$\frac{f(z,u+h) - f z}{h} - f'_u(z,u) = \varphi(z,u,h)$$

La fonction $\varphi$ tendra uniformement vers 0 avec $h$. On aura alors

$$\frac{F(u+h - F(u)}{h} - \int_{(AB)} f'(z,u)\,dz = \int_{(AB)} \varphi(z,u,h)$$

Mais $\varepsilon$ étant un nombre quelconque $>0$, on peut trouver $\eta$ tel que l'on ait (z et u étant quelconques)

$$|\varphi(z,u,h)| < \varepsilon \quad \text{pour } |h| < \eta$$

Dans le module du second membre est inférieur à $\varepsilon\, l$, $l$ étant la longueur du contour $AB$. On en conclut immédiatement que $F(u)$ est continue et admet pour dérivée

$$F'(u) = \int_{(AB)} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot dz$$

**Remarque.** — Il serait aisé d'établir une formule plus générale, relative au cas où les limites seraient fonctions de $u$, au lieu d'être fixes. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à l'extension, bien facile d'ailleurs, de la règle d'intégration sous le signe $\int$, ces différents résultats ne devant pas intervenir dans les questions que nous nous proposons de traiter.

Dans la plupart des cas l'extension d'une règle connue de calcul intégral pourra se faire par une simple vérification, ainsi que nous avons procédé (page 21) pour le théorème des fonctions composées.

Prenons, par exemple, la question très importante du changement de variable. Supposons qu'on veuille substituer à $Z = x + iy$ une autre variable $u = \xi + i\eta$, liée à $Z$ par l'équation

$$Z = F(u) = \varphi(\xi, \eta) + i\,\psi(\xi, \eta)$$

La règle connue pour changer de variable sous une intégrale définie

s'applique sans difficulté à une intégrale curviligne, et on aura, en représentant par $\bar H$ ce qui devient $H(x,y)$ quand on y remplace $x, y$ par leurs valeurs en fonction de $\xi, \eta$ ;

$$\int_{(C)} X\,dx - Y\,dy = \int_{(C')} \left(\bar X \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \bar Y \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) d\xi + \left(\bar X \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \bar Y \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) d\eta$$

$$\int_{(C)} X\,dy + Y\,dx = \int_{(C')} \left(\bar X \frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \bar Y \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) d\xi + \left(\bar X \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \bar Y \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) d\eta$$

$C'$ étant la courbe que décrit $u$ lorsque $z$ décrit $C$. Si on ajoute ces deux relations après avoir multiplié la seconde par $i$ et qu'on tienne compte des relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

on obtient

$$\int_{(C)} f(z)\,dz = \int_{(C')} (\bar X + i\bar Y)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + i\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)(d\xi + i\,d\eta) = \int_{(C')} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du$$

Ainsi se trouve établie la règle du changement de variable dans une intégrale définie.

## VII — Formule de Cauchy. —

Revenons au cas d'une intégrale prise le long d'un contour $(C)$ intérieur à une aire dans laquelle $f(z)$ reste holomorphe ; mais considérons la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$, $x$ étant un point intérieur à $(C)$ ; cette fonction n'est pas holomorphe dans $(C)$ puisqu'elle devient infinie pour $z = x$ mais elle l'est dans l'aire à deux contours qu'on obtient en décrivant du point $x$ comme centre un cercle de rayon $\rho$, intérieur à $(C)$ ; on a donc d'après une des formes que nous avons données au théorème de Cauchy :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Comme la première intégrale ne dépend en aucune façon de $\rho$, la seconde doit en être également indépendante et nous pouvons la calculer en supposant $\rho$ infiniment petit. Or si on pose

$$z = x + \rho e^{\theta i} \qquad dz = i\rho e^{\theta i}\,d\theta$$

cette seconde intégrale a pour valeur

$$i\int_0^{2\pi} f(x + \rho e^{\theta i})\,d\theta$$

Pour $\rho = 0$ elle se réduit à $2i\pi f(x)$. Mais on n'a pas le droit de suppo

$\rho=0$; remarquons alors que $\rho$ étant une fonction continue, si on pose

$$f(x+\rho e^{\theta i}) = f(x) + \varphi_1(x,\rho,\theta),$$

on pourra supposer $\rho$ assez petit pour que $\varphi(x,\rho,\theta)$ ait, quelque soit $\theta$, un module moindre que $\varepsilon$. On aura alors :

$$\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz - 2i\pi f(x) = i\int_0^{2\pi} \varphi(x,\rho,\theta)\,d\theta$$

et la seconde intégrale aura un module moindre que $2\pi\varepsilon$. Ainsi le premier membre de l'égalité précédente a un module moindre que toute quantité donnée, donc il est rigoureusement nul et on a

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

Cette formule, dont nous nous servirons constamment, est due à Cauchy ; elle permet de calculer la valeur de $f(z)$ en un point quelconque de l'aire considérée en fonction des valeurs que $f(z)$ prend (sur le contour.

L'intégrale du second membre où $x$ figure à titre de paramètre est une fonction continue de $\underline{x}$ et admet des dérivées de tout ordre ; il en est donc de même de $f(x)$ et on a sans peine les formules suivantes :

$$f'(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^2}\,dz \qquad f''(x) = \frac{1.2}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^3}\,dz \qquad f^{(x)}(x) = \frac{1.2..n}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

Ainsi se trouve établi un résultat que nous avions accepté sans démonstration (page 5 ), à savoir que si une fonction est holomorphe dans le domaine d'un point donné, il en est de même de sa dérivée, et par suite de ses dérivées d'ordre quelconque.

---

# Cinquième Leçon.

## Sur les Fonctions harmoniques et le problème de Dirichlet

### I. Formule de Green

Une fonction réelle $V$ de deux variables $x\,y$ est dite harmonique dans une aire donnée, lorsqu'elle est en tous les points de cette aire uniforme et continue et que, de plus elle satisfait constamment à la condition :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Nous avons déjà fait observer que $V$ étant une solution de cette équation, il existe une autre solution $U$, qu'on peut appeler complémentaire de $V$,

qui est déterminée à une constante près et, telle que $U + iV$, soit holomorphe dans l'aire donnée ; que, par suite, la théorie des fonctions analytiques est identique à celle des fonctions V que nous venons de définir. Nous nous arrêterons ici sur quelques unes des propriétés les plus essentielles des fonctions V harmoniques.

Et d'abord, la formule fondamentale de Cauchy

$$(1) \qquad 2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

doit correspondre à une formule (C) analogue dans la théorie des fonctions harmoniques.

C'est cette formule que nous commencerons par établir, en le déduisant de de la formule (1).

D'une manière générale, si à partir du point $x, y$ on se déplace suivant un chemin rectiligne de longueur de $\underline{l}$ faisant avec OX un angle $\alpha$, une fonction $F(x, y)$ prendre un accroissement

$$AF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha + \varepsilon\right) dl$$

$\varepsilon$ étant infiniment petit en même temps que $dl$ ; la limite du rapport $\frac{AF}{dl}$ est ce qu'on nomme la dérivée de F suivant la direction $\alpha$ ; on la représente par $D_\alpha F$ et on a :

$$D_\alpha F = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\alpha.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ne sont que des cas particuliers de ces dérivées générales ; elles correspondent à des déplacements effectués parallèlement aux parties positives des axes de coordonnées. — Il serait très-facile d'étendre à ces dérivées prises suivant une direction quelconque les principales règles du calcul différentiel.

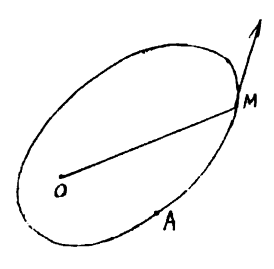
Si $X + Y$ est une fonction analytique on a

$$D_\alpha X = \frac{\partial X}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial X}{\partial y}\sin\alpha = -\frac{\partial Y}{\partial x}\sin\alpha + \frac{\partial Y}{\partial y}\cos\alpha = D_{\alpha+\frac{\pi}{2}} Y.$$

et de même :

$$D_\alpha Y = -D_{\alpha+\frac{\pi}{2}} X.$$

Ces deux relations sont identiques ; l'une ou l'autre exprime sous une forme nouvelle que $X + iY$ est analytique.




Revenons maintenant à la question que nous nous sommes posée. — Prenons pour origine un point quelconque O de l'aire, et soit M un point quelconque du contour ; les coordonnées polaires $r$, $\theta$ du point M seront des fonctions connues de l'arc $s$, compté à partir d'un point fixe A. On aura d'après la formule

de Cauchy :

$$2i\pi(U_0+iV_0)=\int_{(c)}(U+iV)\frac{dz}{z}$$

Si nous posons :

$$z=re^{\theta i}\qquad \frac{dz}{z}=\frac{dr}{r}+i\,d\theta$$

et que nous égalions les parties réelles, il vient, $l$ étant la longueur du contour :

$$-2\pi V_0=\int_0^l\left(U\frac{dr}{ds}\cdot\frac{1}{r}\right)ds-\int_0^l\left(V\frac{d\theta}{ds}\right)ds$$

Si nous intégrons par parties la première intégrale, la fonction intégrée sera $U\,Lr$ et comme elle reprend la même valeur pour $s=0$, $s=l$, cette partie intégrée sera nulle on aura alors

$$2\pi V_0=\int_0^l\left(V\frac{d\theta}{ds}+Lr.\frac{dU}{ds}\right)ds$$

Cette formule résout la question ; on peut n'y laisser subsister que $V$ ; on a en effet.

$$\frac{dV}{ds}=D_n V$$

en désignant par $D_n$ la dérivée suivant la normale intérieure ; d'autre part, si on observe que $Lz=Lr+i\theta$ est une fonction analytique on aura également

$$\frac{d\theta}{ds}=-D_n\,Lr.$$

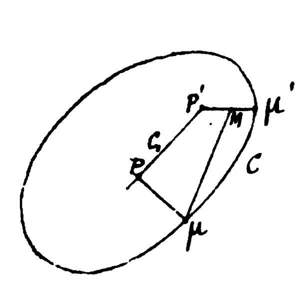
D'où enfin la relation suivante, connue sous le nom de formule de Green :

$$(2)\qquad 2\pi V_0=\int_0^l\left(Lr.D_nV-V.D_nLr\right)ds$$

Il faut bien remarquer que la formule (2) exige qu'on connaisse le long du contour, les valeurs que prennent, non seulement $V$, mais encore $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$

## II. Problème de Dirichlet.

— Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction qui soit harmonique dans une aire donnée et qui prenne, sur le contour de cette aire, une suite de valeurs données à l'avance.




Nous résoudrons la question dans le cas très-simple où l'aire est un cercle, mais nous devons d'abord faire quelques remarques essentielles.

Lorsqu'on définit ainsi une fonction par une propriété qu'elle doit posséder dans une aire donnée, il est clair qu'on exclut par cela même tout le reste du plan ; le contour de l'aire est donc l'ensemble des

points limites, au delà desquels la fonction n'est plus définie; tandis que jusqu'ici nous avons supposé les contours dont nous nous sommes servis intérieurs à une aire dans laquelle la fonction conservait des propriétés déterminées. Il est donc nécessaire de bien définir ce qu'on doit entendre par ces mots: valeur que prend la fonction sur le contour.

Supposons que lorsqu'on se dirige vers $\mu$ suivant un chemin quelconque la fonction $f(x,y)$, supposée continue dans l'aire, tend vers une limite déterminée A. Nous dirons alors que $f(x,y)$ prend, au point $p$, la valeur A. Si le même fait se produit en tous les points $\mu$ du contour, A sera une fonction de l'arc $s$, nous le désignerons par $\varphi(s)$.

Il est aisé de voir que $\varphi(s)$ doit être une fonction continue; en effet soient $s$ $s+h$ les valeurs de $s$ qui correspondent aux deux points $p$, $p'$, décrivons du point $\mu$ comme centre un cercle de rayon $\rho$; supposons $\mu$ à l'intérieur de ce cercle; si la fonction $\varphi(s)$ est discontinue on aura

$$|\varphi(s+h)-\varphi(s)| > \delta$$

$\delta$ étant un nombre positif donné et cela, pour toutes les valeurs de $\rho$ inférieures à un nombre donné $\varepsilon$. D'autre part il y aura, dans le cercle et non sur le contour deux points $M, M'$, $(x,y)(x_1,y_1)$ tel qu'on ait

$$f(x,y)-\varphi(s)=\alpha \qquad f(x_1,y_1)-\varphi(s+h)=\beta$$

$\alpha$ et $\beta$ étant tous deux, en module, inférieures à $\frac{\delta}{4}$. On aura donc $|\alpha-\beta|<\frac{\delta}{2}$. Mais on a:

$$f(x_1,y_1)-f(x,y)=\varphi(s+h)-\varphi(s)+(\alpha-\beta)$$

D'où l'on conclura:

$$|f(x_1,y_1)-f(x,y)| > \delta-\frac{\delta}{2}. \text{ ou } \frac{\delta}{2}.$$

Donc dans un cercle de rayon infiniment petits on pourrait déterminer deux points de l'aire donnant à $f(x,y)$ deux valeurs ayant une différence finie, ce qui est absurde.

Il résulte immédiatement de là que la fonction étant continue dans l'aire et sur son contour, sera uniformément continue (I page 119). Mais nous pouvons aller plus loin et démontrer la proposition suivante.[1]

Si à chaque point $\mu$ du contour vient aboutir un chemin particulier tel que, le long de ce chemin, $f(x,y)$ tende uniformément vers $\varphi(s)$ la fonction prendra au point $\mu$ la valeur $\varphi(s)$.

En effet donnons-nous un nombre positif $\varepsilon$; il existe une longueur $\lambda$, indépendante de $s$, et telle que si on porte, sur le chemin spécial qui

[1] P. Painlevé. – Lignes singulières des fonctions analytiques. – Annales de Toulouse Tome II. page 20

aboutit en $\mu$ une longueur $\mu P = \lambda$, on ait pour tout point de l'arc $\mu P$

$$|f(x,y) - \varphi(s)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part si $\mu$ décrit la courbe $C$, $P$ décrit une seconde courbe, intérieure complètement à $C$, et par suite sur cette courbe $C$, la continuité de $f(x,y)$ est uniforme ; on peut donc supposer $h$ assez petit pour que $P$ et $P'$ soient eux-mêmes tellement voisins qu'on ait

$$|f(x,y) - f(x'y')| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit alors $M\mu$ un chemin fixe quelconque aboutissant en $\mu$ ; $M(\xi,\eta)$ le point où il coupe $P'\mu'$ ; on aura :

$$f(\xi,\eta) - \varphi(s) = [f(\xi,\eta) - \varphi(s+h)] + [\varphi(s+h) - f(x,y)] + [f(x,y_1) - f(x,y)] + [f(x,y) - \varphi(s)]$$

Enfin on peut toujours supposer $h$ assez petit pour que le point variable reste compris entre $\mu'$ et $M''$, puisque $\mu'$ tend vers $\mu$, et $P'$ vers $P$. Dans ces conditions chacune des parenthèses conservera un module inférieur à $\frac{\varepsilon}{4}$ on aura alors

$$|f(\xi,\eta) - \varphi(s)| < \varepsilon$$

et par suite $f(\xi,\eta)$ tendra vers $\varphi(s)$ quand on suivra le chemin arbitraire considéré. La fonction prendra donc bien au point $\mu$ la valeur $\varphi(s)$

**Remarque** — La démonstration précédente suppose que le chemin spécial considéré $\mu P$, vient partout couper le contour extérieur sous un angle différent de 0 ou de $\pi$.

## IV. Solution du problème dans le cas du cercle.

— Nous pouvons maintenant résoudre le problème de Dirichlet dans le cas d'un cercle de rayon $R$ ayant l'origine pour centre. Soit $\theta$ l'angle $A\,O\,\mu$ qui fixe la fonction d'un point $\mu$ sur le cercle : $\varphi(\theta)$ la valeur que doit prendre la fonction au point $\mu$ ; d'après ce qui précède nous devons supposer $\varphi(\theta)$ continue.

Développons $\varphi(\theta)$ en série de Fourier :

$$(1) \qquad \varphi(\theta) = \frac{a}{2} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + \quad \cdot + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta + \text{—}$$

Nous avons vu que cette série est uniformément convergente, $\varphi(\theta)$ étant continue, entre $-\pi$ et $+\pi$. Considérons alors la série dont le terme général est

$$(2) \qquad u_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$r$ étant le rayon vecteur d'un point $M$ situé sur le rayon $O$.

Prenons un nombre positif $\varepsilon$, il existe un entier $p$ tel que la somme des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans la série (1) ait un module $< \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geq p$. Il est clair qu'on aura à fortiori la même inégalité pour la série (2), en supposant $r$ quelconque, mais inférieur à $R$. Soit alors $V(r)$ la somme de la

série (2) nous aurons, $V_n$ étant la somme de $n$ premiers termes:

$$V(r)-\varphi(\theta)=[V(r)-V_n(r)]+[V_n(r)-V_n(R)]+[V_n(R)-\varphi(\theta)]$$

Or $n$ étant supposé égal ou supérieur à $p$, la première et la troisième parenthèses ont, quel que soit $\theta$, un module moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$; nous pouvons alors trouver un nombre $\rho$ tel que pour $R-r<\rho$ la seconde parenthèse ait ainsi un module moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, même quand on remplacera les sinus et les cosinus qui y figurent par des valeurs égales à $+1$ ou à $-1$; $\rho$ se trouvera ainsi déterminé indépendamment de $\theta$ et on aura,

$$|V(r)-\varphi(\theta)|<\varepsilon$$

en d'autres termes la fonction $V$ tend uniformément vers $\varphi(\theta)$ quand $r$ tend vers $R$, c'est à dire quand on se dirige vers le point $\mu$ en suivant le rayon vecteur $O\mu$. On en conclut que cette fonction $V(r)$ ou $V(x,y)$ qui est évidemment uniforme et continue dans le cercle, prend sur la circonférence la suite de valeurs $\varphi(\theta)$.

Pour démontrer qu'elle résout le problème de Dirichlet il suffit de faire voir que $\Delta V=0$. Or posons

$$v_n=(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad W_n=U_n+i\,v_n$$

nous aurons

$$W_n=a_n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\frac{r^n}{R^n}+b_n(\sin n\theta-i\cos n\theta)\frac{r^n}{R^n}$$

ou

$$W_n=\frac{a_n-ib_n}{R^n}\cdot z^n$$

$z$ étant l'affixe du point $x,y$. — Nous obtenons ainsi une série entière et il est facile de voir qu'elle converge dans le cercle $R$. En effet on a (1ère partie page 159)

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta \qquad b_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

et ces intégrales conservent évidemment des valeurs finies quand $n$ augmente indéfiniment; donc la série $(V_n)$ est convergente pour $r<R$, aussi bien que la série $(U_n)$; donc enfin la série $(W_n)$ est convergente. — Elle représente donc une fonction analytique et comme $V$ est la partie réelle de cette série, on a bien $\Delta V=0$. Cette fonction $V$ satisfait donc bien au problème de Dirichlet.

V. Cas général — Quand l'aire est limité par un contour de forme quelconque, le problème de Dirichlet admet toujours une solution et une seule; c'est en cela que consiste le principe de Dirichlet. — Nous n'en donnerons pas la démonstration, qui a été établie en toute rigueur; mais il est intéressant de montrer comment la question a été ramenée par Dirichlet

à une question de minimum

Si dans la relation

$$\iint_{(C)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{(c)} P\,dx + Q\,dy$$

nous faisons $\quad Q = U \dfrac{\partial U}{\partial x}, \quad P = -U \dfrac{\partial U}{\partial y}$ il vient :

$$\iint_{(c)} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \iint_{(c)} U \Delta U\, dx\, dy = \int_c U\left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dz\right)$$

Nous désignerons en général par $\Omega(U)$ la première intégrale double, qui est essentiellement positive et nous aurons

$$(1) \quad \Omega(U) = -\iint_{(c)} U \Delta U\, dx\, dy + \int_0 U D_n U\, ds$$

$D_n$ étant toujours la dérivée prise suivant la normale intérieure.

Ceci posé, si $U$ doit satisfaire au problème de Dirichlet et s'annuler sur le contour les deux intégrales du second membre disparaissent et on a $\Omega(U) = 0$ ce qui exige évidemment.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$U$ doit donc rester constante et comme cette fonction continue s'annule au contour elle doit être identiquement nulle.

Il résulte d'abord de là que si deux fonctions $U$, $U + \theta$ vérifient le problème de Dirichlet pour une même suite de valeurs sur le contour, elles doivent être identiques, leur différence $\theta$ devant alors le vérifier elle-même en s'annulant tout le long du contour. En d'autres termes, si le problème admet une solution il n'en admet qu'une.

En second lieu, si $U$ est une solution, elle est, parmi les fonctions uniformes et continues qui forment sur le contour les valeurs considérées, celle qui rend minima l'intégrale $\Omega$. On a en effet

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta) + 2\iint_{(c)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ou, en intégrant par parties

$$\Omega(U + \theta) = \Omega(U) + \Omega(\theta) + 2\int_{(c)} \theta\left(\frac{\partial U}{\partial x} dy - \frac{d U}{\partial y} dx\right) - 2\iint_{(c)} \theta \Delta U\, dx\, dy$$

Or $\theta$ s'annulant sur le contour l'intégrale curviligne disparait l'intégrale double s'annule à cause de $\Delta U = 0$. Donc enfin

$$\Omega(U + \theta) - \Omega(U) = \Omega(\theta)$$

Le second membre étant essentiellement positif, le minimum a lieu quand $\theta = 0$, ainsi que nous l'avons annoncé.

Dirichlet admettait comme certain que, parmi toutes les fonctions uniformes et continues qui prennent sur le contour de l'aire une suite de valeurs données, il y en a nécessairement une $H$ qui rend minima l'intégrale $\Omega$. — En admettant ce postulatum, qui n'est nullement évident, la démonstration du principe s'achève sans difficulté ; nous allons en effet prouver qu'on doit avoir $\Delta H = 0$.

En effet décrivons à l'intérieur de $C$ un cercle $K$ et désignons par $A$ l'aire comprise entre ces deux contours. On a évidemment

$$\Omega_{(c)} = \Omega_{(A)} + \Omega_{(K)}$$

Or, dans le cercle $K$ remplaçons la fonction $H$ par la fonction $V(x,y)$ qui satisfait au problème de Dirichlet et qui prend sur la circonférence les mêmes valeurs que $H$ ; laissons d'ailleurs intacte cette fonction $H$ dans l'aire $A$ ; nous constituons ainsi dans l'aire totale une fonction $H_1$ uniforme et continue et nous aurons

$$\Omega_{(c)}(H_1) - \Omega_{(c)}(H) = \Omega_{(K)}(V) - \Omega_K(H)$$

Or si $V$ était différent de $H$ dans le cercle, le second membre serait négatif, puisque $V$ est harmonique ; donc $\Omega_{(c)}(H_1)$ serait inférieur à $\Omega_{(c)}(H)$, contrairement à l'hypothèse ; donc $H$ doit, dans le cercle, coïncider avec $V$ et par suite vérifier la condition $\Delta V = 0$. Il est clair que cela doit, dès lors, avoir lieu dans toute l'aire $(C)$ puisqu'on peut faire varier arbitrairement le rayon et le centre du cercle $K$.

Comme nous l'avons dit plus haut, le principe de Dirichlet a été démontré en toute rigueur et indépendamment de tout postulatum.

**Remarque.** — Ainsi que nous l'avons remarqué, une fois $U$ connu, la fonction complémentaire $V$ pourra être déterminée à une constante près. On pourra donc, d'une manière unique, trouver une fonction analytique dans une aire donnée, dont la partie réelle prenne sur le contour, une suite de valeurs assignées d'avance, la partie imaginaire prenant une valeur donnée, en un point choisi arbitrairement sur le contour.

---

# Sixième Leçon.

## Propriétés des Fonctions méromorphes.

**I. Série de Mac Laurin.** — Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe dans une aire $A$ contenant le point $0$. Si $x$ désigne l'affixe d'un point intérieur à cette aire, et $C$ un contour contenu lui-même dans $A$, et comprenant le point $x$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

D'ailleurs la fraction $\frac{1}{z-x}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

Si on substitue ce développement à $\frac{1}{z-x}$ sous le signe d'intégration, on aura pour $f(x)$

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + R_n.$$

en posant

$$(2) \qquad A_p = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz \qquad R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)\,x^n}{(z-x)z^n}\,dz.$$

Supposons qu'on ait pris pour $C$ un cercle de rayon $R$ ayant $0$ pour centre. Si $M$ est le module maximum de $f(z)$ sur la circonférence, $r$, le module de $x$, la fonction soumise à l'intégration dans $R_n$ a un module moindre que $\frac{M}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^n$. On a donc, le contour ayant pour longueur $2\pi R$ :

$$|R_n| < \frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Comme $\frac{r}{R} < 1$, on en conclut que $R_n$ tend vers zéro lorsque $n$ croît indéfiniment, en d'autres termes, la série entière

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots + A_n x^n + \dots\dots$$

est convergente et a pour somme $f(x)$. Si on y remplace $A_p$ par son expression (2), on a :

$$(3) \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2..n} f^{(n)}(0) + \dots$$

à cause de la formule de Cauchy démontrée précédemment

$$f^{(p)}(0) = \frac{1.2\dots p}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz$$

La formule (3) à laquelle nous donnerons, par une extension toute naturelle le nom de série de Mac Laurin, est valable pour tous les points intérieurs à un cercle $C'$ parfaitement déterminé, ayant pour centre $O$ et passant par le point singulier de $f(z)$ le plus rapproché du point $O$. Il est d'ailleurs bien clair qu'il est inutile de chercher à prolonger au delà de ce cercle un pareil développement, car toute série entière convergente en un point extérieur à $C'$ aurait pour somme une fonction holomorphe pour toutes les valeurs de module moindre et par suite ne saurait représenter $f(z)$ qui cesse d'être holomorphe pour une au moins de ces valeurs.

**Série de Taylor.** — Soit $a$ un point quelconque où $f(z)$ soit holomorphe; décrivons de $a$ comme centre un cercle ne contenant aucun points singulier; $x$ étant l'affixe d'un point intérieur si nous posons:

$$z = a + \xi \quad , f(z) = f(a+\xi) = \varphi(\xi) \quad , x = a + \xi$$

la fonction $\varphi$ sera développable par la série de Mac Laurin, et nous aurons:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \frac{\xi}{1}\varphi'(0) + \dots\dots + \frac{\xi^n}{1.2\dots n}\varphi^{(n)}(0) + \dots\dots$$

D'où, en remplaçant $\xi$ par $x-a$, et tenant compte de la relation:

$$\varphi^{(p)}(0) = f^{(p)}(a)$$

$$(4) \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots\dots + \frac{(x-a)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a) + \dots\dots$$

C'est la série de Taylor, et le domaine du point $a$, dans lequel elle est valable, est un cercle ayant $a$ pour centre, et s'étendant, exclusivement, jusqu'au point singulier le plus voisin de $a$.

**II. Calcul de la fonction de proche en proche.** — La formule (4), bien que limitée à un domaine restreint autour du point $a$, peut servir à calculer la fonction en un point $b$ quelconque, pourvu qu'on connaisse en $a$ la valeur de la fonction et de chacune de ses dérivées. Relions en effet les points $a$, $b$ par un chemin quelconque $L$ ne passant par aucun point singulier.

Décrivons de $A$ comme centre un cercle ayant un rayon inférieur à la plus courte normale menée de $a$ au contour $C$. Ce cercle coupera $L$ en un point $a_1$ et nous aurons le moyen de calculer à l'aide de la formule (4) et de ses dérivées, les valeurs de la fonction et de toutes ses dérivées au point $a_1$. Du point $a_1$ nous passerons de même, à l'aide d'un second cercle au point $a_2$, plus rapproché du point $b$ à l'aide de la formule

$$f(a_2) = f(a_1) + \frac{a_2 - a_1}{1} f'(a_1) + \dots\dots + \frac{(a_2 - a_1)^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(a_1) + \dots\dots$$

Il est clair qu'on arrivera, ainsi après un nombre limité d'opérations, à un dernier cercle qui englobera le point $b$ et dans lequel on devra appliquer une dernière fois la série de Taylor.

**Remarque.** — Si, au point $a$, toutes les dérivées sont nulles, il est clair que la formule (4) donnera $f(a_1) = f(a)$ et que la $n^{ième}$ série dérivée donnera de même $f^{(n)}(a_1) = f^{n}(a) = 0$ ; qu'il en sera de même en $a_2$ puis en $a_3$ et enfin en $b$. On aura donc $f(b) = f(a)$, et on est ainsi conduit au théorème suivant :

**Théorème.** — Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans une aire donnée, et si toutes ses dérivées sont nulles en un point particulier de cette aire, la fonction conserve, dans l'aire, une valeur constante.

Supposons que la fonction conserve une valeur constante le long d'une aire finie $ab$, si $M$ est un point quelconque de cet arc, un cercle de rayon $\rho$ décrit de $M$ comme centre coupera $ab$ en un autre point $M'$ où la valeur de la fonction sera la même qu'en $M$. On aura donc $f(z') - f(z) = 0$. Si $\rho$ diminue indéfiniment, le point $M'$ se rapprochera de $M$ et il est évident que la dérivée $f'(z)$ suivant la direction $ab$ sera nulle ; comme la fonction est analytique, on aura au point $M$, $f'(z) = 0$. Donc $f'(z)$ sera constant tout le long de $ab$ ; donc $f''(z$ sera nul et par suite constant le long de ce même arc et ainsi de suite. Donc, en un point quelconque de $ab$, toutes les dérivées seront nulles ; la fonction se réduira donc à une constante dans l'aire tout entière ; donc enfin :

**Théorème.** — Si une fonction, holomorphe dans une aire donnée, reste constante le long d'une ligne finie, aussi petite d'ailleurs que l'on voudra, elle est constante dans l'aire tout entière.

## III. Zéros d'une fonction holomorphe.

— Un zéro de $f(z)$ est un point où $f(z)$ s'annule ; d'après ce qui précède il y a en moins une dérivée qui ne s'annule pas en ce point $a$, et $p$ étant l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas, on a, dans le domaine du point $a$ :

$$f(z) = (z-a)^p \left[ \frac{f^{(p)}(a)}{1.2\ldots p} + \frac{z-a}{1.2.(p+1)} f^{(p+1)}(a) + \ldots \right] = (z-a)^p f_1(z) \qquad (f_1(a) \neq 0)$$

D'après cela, le rapport $\frac{f(z)}{(z-a)^p}$ est holomorphe dans le domaine du point $a$, et différent de zéro. Le nombre $p$ s'appelle le degré de de multiplicité du zéro $a$.

La parenthèse, considérée à partir de son second terme, est une fonction continue dans le domaine de $a$ et qui s'annule pour $z = a$. On peut donc décrire de $a$ comme centre, un cercle de rayon $\rho$ assez petit pour que cette fonction ait, dans ce cercle, un module inférieur à $\frac{1}{1.2\ldots p} \left| f^{(p)}(a) \right|$

Dans ces conditions, il est clair que ce cercle ne contiendra aucun zéro de $f_1(z)$

et par suite aucun zéro de $f(z)$ autre que $a$. On exprime ce fait en disant que les zéros de $f(z)$ sont isolés les uns des autres ; nous allons voir qu'en outre ils sont en nombre fini dans l'aire $S$ si nous supposons cette aire fermée.

En général, on nomme ensemble un système $E$ de points

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

distribués dans le plan suivant une loi quelconque. On dit que cet ensemble est isolé si chacun de ses points peut être isolé de tous les autres par un cercle de rayon suffisamment petit. Il peut arriver qu'autour d'un point $b$ du plan se groupent une infinité de points appartenant à $E$, de telle sorte que dans tout cercle, si petit qu'il soit, ayant $b$ pour centre il y ait au moins un des points $a$. On est ainsi conduit à un nouvel ensemble $E'$ composé de points limites $b_1 b_2 \ldots\ldots b_n \ldots\ldots$ et qu'on appelle l'ensemble dérivé de $E$... Il est clair que $E'$ peut admettre lui-même un ensemble dérivé $E''$ et ainsi de suite.

Pour donner un exemple simple, les zéros de $\sin \frac{\pi}{z}$ sont fournis par $z = \frac{1}{k}$ ; ils forment un ensemble infini de points isolés. Dans un cercle de rayon $\rho$ décrit de l'origine comme centre il y a une infinité de zéros de $\sin \frac{\pi}{z}$, et cela quelque petit que soit $\rho$. L'ensemble considéré admet donc un ensemble dérivé qui se réduit ici au point $0$.

Supposons qu'un ensemble infini $E$ soit réparti dans une aire fermée $S$ ou sur son contour, il est facile de voir qu'il y aura un ensemble dérivé contenu dans la même aire. En effet, entourons $S$ d'un rectangle $R$ parallèle aux axes. Si nous divisons $R$ en quatre rectangles égaux, l'un au moins contiendra une infinité de points de l'ensemble $E$ ; soit $R_1$ ce rectangle ; divisons-le en quatre autres égaux ; l'un au moins de ceux-ci, $R_2$, contiendra une infinité de ces mêmes points, et ainsi de suite indéfiniment ; or le centre du rectangle $R_n$ tend, ainsi que nous l'avons vu à plusieurs reprises, vers un point $b$ parfaitement déterminé, et situé évidemment dans $S$ ou sur son contour. Il y aura donc au moins un point limite, ainsi que nous l'avions dit.

Revenons à la fonction $f(z)$ holomorphe dans une aire $A$ ; si $C$ est une courbe fermée complètement intérieure à $A$ le nombre des zéros situés sur $C$ ou dans son intérieur est nécessairement limité. En effet, s'il en était autrement, ces zéros formeraient un ensemble ayant au moins un point limite $b$ ; à cause de la continuité, on aurait nécessairement $f(b)=0$ ; il y a là une contradiction, car en qualité de zéro, $b$ doit pouvoir être isolé de l'ensemble de tous les autres ; donc il ne saurait faire partie de l'ensemble dérivé.

Ainsi les zéros seront en nombre limité et chacun d'eux sera d'un

degré fini de multiplicité. Il est clair que tout ce qui précède s'étend immédiatement aux points où $f(z)$ prend une valeur déterminée quelconque c. — Ces points sont en effet les zéros de la fonction holomorphe $f(z) - c$.

## IV. — Fonctions méromorphes dans une aire donnée.

Nous avons défini (II page 11) ce qu'on entend par fonction méromorphe ; c'est une fonction qui n'admet d'autre singularité que des pôles ; un pôle est d'ailleurs un point où $f(z)$ devient infini, la fonction $\frac{1}{f(z)}$ étant holomorphe en ce même point.

Observons qu'un zéro de $f(z)$ doit pouvoir être isolé de tout pôle par un cercle de rayon fini, d'après la définition même de la continuité. — Nous supposons $f(z)$ méromorphe dans une aire donnée $S$. Soit alors $a$ un zéro ; décrivons de $a$ comme centre un cercle $C$ intérieur à $S$ et ne contenant aucun pôle ; $f(z)$ sera holomorphe dans $C$ ; donc le zéro $a$ est isolé de tout autre zéro contenu dans $C$, et à fortiori de tout zéro qui serait extérieur à $C$. De plus chaque zéro sera d'un ordre fini de multiplicité, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p$ tel qu'on ait $f(z) = (z-a)^p f_1(z)$, $f_1(z)$ ne s'annulant pas en $a$ et étant holomorphe dans le domaine de ce point ; enfin ces zéros seront en nombre limité.

Considérons maintenant $\frac{1}{f(z)}$ c'est une fonction méromorphe ayant comme zéros les pôles de $f(z)$ ; d'après ce que nous venons de voir les zéros sont en nombre limité, isolés les uns des autres ; en outre à tout pôle $b$, correspond un entier $q$ fini et tel qu'on ait

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^q \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe et différent de zéro dans le domaine de $b$, la fonction $\psi = \frac{1}{\varphi}$ sera donc holomorphe dans le même domaine et ne s'annulera pas pour $z = b$ ; on aura donc :

$$f(z) = (z-b)^{-q} \psi(z)$$

$\psi(b)$ n'étant ni nul ni infini ; nous exprimerons ce fait en disant que $b$ est un pôle de degré $q$.

**Ordre d'une fonction méromorphe.** — En chaque point $x$ de $S$, la fonction $f(z)$ peut être mise sous la forme :

$$f(z) = (z-x)^\mu f_1(z)$$

$\mu$ étant entier et la fonction $f_1(z)$ n'étant ni nulle ni infinie. Si $x$ n'est ni zéro ni un pôle, $\mu = 0$, si $x$ est un zéro, $\mu$ est positif, si c'est un pôle, $\mu$ est négatif. — Ce nombre entier $\mu$ est ce qu'on appelle l'ordre de $f(z)$ au point considéré. — Il est évident que l'ordre d'un produit de fonctions est égal en chaque point à la somme des ordres de ses facteurs.

Remarquons aussi que l'ordre de $f'(z)$ en chaque zéro ou pôle,

est égal à $\mu - 1$; on a en effet:

$$f'(z) = (z-x)^{\mu-1}[\mu f_1(z) + (z-x) f_1'(z)]$$

et comme $f_1(x) \neq 0$, l'ordre de $f'(z)$ est bien égal à $\mu - 1$; si $\mu$ est nul, on ne peut rien affirmer quant à l'ordre de $f'(z)$.

V- Expression analytique des fonctions méromorphes dans une aire donnée. — 1°.- Si deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ sont méromorphes dans une même aire $S$ et ont même ordre en chaque point, le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ sera d'ordre nul en chaque point donc ce sera une fonction holomorphe et sans aucun zéro dans $S$; son logarithme népérien sera par suite holomorphe dans la même aire $S$; on aura donc

$$f(z) = \varphi(z)\, e^{F(z)}$$

$F(z)$ étant holomorphe dans $S$. Soient maintenant $a_1, a_2 \ldots a_p$ les zéros de $f(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ leurs degrés de multiplicité; $b_1, b_2, \ldots b_q$, les pôles, $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q$ leurs degrés; la fonction rationnelle

$$\frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_p)^{\alpha_p}}{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\ldots\ldots(z-b_q)^{\beta_q}}$$

est partout de même ordre que $f(z)$; on aura donc:

$$(5) \qquad f(z) = \frac{(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_p)^{\alpha_p}}{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\ldots(z-b_q)^{\beta_q}}\, e^{F(z)}$$

$F(z)$ étant holomorphe dans l'aire $S$. C'est là une première expression analytique de $f(z)$. Dans le cas où $f(z)$ est holomorphe, cette expression correspond à la décomposition d'un polynome entier en facteurs linéaires.

2°.- La fonction $f(z)$ méromorphe dans $S$, est susceptible d'une autre expression analytique non moins importante, et qui met en évidence la manière d'être de la fonction dans le domaine de chaque pôle. — Soit $b$ un pôle de degré $\beta$, en sorte qu'on ait dans le domaine de $b$:

$$f(z) = (z-b)^{-\beta} f_1(z).$$

Développons $f_1(z)$ qui est holomorphe, suivant les puissances ascendantes de $z-b$; nous avons:

$$f(z) = (z-b)^{-\beta}[A_0 + A_1(z-b) + A_2(z-b)^2 + \ldots]$$

$$\text{ou} \qquad f(z) = \frac{A_0}{(z-b)^{\beta}} + \frac{A_1}{(z-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z-b} + F(z)$$

$F(z)$ étant holomorphe dans le domaine de $b$; la fraction rationnelle s'appelle la fonction caractéristique de $f(z)$, relative au pôle $b$; le coefficient $A_0$ est essentiellement différent de zéro car il a pour valeur

$f_1(b)$ ; enfin $A_{n-1}$ s'appelle le résidu de $f(z)$ au point $b$.

Soient alors $b_1, b_2 \dots b_q$ les pôles de $f(z)$ dans l'aire $S$, $R_1$ $R_2$ .... $R_q$ les fonctions caractéristiques correspondantes, la fonction

$$\varphi(z) = R_1 + R_2 + \dots + R_q$$

peut être considérée en elle-même et indépendemment des pôles de $f(z)$; la différence $f(z) - \varphi(z)$ est méromorphe dans $S$ ; elle ne peut avoir d'autres pôles que les $b$ ; d'ailleurs dans le voisinage d'un point $b_j$, $f(z) - R_j$ et $\varphi(z) - R_j$ sont l'une et l'autre holomorphes ; donc il en est de même de $f(z) - \varphi(z)$. Donc enfin cette différence est holomorphe dans l'aire entière et on peut écrire :

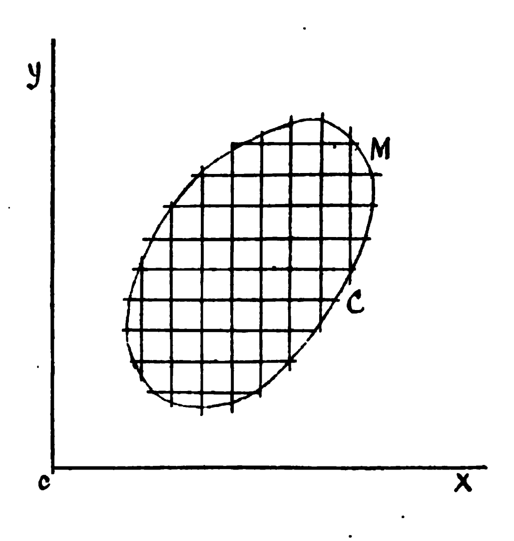
$$(6) \qquad f(z) = \sum \left[ \frac{A_0}{(z-b)^\beta} + \frac{A_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \dots + \frac{A_{\beta-1}}{z-b} \right] + F(z)$$

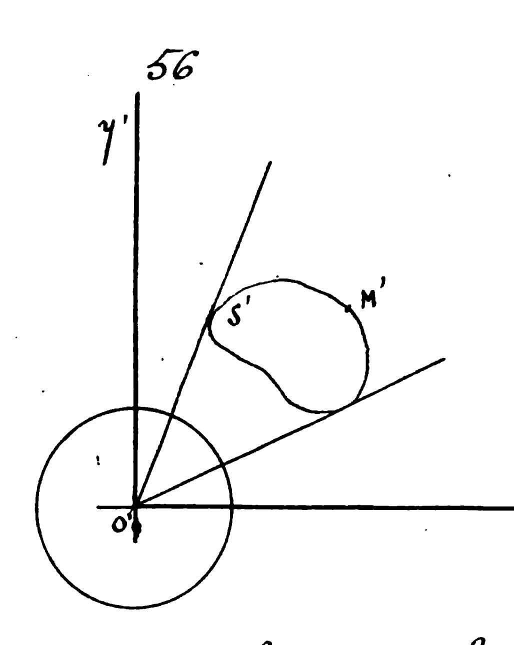
$F(z)$ étant holomorphe dans l'aire $S$. Cette nouvelle expression analytique de $f(z)$ correspond exactement à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

**VI – Somme des ordres dans une aire donnée.** – Supposons que le point $M$ qui représente $z$ décrive une fois et une seule dans le sens direct le contour de l'aire $S$ ; lorsque $M$ sera revenu à son point de départ, le point $M'$ qui représente $f(z)$ aura de son côté décrit une courbe fermée, puisque $f(z)$ est uniforme. En d'autres termes le module de $f(z)$ aura repris la même valeur, mais l'argument aura varié de $2k\pi$, $k$ étant un nombre entier ; nous allons montrer que ce nombre $k$ est égal à la somme des ordres de $f(z)$ dans l'aire $S$.

Nous supposerons que le contour $C$ de $S$ ne passe par aucun zéro ni pôle de $f(z)$, sinon la courbe $c'$ viendrait passer au point $O$ et l'argument de $f(z)$ varierait brusquement de $\pi$, et le point $M'$ pourrait, après un tour complet de $M$, ne pas revenir à son point de départ. Observons maintenant que si $M$ parcourt deux fois de suite un même chemin dans deux sens opposés, le nombre $k$ correspondant est nécessairement nul, puisque $M'$ doit après avoir décrit un certain arc revenir à son point de départ en repassant par les mêmes positions. – Il résulte de là, en vertu d'un raisonnement que nous avons déjà fait à plusieurs reprises, que si l'on coupe $C$ par une transversale ne rencontrant aucun zéro ni pôle, la valeur de $k$ correspondant au contour de l'aire totale est égale à la somme des valeurs de $k$ qui correspondent aux contours des aires partielles ; nous allons montrer d'abord que si $C$ ne contient aucun zéro ni aucun pôle, $k$ est nul.

En effet, puisque $f(z)$ ne s'annule ni sur $C$ ni dans son intérieur cette fonction conserve pour tous ces points un module supérieur à un



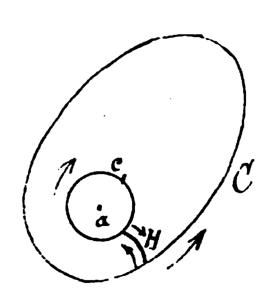




nombre déterminé $\delta$. Si du point $O'$ comme centre, nous décrivons un cercle $C'$ de rayon $\delta$, le point $M'$ ne pourra jamais pénétrer à l'intérieur de ce cercle ; nous pouvons maintenant, puisque $f(z)$ est uniformément continue dans l'aire $C$ et sur son contour, décomposer cette aire en un nombre fini de carrés, complètement intérieurs au contour ou écornés par le contour, et tels que $M$ décrivant le périmètre de l'un quelconque d'entre eux, $M'$ décrive une courbe d'aire inférieure à $\pi\delta^2$. Soit $S'$ l'une de ces courbes, il est évident qu'elle ne peut envelopper l'origine $O'$ puisqu'elle devait alors entourer le cercle $C'$ dont l'aire est supérieure à la sienne ; le rayon vecteur $O'M'$ reviendra donc à sa position initiale après avoir oscillé entre les tangentes extrêmes menées de $O'$ à $S'$, et la variation de l'argument de $f(z)$ sera égale à $0$. Cela ayant lieu pour le contour de chacun des carrés, le nombre $k$ sera nul pour le contour $C$ de l'aire totale, puisque le nombre des carrés est limité.

Soit maintenant $a$ un point de l'intérieur de $C$ ; prenons d'abord la fonction particulière $f(z) = (z-a)^n$. — Si nous décrivons un cercle $C_1$ ayant $a$ pour centre, et intérieur à $C$, $f(z)$ n'aura aucun zéro dans l'aire comprise entre $C$ et $C_1$. Relions $C_1$ à $C$ par une traverse $H$ et désignons par $2k\pi$, $2k_1\pi$, $h$ les variations d'argument correspondantes aux courbes $C$, $C_1$, $H$ ; nous aurons d'après ce qui précède :

$$2k\pi + h - 2k_1\pi - h = 0$$

d'où $k = k_1$




Mais $k_1$ se calcule aisément. Si nous posons

$$z = a + \rho e^{\theta i} \qquad f(z) = \rho^n e^{n\theta i}$$

comme l'argument de $f(z)$ est égal à $n\theta$, quand $\theta$ aura varié de $2\pi$, c'est-à-dire quand $M$ aura parcouru une fois $C_1$ dans le sens direct, l'argument

de $f(z)$ aura varié de $2n\pi$. On a donc enfin $k_1 = n$, d'où $k = n$ ($n$ peut être positif ou négatif)

Passons enfin au cas d'une fonction méromorphe dans S. La formule ($\rho$) nous fournit $f(z)$ sous forme d'un produit dont l'argument est égal à la somme des arguments des facteurs. La variation de l'argument total est donc égale à la somme des variations correspondantes aux différents facteurs. Or le dernier facteur $e^{F(z)}$ n'ayant aucun zéro ni pôle dans C donne lieu à une variation nulle de l'argument; $(z-a_i)^{\alpha_i}$ donne une variation égale à $2\alpha_i\pi$; la variation totale étant $2k\pi$, on a par conséquent

$$k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_q$$

ce qui démontre le théorème énoncé:

**Théorème.** — La variation totale de l'argument de $f(z)$ quand $z$ décrit une fois et une seule, dans le sens direct, un contour ne passant par aucun zéro, est égale à $2\pi$ multiplié par la somme des ordres de $f(z)$ dans l'aire considérée.

## VII. — Fonctions entières. — Fonctions fractionnaires. —

Une fonction $f(z)$ est dite entière, par analogie avec les polynômes entiers, quand elle est holomorphe dans un cercle de rayon R aussi grand que l'on veut; elle est dite fractionnaire par analogie avec les fractions rationnelles quand elle est méromorphe dans un cercle de rayon R aussi grand que l'on veut. — Pour connaître complètement une telle fonction, il est nécessaire de savoir ce qu'elle est au point $\infty$; nous avons déjà dit que si $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ admet le point 0 comme singularité, le point $\infty$ est par définition une singularité de même nature pour $f(z)$. Ainsi ce sera un pôle de degré $p$ si on a, dans le domaine de 0, et posant $z = \frac{1}{\zeta}$

$$f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A}{\zeta^p} + \frac{A_1}{\zeta^{p-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{\zeta} + \varphi(\zeta)$$

$\varphi(\zeta)$ étant holomorphe pour $\zeta = 0$. On aura donc pour de très grandes valeurs de $z$

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \dots + A_{p-1} z + \psi(z)$$

$\psi(z)$ ne devenant pas infini avec $z$. Le polynome mis en évidence sera dans le cas actuel la fonction caractéristique du point $\infty$, et l'ordre de la fonction à l'infini sera $-p$.

**Théorème de Liouville.** — Toute fonction entière qui conserve un module fini, quelque soit $z$, se réduit à une constante.

Remarquons en effet que pour une fonction entière, la série de MacLaurin s'applique, quelque grand que soit le rayon R du cercle dans lequel on a fait le développement. Or, on a, $p$ étant un entier

donné positif,

$$f^{(p)}(0) = 1.2\ldots p \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz$$

l'intégrale étant prise le long de ce cercle. Par hypothèse $|f(z)|$ reste inférieur à un nombre fixe $M$ indépendant de $R$; donc le module de l'intégrale est inférieur à $2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}}$. On a donc :

$$|f^{(p)}(0)| < 1.2\ldots p\,\frac{M}{R^n}$$

et comme $R$ peut être pris aussi grand qu'on voudra, $f^{(p)}(0)$ est nul; donc tous les termes de la série de Mac Laurin sont nuls à partir du second, et on a simplement $f(z) = f(0)$ ce qui démontre le théorème énoncé.

Il résulte de là qu'une fonction entière ne peut admettre le point $\infty$ comme point ordinaire car dans un cercle de rayon $\frac{1}{R}$, $f\left(\frac{1}{z}\right)$ conserverait un module fini; hors du cercle de rayon $R$, il en serait de même de $f(z)$; donc enfin $|f(z)|$ serait fini pour toute valeur de $z$ et se réduirait à une constante.

Voyons maintenant si le point $\infty$ peut être un pôle d'ordre $p$. — Nous avons vu qu'on a alors :

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \ldots\ldots + A_{p-1}z + \Psi(z)$$

$\Psi(z)$ étant fini pour $z$ infini; considérons alors

$$f(z) - Az^p - A_1 z^{p-1} \ldots - A_{p-1}z.$$

Cette fonction est évidemment finie pour toute valeur finie de $z$; elle l'est d'après ce qu'on vient de dire pour $z$ infini; donc elle se réduit à une constante $A_p$, et on a :

$$f(z) = Az^p + A_1 z^{p-1} + \ldots\ldots + A_{p-1}z + A_p.$$

Donc : toute fonction entière dont le point $\infty$ est un pôle, se réduit à un polynôme entier.

Considérons maintenant le cas où $f(z)$ est fractionnaire, et où le point $\infty$ est un pôle ou un point ordinaire; le point $0$ est un pôle ou un point ordinaire de $f\left(\frac{1}{z}\right)$ et peut être isolé de tout autre pôle par un cercle de rayon $\rho$ fini; si alors on revient à $f(z)$, elle n'aura qu'un seul pôle au plus en dehors du cercle de rayon $\frac{1}{\rho} = R$ décrit de $0$ comme centre, $f(z)$ sera méromorphe dans ce cercle, et par suite ses pôles y seront en nombre limité; soient alors $R_1, R_2 \ldots R_p$, les fonctions caractéristiques correspondantes, et considérons la fonction

$$f(z) - R_1 - R_2 \ldots - R_p = \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle de rayon $R$; en dehors de ce cercle elle

n'admet qu'un pôle au plus: le point $\infty$; donc elle se réduit d'après ce qui précède, soit à une constante, soit à un polynôme entier; donc enfin $f(z)$ se réduit à une fraction rationnelle; d'où le théorème:

**Théorème.** — Toute fonction fractionnaire qui admet le point à l'infini comme pôle ou comme point ordinaire, se réduit à une fraction rationnelle.

**VIII.** — Si nous supposons que $M$, image de $z$, décrive dans le sens direct, le cercle de rayon $R$, $\mu$, image de $\zeta$ décrira dans le sens rétrograde le cercle de rayon $\rho$, le point $0$ étant le seul pôle ou zéro de $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ contenu dans ce cercle, la variation $V$ de l'argument de $f(z)$ quand $z$ parcourt le cercle de rayon $R$, sera donc:

$$V = 2\,i\,\pi.\,p$$

Si d'ailleurs $k$ est la somme des ordres à l'intérieur de ce cercle, on a: $V = 2ik\pi$; donc $k - p = 0$; de là ce théorème:

**Théorème.** — La somme des ordres d'une fonction rationnelle, pour toutes les valeurs finies ou infinies de $z$ est égal à zéro.

C'est une généralisation de ce théorème que toute équation entière de degré $m$ admet $m$ racines.

**Théorème de M.r Picard.** — Nous énoncerons enfin, sans démonstration, un théorème très important dû à M.r Picard et relatif aux fonctions entières et transcendantes. (Mémoire sur les fonctions entières, Annales de l'É. N. 1880).

**Théorème:** — Lorsque $f(z)$ est une fonction entière et transcendante, l'équation $f(z) = a$ a une infinité de racines; il ne peut y avoir exception que pour une valeur au plus de la constante $a$.

Remarquons seulement que ce théorème comprend celui de Liouville comme cas particulier; car $a$ pouvant dépasser toute grandeur donnée, le module de $f(z)$ dépasse lui même toute grandeur donnée.

---

# Septième Leçon.

## Séries de Laurent et de Fourier. — Singularités des fonctions uniformes.

I. — **Série de Laurent.** — Le théorème de Cauchy appliqué à la couronne comprise entre deux cercles $CC'$ ayant pour centre l'origine $O$ va nous conduire à une nouvelle forme de développement. — Soit $x$ l'affixe d'un point de la couronne, $f(z)$ une fonction holomorphe dans l'espace compris entre les deux cercles, on a :

$$2i\pi f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

l'intégrale étant étendue au contour total de l'aire; cette intégrale se partage alors en deux autres, et on peut écrire :

$$(1) \qquad 2i\pi f(x) = \int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \int_{(c')} \frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

Occupons-nous d'abord de la première intégrale; $z$ reste sur le contour de $c$ et par suite on a dans toute l'étendue des valeurs intégrées $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$. Or

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{z^n} + \frac{x^n}{z^n(z-x)}$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} + R_n$$

en posant

$$(3) \qquad A_p = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{p+1}}\,dz \qquad\qquad R_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{x^n}{z^n(z-x)} f(z)\,dz.$$

Passons à la deuxième intégrale; ici on a $\left|\frac{z}{x}\right| < 1$ pour toutes les valeurs de $z$ situées sur $c'$. Nous aurons alors :

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x} + \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} + \cdots\cdots + \frac{z^{m-1}}{x^m} + \frac{z^m}{x^m(x-z)}$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots + \frac{B_m}{x^m} + S_m$$

en posant

$$(5) \qquad B_q = \frac{1}{2i\pi}\int z^{q-1} f(z)\,dz \qquad S_m = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^m}{x^m(x-z)} f(z)\,dz.$$

On reconnaît immédiatement, par un raisonnement déjà fait et que nous ne répèterons pas ici, que si $n$ et $m$ croissent indéfiniment, $R_n$, $S_m$ tendent vers 0 ; chacune des deux intégrales de l'équation (1) se développe par suite en une série convergente, et on a :

$$(6) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots$$
$$+ \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots + \frac{B_m}{x^m} + \dots$$

$f(x)$ est donc développée en une série ordonnée par rapport aux puissances positives et négatives de $x$. Cette forme de développement a été donnée par le commandant Laurent. Les formules (3) et (5) donnent les valeurs des coefficients.

Ainsi dans la couronne considérée, on peut écrire :

$$(7) \qquad f(z) = F(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right) .$$

$F(z)$ est une série entière convergente à l'intérieur du cercle $C$, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ est une série entière convergente pour toutes les valeurs de $z$ extérieures à $C'$ qui ne contient pas de terme indépendant de $z$. En général, si d'un point quelconque $a$, on décrit des cercles $C$ et $C'$ comprenant entre eux une couronne dans laquelle $f(z)$ soit holomorphe, on aura pour tout point situé entre ces deux cercles :

$$f(z) = F(z-a) + \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

$F$ et $\varphi$ désignant des séries entières dont la seconde n'a pas de terme constant.

**II – Série de Fourier.** – Avant de développer les conséquences très-importantes du théorème de Laurent, nous en déduirons, par une transformation simple, une forme particulière de développement pour les fonctions périodiques.

Si nous posons $\qquad u = e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$

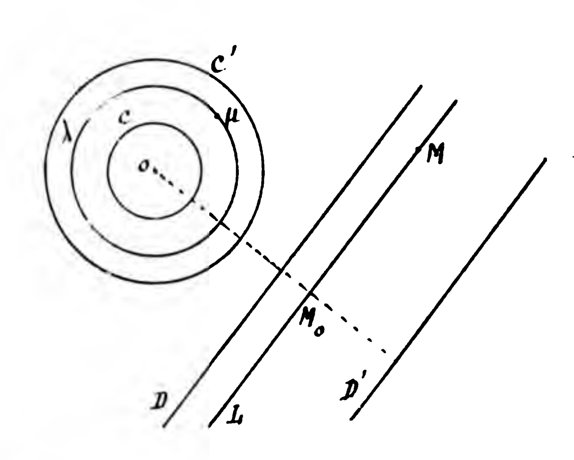
quand $z$ augmente de $2\omega$, $u$ se reproduit, en d'autres termes, $u$ admet la période $2\omega$. – Imaginons que $M$, image de $z$, se déplace dans l'intérieur de la bande formée par deux droites indéfinies $D$, $D'$, parallèles à la période $2\omega$ ; cherchons comment se déplace l'image de $\mu$ de $u$. Faisons décrire à $z$ une droite $L$ parallèle à la période ; on aura, $M_0$ étant un point fixe de la droite,

$$z = z_0 + l\omega$$

$l$ étant une variable réelle, et

$$u = e^{\frac{i\pi z_0}{\omega}} e^{i\pi l} \qquad \text{d'où} \qquad |u| = \left|e^{\frac{i\pi z_0}{\omega}}\right| = C^{te}$$

donc $\mu$ se déplacera sur un cercle $\lambda$ ayant le point 0 pour centre. – Si $L$ se déplace parallèlement à elle-même de $D$ en $D'$, le cercle $\lambda$ se




dilatera de manière à engendrer une couronne circulaire limitée par les deux cercles C et C' qui correspondent à D et D'.

Soit alors une fonction $f(z)$ holomorphe dans la bande $DD'$; posons $u = e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$. A chaque point $u$ situé dans la couronne circulaire correspondra une suite de points $z$ situés dans la bande $DD'$. Mais ces valeurs de $z$ diffèrent entre elles par des multiples de $2\omega$, $f(z)$ aura une valeur unique et bien déterminée. En d'autres termes $f(z)$ sera une fonction uniforme de $u$; on voit immédiatement que cette fonction est continue et analytique; en résumé c'est une fonction holomorphe de $u$ dans la couronne circulaire $cc'$. En lui appliquant le théorème de Laurent on obtient la proposition suivante:

**Théorème.** — Lorsqu'une fonction qui admet la période $2\omega$ est holomorphe dans la bande limitée par deux droites parallèles, de même argument que cette période, on peut dans cette bande la représenter par une série dont les termes sont des puissances entières positives ou négatives de $e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$.

La série ainsi obtenue est la série de Fourier; on a:

$$(8) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}$$

Si on y réunit les deux termes

$$A_n e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} + A_{-n} e^{\frac{-n\pi z i}{\omega}}$$

et qu'on tiennent compte des formules

$$e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = \cos\frac{n\pi z}{\omega} + i\sin\frac{n\pi z}{\omega} \qquad e^{-\frac{n\pi z i}{\omega}} = \cos\frac{n\pi z}{\omega} - i\sin\frac{n\pi z}{\omega}$$

on peut écrire la série de Fourier sous la forme:

$$(9) \qquad f(z) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi z}{\omega} + a_2\cos\frac{2\pi z}{\omega} + \dots\dots + a_n\cos\frac{n\pi z}{\omega} + \dots$$
$$+ b_1\sin\frac{\pi z}{\omega} + b_2\sin\frac{2\pi z}{\omega} + \dots + b_n\sin\frac{n\pi z}{\omega} + \dots$$

## III. — Points singuliers essentiels

— Revenons à la série de Laurent sous la forme (6) ou (7). — Si nous faisons décroître le rayon de cercle intérieur C', tant que la circonférence ne franchira aucun point singulier, la formule (6) sera applicable, et les valeurs des coefficients B fournies par les formules (5) ne varieront pas; si on franchit un point singulier, il

faudra immédiatement faire décroître la circonférence extérieure $C$ pour le lui faire franchir également ; on aura alors une nouvelle couronne donnant lieu à un développement de Laurent et comprise entre deux cercles $c, c'$ ; les intégrales (3) et (5) qui fourniront les nouveaux coefficients seront prises les unes le long de $c$, les autres le long de $c'$, et leurs valeurs seront en général modifiées, la fonction $f(z)$ n'étant pas holomorphe entre $C'$ et $C'_1$. Ainsi chaque fois qu'on fera sortir un point singulier, on aura un nouveau développement de Laurent modifié à la fois dans la partie entière et dans la partie fractionnaire.

Supposons alors que le point 0, singulier ou non, soit isolé de tout point singulier, on arrivera finalement à une couronne contenue tout entière dans le domaine du point 0, et dont on pourra faire varier les deux rayons sans rien changer à la valeur des coefficients A, B ; on aura dans ce domaine.

$$(10) \qquad f(z) = F(z) + G\left(\frac{1}{z}\right)$$

$G$ étant ce que nous appellerons la fonction caractéristique du point 0. $G\left(\frac{1}{z}\right)$ étant convergente désormais dans un cercle de rayon aussi petit que l'on voudra, on en conclut que la fonction $G(\zeta)$ est holomorphe pour toutes les valeurs possibles de $\zeta$ ; donc c'est une fonction entière. — Ainsi la fonction caractéristique de $f(z)$ relative à un point isolé est une fonction entière de $\frac{1}{z}$. Cette fonction ne contient pas de terme indépendant de $z$. Il peut alors se présenter trois cas :

1° $G$ se réduit à zéro. La série de Laurent, dans le domaine du point 0, se réduit à la partie entière, le point 0 est donc un point ordinaire.

2° $G$ est un polynôme de la forme :

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{z^p}.$$

0 est alors un pôle de degré $p$

3° $G$ est une fonction entière et transcendante

$$\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{z^p} + \cdots\cdots$$

Le point 0 est alors ce qu'on appelle un point singulier essentiel. Pour nous rendre compte de ce qui se passe dans le voisinage d'un pareil point, considérons la fonction.

$$\frac{1}{f(z) - \alpha}$$

$\alpha$ étant une constante arbitraire. Cette fonction a le point 0 comme

point singulier essentiel ; ce n'est pas en effet un point singulier ordinaire, sinon 0 serait un pôle de $f(z)-\alpha$ et par suite de $f(z)$ ; ce n'est pas un pôle car $f(z)-\alpha$ et par suite $f(z)$ serait holomorphe au point 0. D'après cela, nous pourrons poser :

$$\frac{1}{f(z)-\alpha} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots\cdots = \varphi(z) + G\left(\frac{1}{z}\right)$$

Décrivons autour de 0 un cercle de rayon $\rho$ aussi petit qu'on voudra, on pourra choisir $\rho$ assez petit pour avoir dans tout ce cercle $|\varphi(z)-A_0| < \varepsilon$, $\varepsilon$ étant un nombre positif quelconque ; d'autre part, d'après le théorème de Liouville sur les fonctions entières, $G\left(\frac{1}{z}\right)$ devient infini avec $\frac{1}{z}$ ; il y a donc des valeurs de $z$ dans le cercle de rayon $\rho$ pour lesquelles $\left|G\left(\frac{1}{z}\right)+A_0\right| > \frac{1}{\varepsilon'}$ ; on aura alors pour ces valeurs de $z$

$$\left|\frac{1}{f(z)-\alpha}\right| > \frac{1}{\varepsilon'} - \varepsilon \qquad |f(z)-\alpha| < \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon\varepsilon'}$$

On en conclut que dans le voisinage du point 0, la fonction s'approche autant qu'on veut de toute grandeur donnée à l'avance. Ce genre d'indétermination caractérise les points singuliers essentiels. On peut en s'appuyant sur le théorème de Mr Picard donner un résultat plus précis encore et démontrer que la fonction prend une infinité de fois, dans le voisinage d'un tel point, une valeur arbitraire $\alpha$ donnée. — Il ne peut y avoir exception que pour deux valeurs au plus de $\alpha$ (Picard. Mémoire sur les fonctions entières.)

Par exemple, la fonction

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{z^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{z^n} + \cdots$$

est absolument indéterminée au point 0. — Elle peut prendre aux environs de ce point toutes les valeurs possibles, sauf la valeur zéro. On peut le vérifier aisément dans ce cas particulier ; on a en effet, en posant :

$$e^{\frac{1}{z}} = re^{\theta i} \qquad z = x+iy \qquad (r \neq 0)$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = Lr \qquad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \theta + 2k\pi$$

Il existe évidemment une infinité de valeurs de $k$ pour lesquelles le point ainsi déterminé est compris dans un cercle de rayon $\rho$ décrit de l'origine comme centre et cela quelque petit que soit $\rho$.

**IV. Autres singularités.** — Dans l'étude des fonctions uniformes que nous avons à faire, nous nous limiterons au cas où il n'y a que des singularités isolées ; nous ne pourrons dès lors rencontrer à distance finie que des pôles ou des points essentiels, à chacun desquels sera attachée une fonction caractéristique de la forme $G\left(\frac{1}{z}\right)$ ($G$ étant le symbole d'une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan). Il est bon cependant de remarquer que ces singularités ne sont pas les seules qu'on pourrait rencontrer ; nous allons énumérer quelques uns des cas qui peuvent se présenter.

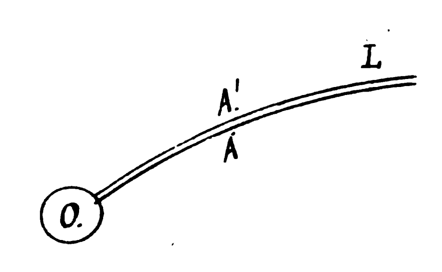
1°. — Points singuliers de classe supérieure. — Lorsque les points singuliers de $f(z)$ formeront un ensemble infini $E$, il y aura à distance finie ou infinie, un ou plusieurs points limites constituant l'ensemble dérivé $E'$. — Chacun de ces points sera un point singulier puisqu'on ne pourra l'isoler de tout point singulier ; nous dirons que les points de $E'$ sont des points singuliers essentiels de seconde classe. Nous avons vu par exemple que les zéros de $\sin\frac{1}{z}$ forment un ensemble ayant pour ensemble dérivé $0$ ; ce point $0$ est donc, pour la fonction $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, le point limite d'un ensemble de pôles ; c'est par suite un point singulier de seconde classe.

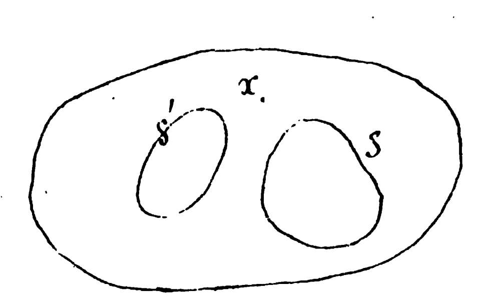
De même la fonction $\cot z$ admet une infinité de pôles donnés par par la formule $z = k\pi$ ; l'ensemble dérivés de ces valeurs de $z$ se réduit au point $\infty$ ; le point $\infty$ est donc un point de seconde classe pour $\cot z$.

Il est clair que les points de seconde classe peuvent être en nombre infini ; les points limites correspondants seront des points de troisième classe, et ainsi de suite (Mittag-Leffler. Comptes rendus 1882).

Ajoutons qu'il existe des points singuliers qui ne rentrent pas dans la classification précédente.

2°. Lignes singulières : — Il peut y avoir des lignes entières, le long desquelles la fonction cesse d'être holomorphe. Un premier exemple très simple est fourni par les coupures qui nous ont servi (page 16) à uniformiser les déterminations d'une fonction multiforme. Prenons par exemple la fonction $\sqrt{z}$ ; si nous introduisons une coupure indéfinie $OL$ et la condition de se réduire à $+1$ pour $z = 1$, la fonction $\sqrt{z}$ est uniforme. Or si on considère des points $A$, $A'$ situés sur les deux bords opposés de la coupure et à la même distance du point $O$, il est évident que la fonction prend en ces deux points des valeurs égales et de signes contraires, bien que ces deux points soient infiniment voisins, donc chaque point de $OL$ est un point de discontinuité et $OL$ est une ligne singulière de notre fonction.






Le théorème de Cauchy fournit un autre exemple très remarquable ; soient des aires $S, S'$ fermées, $x$ un point du plan : $f(z), f_1(z)$ étant supposées holomorphes dans une aire $\Sigma$ qui enveloppe les premières, si on pose :

$$F(x) = \int_{(S)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz + \int_{(S')} \frac{f_1(z)}{z-x}\, dz$$

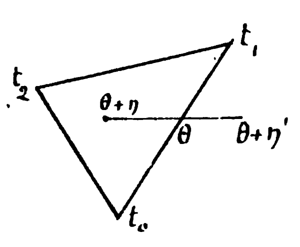
($F(x)$ sera une fonction ayant une valeur unique en chaque point de $\Sigma$ c'est donc une fonction uniforme ; or cette fonction est nulle si $x$ est en dehors des deux aires $S$ et $S'$ ; elle est égale à $2i\pi f(x)$ si $x$ est dans $S$, à $2i\pi f_1(x)$ si $x$ est dans $S'$. — Le long des lignes elles-mêmes elle cesse d'avoir un sens, la fonction à intégrer devenant infinie sur le contour d'intégration. Les lignes $S, S'$ sont donc des lignes singulières de $F(x)$.

Nous mentionnerons encore un exemple de lignes singulières signalées par Mr Hermite (Lettre à Mr Mittag-Leffler) ; La démonstration suivante est due à Mr Goursat (Acta. Mat. Tome I page 189)

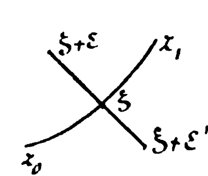
Soient $G(z,t)$ $G_1(z,t)$ deux fonctions holomorphes des deux variables $z, t$ ; l'intégrale rectiligne

$$F(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{G(z,t)}{G_1(z,t)}\, dt$$

est une fonction uniforme de $z$ qui présente une ou plusieurs lignes singulières. — Nous nous contenterons d'examiner le cas où $G_1$ est un polynôme entier de degré $p$ par rapport à $z$ ; si on donne à $t$ une valeur $\theta$ située sur la droite $t_0 t_1$, l'équation $G_1(z,t)=0$ admet $p$ racines $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$ ; nous démontrerons que si $\theta$ se déplace d'une manière continue sur $(t_0\, t_1)$ chacun des point $\zeta$ décrit un arc de courbe continue $(z_0\, z_1)$ ; cette courbe est une ligne singulière, car en chacun de ses points (sauf ceux pour lesquels $G$ et $G_1$ pourraient avoir une racine commune comprise sur $t_0\, t_1$), l'intégrale cesse d'avoir un sens.




Cherchons quelle est la nature de la singularité. Soit $\zeta$ un point de la courbe, $\theta$ le point correspondant sur $(t_0\, t_1)$ ; sur la normale prenons des points infiniment voisins et de part et



d'autre de $\zeta, \zeta+\mathcal{E}, \zeta+\mathcal{E}'$. — Supposons, pour plus de netteté, que $G_1$ soit du premier degré par rapport à $t$; à chaque valeur de $\zeta$ correspondra un point unique $\theta$, tel que $G_1(\zeta, \theta)=0$. A des points $\zeta+\mathcal{E}, \zeta+\mathcal{E}'$ correspondront des points $\theta+\eta$, $\theta+\eta'$, infiniment voisins et séparés par le point $\theta$. Nous pourrons en outre déterminer un point $t_2$ tel que dans le triangle $t_2\, t_1\, t_0$ l'équation $G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)=0$ n'ait aucune autre racine que $\theta+\eta$; alors la fonction de $t$

$$\frac{G(\zeta+\mathcal{E}, t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)}$$

n'aura, dans ce triangle qu'un seul pôle $\theta+\eta$; on pourra donc l'écrire:

$$\frac{G(\zeta+\mathcal{E}, t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)} = \frac{H(\zeta+\mathcal{E}, t)}{t-\theta-\eta}$$

$H(\zeta, t)$ étant holomorphe par rapport à $t$ dans le triangle; appliquons le théorème de Cauchy au contour total $t_0\, t_1\, t_2$; nous aurons:

$$2i\pi H(\zeta+\mathcal{E}, \theta+\eta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{G(\zeta+\mathcal{E}, t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{G(\zeta+\mathcal{E}, t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)}\, dt + \int_{t_2}^{t_0} \frac{G(\zeta+\mathcal{E}, t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}, t)}\, dt$$

les trois intégrales étant rectilignes. Si nous posons alors:

$$F_1(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{G(z, t)}{G_1(z, t)}\, dt \qquad F_2(z) = \int_{t_2}^{t_0} \frac{G(z, t)}{G_1(z, t)}\, dt$$

nous aurons:

$$2i\pi H(\zeta+\mathcal{E}, \theta+\eta) = F(\zeta+\mathcal{E}) + F_1(\zeta+\mathcal{E}) + F_2(\zeta+\mathcal{E})$$

Si nous donnons au contraire à $z$ la valeur $\zeta+\mathcal{E}'$, la fonction

$$\frac{G(\zeta+\mathcal{E}', t)}{G_1(\zeta+\mathcal{E}', t)}$$

n'aura aucun pôle dans le triangle $t_0\, t_1\, t_2$, elle sera donc holomorphe et nous aurons toujours à cause du théorème de Cauchy

$$0 = F(\zeta+\mathcal{E}') + F_1(\zeta+\mathcal{E}') + F_2(\zeta+\mathcal{E}')$$

Retranchons:

$$F(\zeta+\mathcal{E}) - F(\zeta+\mathcal{E}') = 2i\pi H(\zeta+\mathcal{E}, \theta+\eta) + F_1(\zeta+\mathcal{E}') - F_1(\zeta+\mathcal{E}) + F_2(\zeta+\mathcal{E}') - F_2(\zeta+\mathcal{E})$$

Faisons enfin tendre $\mathcal{E}$, et $\mathcal{E}'$ vers $0$; comme chacune des fonctions $F_1\, F_2\, H$ est holomorphe pour $z=\zeta$, on a:

$$\lim \left[F(\zeta+\mathcal{E}) - F(\zeta+\mathcal{E}')\right] = 2i\pi H(\zeta, \theta)$$

Donc, quand on s'approchera d'un point de la ligne $(z_0\, z_1)$ la fonction $F(z)$ tendra vers une une valeur ou vers une autre suivant qu'on sera d'un côté ou de l'autre de cette coupure, et la différence des valeurs limites sera $2i\pi\, H(\zeta, \theta)$

3°. — Espaces lacunaires. — Enfin il peut arriver qu'une fonction cesse d'être holomorphe pour tous les points contenus dans une aire $K$; cette

aire forme ce qu'on appelle un espace lacunaire. — Nous renverrons sur ce point au cours de M.r Hermite (4.e édition pages 167 et s.)

Il est bien entendu que nous nous limiterons au cas où la fonction ne cesse d'être holomorphe qu'en des points isolés, sauf à l'infini, la fonction ne pourra alors présenter, à distance finie que des pôles ou des points singuliers essentiels de 1.ère classe.

V. — Théorie des résidus. — La fonction $f(z)$ dans le voisinage d'un point quelconque peut être mise sous la forme

$$f(z) = F(z) + \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \dots$$

$F(z)$ étant holomorphe dans ce domaine, et la série étant convergente pour toute valeur de $z-a$. Le premier coefficient $A_1$ est appelé par Cauchy le résidu de $f(z)$ relatif au point $a$. Considérons une aire fermée dont le contour $C$ ne passe par aucun point singulier, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$J = \int_{(c)} f(z)\, dz$$

Soient $a_1, a_2 \dots a_p$ les points singuliers, en nombre nécessairement fini, contenus dans $S$, $G_1, G_2 \dots G_p$ les fonctions caractéristiques correspondantes; la fonction

$$f(z) - G_1 - G_2 - \dots - G_p$$

est évidemment holomorphe dans toute l'aire $S$; le raisonnement est le même que dans le cas où $a_1, a_2 \dots a_p$ seraient tous des pôles. — On a donc l'expression analytique suivante de $f(z)$

$$(11) \qquad f(z) = \varphi(z) + G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right).$$

c'est la généralisation d'une formule donnée pour le cas des fonctions méromorphes.

On aura alors:

$$\int_{(c)} f(z)\, dz = \int_{(c)} \varphi(z)\, dz + \sum_{n=1}^{n=p} \int_{(c)} G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) dz$$

La première intégrale est nulle, $\varphi(z)$ étant holomorphe. Prenons maintenant une intégrale de la forme:

$$\int_{(c)} G\left(\frac{1}{z-a}\right) dz.$$

On peut écrire, $\psi(z)$ étant une fonction entière:

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right) = \frac{A}{z-a} + \frac{1}{(z-a)^2}\cdot\Psi\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

Faisons la substitution :

$$\frac{1}{z-a} = \zeta \qquad dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

on aura

$$\int_{(c)} G\left(\frac{1}{z-a}\right) dz = A\int_{(c)} \frac{dz}{z-a} + \int_{(c_1)} -\Psi(\zeta)\, d\zeta$$

$c_1$ étant la courbe transformée de $C$ ; la dernière intégrale du deuxième membre est nulle, $\Psi(\zeta)$ étant une fonction entière de $\zeta$ ; quant à la première ; elle est égale à $2\pi i A$. On a donc en résumé le théorème suivant :

**Théorème.** — L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'une courbe fermée dans l'intérieur de laquelle $f(z)$ n'a que des points singuliers isolés est égale à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus correspondants.

Dans le cas particulier où $f(z)$ est méromorphe, la dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est elle-même méromorphe ; elle admet comme pôles simples tous les zéros et tous les pôles de $f(z)$ et chaque résidu est égal à l'ordre correspondant. Si donc on applique à cette fraction le théorème précédent, on est conduit immédiatement à la proposition suivante :

**Théorème.** — La somme des ordres d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans une aire $S$, dont le contour $C$ ne passe par aucun zéro ni aucun pôle, est égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Il est aisé de voir que ce théorème ne diffère pas de celui que nous avons obtenu dans la dernière leçon. Si en effet, on pose :

$$f(z) = Re^{\theta i}, \text{ on a } \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = d.L\,r + i\,d\theta$$

On en conclut :

$$\int_{(c)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{(c)} d.L\,R + i\int_{(c)} d\theta$$

dans le second membre la première intégrale est évidemment nulle, $L.R$ étant susceptible d'une seule et unique valeur en chaque point de $C$ ; quant à la seconde, elle est égale à la variation d'argument de $f(z)$ c'est-à-dire à $2k\pi$ ; on retombe ainsi sur le théorème donné dans la dernière leçon.

Comme application, nous démontrerons ici un théorème dont nous aurons besoin dans la suite :

**Lemme.** — Les deux fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ étant holomorphes dans l'aire

limitée par un contour fermé C, si le rapport $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ conserve un module inférieur à l'unité sur tout le contour, le nombre des zéros contenus dans cette aire sera le même pour les deux fonctions $f(z)$ et $f(z)+\varphi(z)$.

Si en effet on désigne par $\mu$ le nombre des zéros de $f(z)$ par $\mu_1$, celui de $f(z)+\varphi(z)$, on a :

$$2i\pi(\mu_1-\mu) = \int_{(c)} \left\{ d\,L\left[f(z)+\varphi(z)\right] - d\,L\,f(z) \right\} = \int_{(c)} d.\,Log.\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

Comme $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$ sur le contour, la parenthèse ne s'annule en aucun point de C ; le logarithme est donc une fonction uniforme le long de ce contour et l'intégrale est nulle ; on a donc

$$\mu_1 = \mu$$

ce que nous voulions prouver. Remarquons que ce théorème est vrai dans le cas où $f$ et $\varphi$ seraient des fonctions méromorphes ; ce serait alors la somme des ordres qui serait égale pour les fonctions $f$ et $f+\varphi$ ; il est clair qu'on supposerait alors que le contour C ne passe par aucun pôle ni aucun zéro des fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$.

Voici maintenant le théorème que nous voulons démontrer :

**Théorème.** – Si la fonction $f(z)$ est uniforme dans tout le plan, et si l'équation $f(z)=b$ n'admet, quelque soit $b$, qu'un nombre limité de racines, $f(z)$ se réduit à une fraction rationnelle.

Supposons en effet que $f(z)=b$ n'admette jamais, quelque soit $b$, plus de $p$ racines et supposons qu'elle en admette $p$ pour une certaine valeur de $b$ ; je dis d'abord qu'elle en admettra toujours $p$. Soient en effet $z_1 z_2 \ldots z_p$ les racines de $f(z)=b$. Entourons les points correspondants de cercles $C_1, C_2 \ldots C_p$, qui isolent chacun d'eux de tous les autres ; nous supposerons de plus que la fonction $f(z)-b$ ne s'annule sur aucune des circonférences $C_1 C_2 \ldots C_p$. Soit $\delta$ le module minimum de $f(z)-b$ sur tous ces cercles, nous pourrons déterminer une quantité $b'$ telle qu'on ait

$$|b'-b| < \delta$$

Mais alors, si on pose :

$$F(z) = f(z)-b \quad \varphi(z) = b'-b$$

$b$ n'aura, sur chacune des circonférences considérées

$$\left|\frac{\Phi(z)}{F(z)}\right| = \left|\frac{b'-b}{f(z)-b}\right| < \left|\frac{b'-b}{\delta}\right| < 1$$

Donc les deux équations $f(z)=b$, $f(z)=b'$, auront le même nombre de racines dans chaque cercle $C_i$ le nombre total des racines, chacune étant comptée selon son degré de multiplicité, ne pourra donc pas changer quand on passera d'une valeur de $b$ à une valeur infiniment voisine $b'$, ni par

suite à une valeur quelconque.

Ceci posé, supposons que $f(z)$ admette un point singulier essentiel $\underline{a}$; traçons autour de $\underline{a}$ un cercle $C$ qui l'isole des points $z_1 z_2 \ldots z_p$, où $f(z)$ prend la valeur $b$. Il est clair que $a$ sera un point essentiel pour $\frac{1}{f(z)-b}$, il y aura donc certainement dans $\underline{C}$, au moins un point $\zeta$ tel que l'on ait (II, page 64).

$$\left|\frac{1}{f(\zeta)-b}\right| > \frac{1}{\delta} \quad d'où \quad |f(\zeta)-b| < \delta$$

Posons $f(\zeta) = b'$, nous aurons $|b'-b| < \varepsilon$; d'après ce qui précède l'équation $f(z) = b'$ aura, dans les cercles $C_1 C_2 \ldots C_p$, un nombre total de racines égal à $p$; mais il y aura en outre la racine $z = \zeta$, et elle est nécessairement distincte des autres, puisqu'elle est à l'intérieur de $C$. — Il y a là une contradiction avec ce que nous avons vu plus haut.

Donc la fonction ne peut avoir aucun point singulier essentiel à distance finie.

Si maintenant le point $\infty$ était un point essentiel, nous remplacerions le cercle $C$ par un cercle $C'$ décrit de l'origine comme centre et englobant $C_1 C_2 \ldots C_n$, nous arriverions à un résultat contradictoire comme tout à l'heure, $\zeta$ devant maintenant être extérieur à $C'$. — En résumé $f(z)$ ne pouvant avoir aucun point singulier essentiel ni à distance finie, ni à l'infini, sera une fonction rationnelle, ce qu'il fallait prouver. (II, page 59).

**VI – Théorème de Riemann** — Lorsque deux fonctions **U** et **V** sont uniformes dans une aire $S$, si elles coïncident le long d'un élément fini $ab$, elles coïncident dans l'aire tout entière.

M.r Picard a donné de ce théorème la démonstration suivante: Isolons l'élément $ab$ de tous les points singuliers de $U$ ou de $V$ en l'entourant d'une aire $S'$. La fonction $U-V$ est uniforme dans $S$, et holomorphe dans $S'$; d'ailleurs puisqu'elle est nulle le long de $ab$, elle est nulle dans l'aire $S'$ tout entière. Ceci posé, faisons varier $S'$ de telle sorte que son contour vienne passer très-près d'un point singulier $\underline{a}$ de $U$ ou de $V$; cherchons ce que peut être $a$ pour la fonction $U-V$. Si ce n'était pas un point ordinaire, ce ne pourrait être qu'un pôle ou un point singulier essentiel; dans l'un et l'autre cas, il y aurait dans le voisinage de $a$, au moins un point regulier $z_0$ pour lequel on aurait $|U-V| \geqq A$, $A$ étant un nombre positif arbitraire. — Or on pourrait englober ce point $z_0$ dans l'aire $S'$ sans atteindre $a$. La fonction $U-V$ constamment nulle dans $S'$ prendrait en $z_0$ une valeur de module supérieur à $A$; il y a là une contradiction; donc $a$ n'est ni un pôle ni

un point essentiel de $U-V$; donc c'est un point ordinaire. Il en résulte que $U-V$ n'a aucun point singulier dans $S$. C'est donc une fonction holomorphe, et comme elle est nulle le long de $ab$ elle est nulle dans l'aire entière.

# Huitième Leçon.

## Représentation analytique des fonctions uniformes.

### I. – Sur les séries uniformément convergentes. –

Nous avons obtenu précédemment sous diverses formes l'expression analytique d'une fonction uniforme dans une aire donnée $S$ où elle n'admet que des discontinuités polaires ou essentielles en nombre fini. Nous avons maintenant à chercher l'expression générale des fonctions uniformes qui admettent une infinité de singularités; pour cela nous avons besoin de certaines propriétés des séries dont les termes sont des fonctions de $z$, et nous devons d'abord compléter ce que nous avons dit des séries de cette nature.

**Théorème I** – Lorsqu'une série

$$(1) \qquad f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots f_n(z) + \cdots$$

dont les termes sont holomorphes dans une aire $S$, converge uniformément dans cette aire, la série

$$(2) \qquad \int_{(AB)} f_1(z)\,dz + \int_{(AB)} f_2(z)\,dz + \cdots + \int_{(AB)} f_n(z)\,dz + \cdots$$

où les intégrales sont prises le long d'un même chemin $AB$ complètement intérieur à $S$, est convergente et a pour somme

$$\int_{(AB)} f(z)\,dz.$$

Nous savons en effet que $f(z)$ est continue dans $S$. On peut donc intégrer cette fonction le long du contour $AB$. Or, soit $I_\mu$ l'intégrale de rang $\mu$ dans la série (2), on a :

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_{(AB)} S_n(z)\,dz.$$

$S_n$ étant la somme des $n$ premiers termes de la série (1). Cette série (1) étant uniformément convergente, si on se donne un nombre positif $\varepsilon$,

il existera un entier $p$ tel que pour $n \geq p$ on ait, quel que soit $z$

$$f(z) - S_n(z) = \varphi_n(z)$$

$|\varphi_n(z)|$ étant moindre que $\mathcal{E}$; $n$ étant déterminé de cette manière nous aurons :

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n - \int_{(AB)} f(z)\,dz = -\int_{(AB)} \varphi_n(z)\,dz .$$

Or, le second membre a un module inférieur à $l\mathcal{E}$, $l$ étant la longueur du contour $AB$ ; donc la série (2) est convergente et a pour somme $\int_{(AB)} f(z)\,dz$, ce qu'il fallait prouver.

**Théorème II.** – Soit une série convergente

$$(1) \qquad f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots\dots + f_n(z) + \dots\dots$$

dont les termes sont holomorphes dans l'aire $S$ : si la série des dérivées :

$$(2) \qquad f'_1(z) + f'_2(z) + \dots\dots + f'_n(z) + \dots\dots$$

est uniformément convergente dans l'aire $S$, $f(z)$ sera holomorphe et aura pour dérivée la somme de la série (2).

En effet, soit $\varphi(z)$ la somme de la série (2) ; les fonctions $f_1(z)$ ... $f_n(z)$, étant holomorphes dans $S$ il en sera de même de leurs dérivées, nous pourrons donc appliquer le théorème précédent à cette série (2), et nous aurons :

$$(3) \qquad \int_{(AB)} \varphi(z)\,dz = \int_{(AB)} f'_1(z)\,dz + \dots\dots + \int_{(AB)} f'_n(z)\,dz +$$

Si nous désignons par $a, x$, les affixes des points $A, B$, extrémités du contour, nous aurons en général :

$$\int_{(AB)} f'_n(z)\,dz = f_n(x) - f_n(a)$$

et l'équation (3) pourra s'écrire :

$$\int_a^x \varphi(z)\,dz = f(x) - f(a)$$

D'où en dérivant les deux termes par rapport à $x$ supposé variable

$$\varphi(x) = f'(x)$$

ce qui démontre le théorème.

A ces deux théorèmes qui sont d'un usage continuel, nous ajouterons enfin le suivant qui se rattache d'une façon plus particulière au problème que nous nous sommes posé.[1]

---

[1] P. Painlevé. – Lignes singulières des fonctions analytiques. – (page 11)

Théorème III. — Lorsqu'une série

(1) $$f_1(z) + f_2(z) + \cdots\cdots + f_n(z) + \cdots\cdots$$

a pour termes des fonctions holomorphes dans une aire $S$, et continues sur son contour, si cette série converge uniformément sur le contour de l'aire.

1°. — Elle est convergente en tout point intérieur à $S$; et il en est de même de la série formée par les dérivées d'un même ordre quelconque.

2°. — La somme est holomorphe dans $S$, et sa dérivée d'ordre $k$, s'obtient en dérivant $k$ fois les termes de la série (1)

Soit en effet, $C$ le contour de l'aire; traçons un autre contour quelconque $C'$ complètement intérieur à $S$ et n'ayant aucun point commun avec $C$; soit $x$ l'affixe d'un point pris à l'intérieur de $C'$; soit enfin $\delta$ la plus courte distance des deux contours $C$ et $C'$. Lorsque la variable $z$ décrira le contour $C$, on aura constamment $|z-x| < \delta$ et cette inégalité s'étendra à toutes les valeurs de $x$ intérieures à $C$.

Ceci posé, la série (1) est par hypothèse, uniformément convergente le long de $C$; si on se donne un nombre positif $\varepsilon$, on pourra trouver un entier $p$ tel que l'on ait pour $n \geqslant p$, et quel que soit $q$:

(2) $$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots + f_{n+q}(z)| < \varepsilon$$

et cela quelle que soit la position de $z$ sur $C$. Considérons alors la série:

(3) $$\int_{(c)} \frac{f_1(z)}{(z-x)^{k+1}} dz + \int_{(c)} \frac{f_2(z)}{(z-x)^{k+1}} dz + \cdots\cdots + \int_{(c)} \frac{f_n(z)}{(z-x)^{k+1}} dz + \cdots\cdots$$

Si nous représentons par $u_1\, u_2 \ldots\ldots u_n$ ses termes nous aurons:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{n+q} = \int_{(c)} \frac{f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots\cdots + f_{n+q}(z)}{(z-x)^{k+1}} dz$$

Mais à partir des valeurs de $n$ que nous considérons, le numérateur de l'intégrale, quel que soit $q$, a un module moindre que $\varepsilon$, la fonction sous le signe $\int$ a donc un module moindre que $\frac{\varepsilon}{\delta^{k+1}}$. On a donc, quel que soit $q$:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{n+q}| < \frac{l\varepsilon}{\delta^{k+1}}$$

$l$ étant la longueur du contour $C$. — On en conclut évidemment que la série (3) converge uniformément à l'intérieur de $C'$.

Or le terme de rang $n$ dans cette série a pour valeur $\frac{2i\pi f_n^{(p)}(x)}{1.2\ldots p}$. nous désignerons sa somme par $\frac{2i\pi\, \varphi_p(x)}{1.2\ldots p}$, en sorte que nous aurons:

$$\varphi_p(x) = f_1^{(p)}(x) + f_2^{(p)}(x) + \cdots\cdots + f_n^{(p)}(x) + \cdots\cdots$$

Si en particulier, on fait $p=0$, $p=1$, on obtient les deux séries :

$$\varphi_0(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

$$\varphi_1(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots$$

Si on reste dans le contour $C'$, la dernière série étant uniformément convergente, a pour somme la dérivée de $\varphi_0(x)$ d'après le théorème précédent ; donc $\varphi_0(x)$ est holomorphe et a pour dérivée $\varphi_1(x)$. On voit alors de proche en proche que $\varphi_0^{(p)}(x) = \varphi_p(x)$, et le théorème est complètement démontré.

**II – Théorème de M. Mittag-Leffler[1]** – Nous abordons maintenant le problème que nous nous sommes posé : trouver l'expression générale des fonctions uniformes qui n'ont, à distance finie que des discontinuités isolées. – Soient $a_1, a_2 \dots a_n \dots$ les différents points singuliers de la fonction ; comme ils sont isolés, chacun d'eux est un pôle ou un point singulier essentiel de première classe ; en d'autres termes à chaque point $a_p$ correspond une fonction caractéristique $G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right)$, $G$ étant le symbole d'une fonction entière sans terme constant. Le théorème de M. Mittag Leffler peut s'énoncer ainsi :

**Théorème** – On peut toujours, étant donné un ensemble de points $a_1$ $a_2 \dots a_n \dots$ et une suite de fonctions entières $G_1\ G_2 \dots G_n \dots$ constituer une fonction uniforme $F(z)$ qui soit holomorphe dans tout le plan, en dehors des points $a_1\, a_2 \dots a_n \dots$, et qui admette ces points comme points singuliers, chacun d'eux étant caractérisé par la fonction $G$ correspondante.

Le théorème est d'abord évident si le nombre des points $a$ est fini et égal à $p$ ; la fonction :

$$F(z) = G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right).$$

répond évidemment à la question. – Nous avons donc à nous occuper seulement du cas où il y a une infinité de points $a$. En pareil cas, nous pouvons supposer les indices rangés par ordre de modules croissants ou stationnaires ; l'ensemble des points $a$, ne pouvant d'après notre hypothèse, avoir d'autre point limite que le point $\infty$, il y aura un nombre limité de ces points dans tout cercle de rayon $R$ et sur son contour, quelque grand que soit $R$ ; donc $|a_n|$ devra devenir infini avec $n$.

Nous supposerons d'abord que le point $0$ ne fait pas partie des points $a$. Ceci posé, considérons une fonction $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$, et soit $0 < \theta < 1$ ; On a :

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} - \frac{z^2}{a^3} - \dots\dots$$

---

(1) Mittag-Leffler. – Représentation analytique des fonctions monogènes uniformes A. M. Tome IV, page 8.

et ce développement est valable pour toutes les valeurs telles que $\left|\frac{z}{a}\right| < \theta$ ; donc dans ces conditions, $\frac{1}{z-a}$ est une fonction holomorphe de $\frac{z}{a}$, il en est alors de même de $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$; donc $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ se développera en série entière de la forme

$$G\left(\frac{1}{z-a}\right) = A_0 + A_1 \frac{z}{a} + A_2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \dots \dots \qquad \left|\frac{z}{a}\right| < 1$$

La série du second membre est uniformément convergente dans les limites considérées ; si donc on se donne un nombre $\varepsilon$, arbitraire, il existera un nombre $K$, tel que l'on ait :

$$\left| G\left(\frac{1}{z-a}\right) - P\left(\frac{z}{a}\right)\right| < \varepsilon.$$

en désignant par $P$ le polynôme formé par les $n$ premiers termes de la série, $n$ étant choisi arbitrairement parmi les nombres entiers au moins égaux à $K$. Le nombre $\theta$ étant choisi une fois pour toutes, faisons correspondre aux points $a_1\, a_2 \dots\dots a_n \dots\dots$ une suite de nombres positifs $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \dots\dots \varepsilon_n \dots\dots$ formant une série convergente ; déterminons pour chaque point $a_i$ le polynôme $P_i$ qui correspond à $\varepsilon_i$, et posons :

$$\varphi_1(z) = G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) - P_1\left(\frac{z}{a_1}\right) \dots\dots\dots\dots \varphi_n(z) = G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - P_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \dots$$

Nous allons démontrer que la série

$$(4) \qquad \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \dots\dots\dots\dots + \varphi_n(z) + \dots\dots\dots$$

définit une fonction $F(z)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

Soit en effet, $x$ un point quelconque du plan, ne coïncidant avec aucun des points $a$ ; de ce point comme centre décrivons un cercle $C$ ne contenant aucun de ces points. Si on joint le point $x$ à chacun des points $a_1\, a_2 \dots a_n \dots$ la plus courte distance du cercle à ces différents points devant croître indéfiniment avec $n$, il existera un nombre entier fini $q$ tel qu'on ait $\left|\frac{z}{a_n}\right| < \theta$ pour $n > q$ quelle que soit la position du point $z$ sur la circonférence $C$. On aura alors pour tous ces points :

$$|\varphi_{q+1}(z)| < \varepsilon_{q+1} \quad |\varphi_{q+2}(z)| < \varepsilon_{q+2} \dots\dots |\varphi_{q+m}(z)| < \varepsilon_{q+m}$$

Mais la série des $\varepsilon$ est convergente ; si donc nous nous donnons un nombre $\eta > 0$ quelconque, nous trouverons un entier $h$ tel qu'on ait pour $m \geqslant h$

$$\varepsilon_{q+m} + \varepsilon_{q+m+1} \dots\dots\dots\dots < \eta$$

Donc il existe un nombre $q+h$, tel qu'on ait :

$$|\varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(z) + \dots\dots| < \eta \quad \text{pour } n \geqslant q+h$$

Donc la série (4) est uniformément convergente sur la circonférence $C$; d'ailleurs les fonctions $\varphi$ sont holomorphes dans tout le cercle $C$; donc, d'après le théorème III, la série converge uniformément dans tout ce cercle et en particulier au point $x$; de plus sa somme est holomorphe dans le domaine du point $x$.

Soit $F(z)$ cette somme; nous venons d'établir qu'elle est holomorphe en tout point situé en dehors de l'ensemble $a_1\, a_2 \ldots\, a_n \ldots \infty$. Cherchons ce qui arrive au point $a_p$. En raisonnant comme précédemment sur la série.

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots\cdots + \varphi_{p-1}(z) + \varphi_{p+1}(z) + \cdots\cdots + \varphi_n(z) + \cdots\cdots$$

le point $a_p$ devenant un point étranger à l'ensemble des $a$, on voit que cette série converge au point $a_p$ et définit une fonction holomorphe $\psi(z)$ dans le domaine de ce point; sa somme est: $F(z) - G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right) + P_p\left(\frac{z}{a_p}\right)$.

On a donc, dans le domaine de $a_p$.

$$F(z) = G_p\left(\frac{1}{z-a_p}\right) + \psi(z) - P_p\left(\frac{z}{a_p}\right).$$

Donc $F(z)$ admet bien en chaque point $a$ la singularité caractérisée par la fonction $G$ correspondante. Le théorème est donc complètement démontré.

**Remarque.** — 1°. — Nous avons supposé que $0$ ne se trouvait pas parmi les points $a$; s'il en faisait partie, on constituerait la fonction $F(z)$ en ajoutant en tête de la série (4) la fonction caractéristique correspondante $G_0\left(\frac{1}{z}\right)$.

2°. — Il est bien évident que la fonction $F(z)$ est susceptible d'une infinité de formes, à cause de l'indétermination qui subsiste dans le choix des $\varepsilon$, et dans celui des degrés des polynômes auxiliaires $P$.

**III — Expression générale des fonctions uniformes.** — Toute fonction $f(z)$ uniforme, à singularités isolées, possède un ensemble de points $a$, et de fonctions $G$, analogue à celui que nous venons de considérer. — Nous pouvons donc constituer la fonction $F(z)$ correspondante. — Si on considère alors la différence $f(z) - F(z)$ elle est évidemment holomorphe dans le plan tout entier; si donc on désigne par $G(z)$ une fonction entière quelconque, on aura pour l'expression générale des fonctions uniformes à singularités isolées

$$(5) \qquad f(z) = G(z) + \Sigma\left[G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right]$$

**Remarque** — La série du second membre étant uniformément convergente sur le contour du cercle $C$ considéré plus haut, il résulte

des théorèmes donnés au début de cette leçon que la relation (5) pourra être différentiée un nombre quelconque de fois dans le domaine d'un point déterminé $x$ étranger à l'ensemble $a_1\ a_2 \ldots\ a_n \ldots$ On pourra alors effectuer cette opération dans le plan tout entier; en effet, supposons par exemple qu'on ait dérivé le second membre de la série (5); la série obtenue sera convergente partout, sauf aux points $a$, et aura par suite une somme $f_1(z)$ qui sera uniforme dans tout le plan. — Mais la fonction $f'(z)$ est elle-même uniforme dans tout le plan et coïncide avec $f_1(z)$ dans l'intérieur du cercle; donc on a partout $f'(z) = f_1(z)$ d'après le théorème de Riemann.

Cette remarque très-importante en entraine une autre; s'il arrive que le degré de $P_n$ ne croisse pas indéfiniment avec $n$, on pourra par un nombre fini de dérivations faire disparaître tous les polynômes auxiliaires

## IV – Fonctions fractionnaires

Nous avons appelé fractionnaire, une fonction qui n'a que des pôles; si le point à l'infini est un point ordinaire ou un pôle, nous avons vu que la fonction est une fraction rationnelle. Dans le cas général, le point $\infty$ sera un point singulier essentiel, isolé ou non isolé, suivant que le nombre des pôles sera limité ou non.

Considérons un cas particulier: supposons que chaque pôle est du premier degré; admettons en outre que les résidus soient tous inférieurs en module à un nombre fixe, nous pourrons donner dans ce cas une solution très-simple et un mode régulier de détermination des polynômes $P$.

Supposons d'abord qu'il existe un nombre entier $\mu$ tel que la série

$$\frac{1}{a_1^{\mu}} + \frac{1}{a_2^{\mu}} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n^{\mu}} + \cdots$$

soit absolument convergente; la fonction caractéristique $G_n$ se réduit ici à

$$\frac{A_n}{z-a_n} = -A_n\left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{\mu-2}}{a_n^{\mu-1}}\right) - A_n \frac{z^{\mu-1}}{a_n^{\mu-1}(z-a_n)}$$

Je dis qu'on pourra prendre

$$\varphi_n = A_n \frac{z^{\mu-1}}{a_n^{\mu-1}(z-a_n)} = A_n \frac{z^{\mu-1}}{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)} \cdot \frac{1}{a_n^{\mu}}$$

En effet, reprenons, autour d'un point $x$, une circonférence $C$, ne contenant aucun des pôles; à partir d'une valeur finie $q$ de l'indice, la fraction $A_n \dfrac{z^{\mu-1}}{1-\frac{z}{a_n}}$ considérée sur la circonférence aura un module moindre qu'un nombre convenablement choisi, car elle conserve une valeur finie,

quel que soit $z$ sur $C$, pour $n$ infini. Comme d'ailleurs la série $\left|\frac{1}{a_n^{\mu}}\right|$ est convergente, il en résulte que la série

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots\cdots + \varphi_n + \cdots$$

sera uniformément convergente sur la circonférence $C$; le raisonnement s'achève comme dans le cas général, et la fonction cherchée la plus générale est alors

$$f(z) = G(z) + \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_n(z) + \cdots$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

Exemple. — Supposons qu'on se donne les pôles :

$$z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots \pm n, \ldots$$

qui sont situés sur l'axe des $x$ et qui ont pour affixes la suite des nombres entiers; dans ce cas, la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \cdots$$

étant convergente, on pourra prendre $\mu = 2$, et on aura :

$$\varphi_n(z) = A_n\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right]$$

Le cas particulier où les résidus sont tous égaux à l'unité donne lieu à une fonction que nous représenterons par $\lambda(z)$

$$\lambda(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(en exceptant } n=0\text{)}$$

Nous retrouverons cette fonction $\lambda(z)$ dans la prochaine leçon...

**V**— Passons au cas où il n'existe aucun nombre entier $\mu$ tel que la série

$$\frac{1}{a_1^{\mu}} + \frac{1}{a_2^{\mu}} + \cdots + \frac{1}{a_n^{\mu}} + \cdots$$

soit convergente; alors on doit faire varier le degré du polynôme auxiliaire $P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ avec l'indice du pôle correspondant. Dans ce cas, il suffit de pousser le développement jusqu'au degré $n-1$ exclusivement. On a en effet

$$\frac{1}{z-a_n} = -\left(\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{n-2}}{a_n^{n-1}}\right) + \frac{z^{n-1}}{a_n^{n-1}(a_n-z)}$$

Posons alors :

$$\varphi_n(z) = \frac{A_n z^{n-1}}{a_n^{n-1}(z-a_n)} = \frac{A_n z^{n-1}}{a_n^n\left(\frac{z}{a_n}-1\right)} = \frac{1}{a_n^n}\left(\frac{z^{n-1}A_n}{\frac{z}{a_n}-1}\right)$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment, $z$ restant toujours sur notre cercle $C$, le second facteur reste inférieur à un nombre fixe, indépendant de $z$; d'ailleurs la série dont le terme général est $u_n = \frac{1}{a_n^n}$

est absolument convergente puisque $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{a_n}$ tend vers zéro quand $n$ augmente indéfiniment, et il en résulte évidemment que la série

$$\varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \dots + \varphi_n(z) + \dots$$

est uniformément convergente sur la circonférence $C$.

**Remarque.** — Nous avons supposé que le résidu $A_n$ ne croissait pas indéfiniment avec $n$ : s'il en était autrement, on pourrait encore facilement déterminer le degré du polynôme auxiliaire $P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ ; nous renverrons pour ce point de détail au cours d'analyse de M^r. Hermite (Quatrième édition, page 100). — Ce que nous venons de dire suffira pour les développements que nous avons en vue.

---

# Neuvième Leçon

## Fonctions entières. — Décomposition en facteurs primaires.

**I – Facteurs primaires** — Étant donnée une fonction $f(z)$, holomorphe pour toute valeur finie de $z$, autrement dit une fonction entière, il est naturel d'en chercher un mode de représentation analogue à la décomposition d'un polynôme entier en un produit de facteurs linéaires. Si le nombre des zéros est limité, comme chacun d'eux doit être d'un degré fini de multiplicité, on pourra former un polynome entier $P(z)$ ayant les mêmes zéros que $f(z)$ et aux mêmes degrés ; le rapport $\frac{f(z)}{P(z)}$ sera alors holomorphe dans tout le plan ; ce sera donc une fonction entière, et comme cette fonction n'a aucun zéro à distance finie, on pourra la représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant elle-même une fonction entière. En résumé $a_1, a_2, \dots a_n$ étant les zéros de $f(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ leurs degrés de multiplicité, on aura

$$(1) \qquad f(z) = e^{G(z)} (z-a_1)^{\alpha_1} (z-a_2)^{\alpha_2} \dots (z-a_n)^{\alpha_n}$$

Supposons maintenant que le nombre des zéros soit illimité ; nous pourrons d'après le théorème de M^r. Mittag Leffler, former une fonction ayant pour pôles simples $a_1, a_2 \dots a_n \dots$ avec des résidus respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ ; cette fonction sera la série

$$(2) \qquad \varphi(z) = \alpha_1\left[\frac{1}{z-a_1} + P_1\left(\frac{z}{a_1}\right)\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{1}{z-a_n} + P_n\left(\frac{z}{a_n}\right)\right]$$

Soit alors $z_0$ un point quelconque autre que les $a$ ; décrivons de ce point

comme centre un cercle $C$ qui ne contienne aucun des points $\underline{a}$. Si nous intégrons la série (2) le long d'un chemin contenu dans $C$ et allant de $z_0$ à $z$, la série sera encore convergente; son terme général sera, en désignant par $Lz$ une détermination précise du logarithme, par exemple celle qui s'annule pour $z=1$:

$$(3) \qquad v_n = \alpha_n \left[ L(z-a_n) - L(z_0-a_n) \right] + \alpha_n \left( Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right) - Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right) \right)$$

$Q\left(\frac{z}{a}\right)$ représente l'un quelconque des polynômes qui ont pour dérivée $P\left(\frac{z}{a}\right)$; nous prendrons celui qui s'annule en même temps que la variable, et on aura alors, d'après la forme des polynômes $P$:

$$(4) \qquad Q\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \cdots$$

Ceci posé, la formule (3) peut s'écrire

$$(5) \qquad v_n = \alpha_n L \frac{\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}}{\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right)}}$$

Considérons alors le produit illimité

$$(6) \qquad \prod \frac{\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}}{\left[\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_n}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}}$$

Si nous désignons par $e^{H_m}$ le produit des $m$ premiers facteurs on aura $H_m = S_m$, $S_m$ étant la somme des $m$ premiers termes de la série (2); donc $H_m$ et par suite $e^{H_m}$ tendront vers une limite déterminée quand $m$ croîtra indéfiniment; d'ailleurs sa valeur $e^{\varphi(z)-\varphi(z_0)}$ sera une fonction holomorphe dans le cercle $C$.

Ce résultat ne s'applique qu'aux valeurs de $z$ contenues dans $C$. Supposons que $0$ ne soit pas l'un des points $a$. En appliquant le résultat qui précède on voit que le produit

$$\prod \left[\left(1-\frac{z_0}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z_0}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}$$

sera convergent à l'intérieur d'un cercle $C_0$ ayant $0$ pour centre et s'étendant exclusivement jusqu'au point $\underline{a}$ le plus voisin, et représentera une fonction holomorphe. Si maintenant nous revenons au produit (6) nous en conclurons que le produit

$$(7) \qquad \prod \left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right]^{\alpha_n}$$

sera convergent et définira une fonction holomorphe dans le cercle C qui correspond à $z_0$, il est clair qu'on pourra ainsi de proche en proche arriver à un point quelconque du plan ; en résumé le produit (7) sera convergent en tout point du plan et sa limite sera une fonction entière $F(z)$.

Revenons maintenant à la fonction donnée $f(z)$ ; supposons qu'elle admette, outre les points $a_1, a_2, a_n \ldots$ le point 0 au degré $\alpha$ de multiplicité ; le rapport $\frac{f(z)}{F(z) z^{\alpha}}$ sera une fonction holomorphe, sans aucun zéro à distance finie ; on pourra donc la représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant une fonction entière ; on aura donc enfin

$$(8) \qquad f(z) = e^{G(z)} z^{\alpha} \prod \left[ \left( 1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)} \right]^{\alpha_n}$$

C'est l'expression générale des fonctions entières ; les facteurs du produit $\prod$ ont été appelés facteurs primaires par M. Weierstrass.

**Remarque.** — Dans le cas où la série $\left|\frac{1}{a_n}\right|^{\mu}$ est convergente nous avons vu qu'on peut arrêter au degré $\mu - 2$ le développement des polynômes $P\left(\frac{z}{a}\right)$ qui nous ont servi de point de départ ; dans ces conditions le polynôme $Q_n\left(\frac{z}{a_n}\right)$ sera constamment du degré $\mu - 1$. Son expression sera :

$$Q\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \cdots + \frac{z^{\mu-1}}{(\mu-1)a^{\mu-1}}$$

On dit alors que la fonction $f(z)$ est du genre $\mu - 1$.

Lorsque cette circonstance se présente, on peut dériver par logarithmes, puis faire ensuite $\mu - 2$ dérivations ordinaires, on obtient alors une relation complètement dégagée d'exponentielles et qui ne conserve plus aucune trace des polynômes $Q$.

## II. — Autre expression des fonctions fractionnaires. —

De la formule (8) nous déduirons une forme nouvelle d'une fonction méromorphe dans tout le plan, ou en d'autres termes d'une fonction fractionnaire. Soit $f(z)$ une pareille fonction ; ses pôles étant nécessairement isolés les uns des autres, nous pourrons former une fonction entière qui admette chacun d'eux comme zéro, avec le même degré de multiplicité. Soit $G_1(z)$ la fonction ainsi formée ; si nous considérons le produit

$$f(z)\, G_1(z)$$

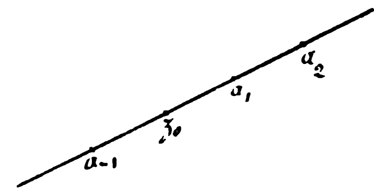
c'est une fonction fractionnaire mais qui n'a plus aucun pôle à distance finie ; c'est donc simplement une fonction entière, $G(z)$. On a donc cette nouvelle expression analytique.

$$f(z) = \frac{G(z)}{G_1(z)}$$

Donc, toute fonction fractionnaire est le quotient de deux fonctions entières

## III — La fonction $s(z)$. —

Comme première application, supposons les zéros de $f(z)$ simples et disposés régulièrement sur une droite ; leurs affixes seront contenues dans la formule




$$a_n = z_0 + 2n\omega.$$

$2\omega$ étant la valeur de la différence entre deux zéros consécutifs.

En faisant la substitution $u = \frac{z - z_0}{2\omega}$ on est amené à chercher la fonction qui admet comme zéros la suite des nombres entiers.

$$\ldots\ldots -n, \ldots\ldots -2, -1, \ldots\ldots 0, 1, 2, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$$

Or comme $\left|\frac{1}{n}\right|^2$ forme une série convergente, la fonction est donc du premier genre en remplaçant le facteur $e^{G(z)}$ par l'unité on est conduit à la fonction suivante

$$(10) \qquad s(z) = z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

l'accent indiquant que la valeur zéro ne doit pas être attribuée à $n$, sous le signe $\prod$ : Nous allons étudier les propriétés de cette fonction $s(z)$.

1° La formule (10) peut s'écrire en réunissant les facteurs qui correspondent à des valeurs de $n$ égales et de signes contraires

$$(11) \quad s(z) = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Cette forme met en évidence que $s(z)$ est une fonction impaire ; en d'autres termes, on a

$$s(-z) = -s(z)$$

2° La dérivée logarithmique $\frac{s'(z)}{s(z)}$ est alors une fonction impaire, nous la désignerons par $\lambda(z)$ et nous aurons

$$(12) \qquad \lambda(z) = \frac{s'z}{s(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

$$(13) \qquad \lambda'(z) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

3° Considérons en particulier la formule (12) ; désignons par $\lambda_n$ la somme des termes de $-n$ à $+n$ inclusivement.

$$\lambda_n(z) = \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z+n-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{z-n}$$

d'où $$\lambda_n(z+1) = \frac{1}{z+n+1} + \frac{1}{z+n} + \cdots\cdots + \frac{1}{z-(n-1)}.$$

et par suite $$\lambda_n(z+1) - \lambda_n(z) = \frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z-n}$$

Si nous faisons croître $n$ indéfiniment, nous aurons:

$$(14) \qquad \lambda(z+1) = \lambda(z).$$

Donc la fonction $\lambda(z)$ admet la période 1. $\lambda'(z)$ admettra aussi la période 1; cela est évident d'ailleurs sur la formule (13); il suffit dans cette formule de remplacer $n$ par $n-1$, ce qui est permis puisque $n$ prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

4° La formule (14) peut s'écrire:

$$\frac{s'(z+1)}{s(z+1)} = \frac{s'(z)}{s(z)}$$

d'où en intégrant et désignant par $C$ une constante

$$s(z+1) = C\, s(z)$$

Pour déterminer $C$ faisons $z = -\frac{1}{2}$ on aura: $s\left(\frac{1}{2}\right) = C\, s\left(-\frac{1}{2}\right)$. Si nous observons que $s\left(+\frac{1}{2}\right)$ n'est ni nul ni infini, et que $s(z)$ est une fonction impaire, on en déduira $C = -1$; d'où

$$(15) \qquad s(z+1) = -s(z) \qquad s(z+2) = s(z)$$

Observons que si l'on fait $z = -\frac{1}{2}$ dans (14) et que l'on tienne compte de ce que $\lambda(z)$ est impaire, il vient

$$(16) \qquad \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

5° Nous démontrerons enfin une propriété importante de la fonction $\lambda'(z)$; c'est qu'elle tend vers zéro lorsque $z$ augmente indéfiniment en restant imaginaire. Observons en effet que $\lambda'$ admettant la période 1, nous pouvons en posant $z = x+iy$ supposer $x$ compris entre 0 et 1 et faire croître indéfiniment $y$ (si $z$ tendait vers l'infini par des valeurs réelles, c'est-à-dire $y$ étant égal à zéro, il est évident que $\lambda'(z)$ ne tendrait vers aucune valeur déterminée puisqu'on pourrait ramener toujours la variable à une valeur arbitraire réelle comprise entre 0 et 1).

Ceci posé, on a:

$$-\lambda'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-iy-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-iy-n)^2} + \frac{1}{(x-iy+n)^2}\right]$$

Or on a: $$\left[\frac{1}{(x-iy-n)^2}\right] = \frac{1}{(x-n)^2+y^2} > \frac{1}{y^2+n^2} \quad \text{à cause de } x>0$$

$$\left|\frac{1}{(x-iy+n)^2}\right| = \frac{1}{(x+n)^2+y^2} > \frac{1}{(n+1)^2+y^2} \text{ à cause de } x<1$$

On aura donc

$$\left|\lambda'(z) - \frac{1}{z^2}\right| < \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n^2+y^2}\right) + \sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2+y^2} < 2\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+y^2}$$

Il suffit donc de prouver que la série

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \dots\dots + \frac{1}{y^2+n^2} + \dots\dots$$

a une somme qui s'annule quant $y$ devient infini. Or soit $q$ la partie entière de $y$. La somme des $q$ premiers termes est évidemment moindre que $q\frac{1}{q^2}$ ou que $\frac{1}{q}$ ; quant aux termes suivants, ils ont pour valeurs :

$$\frac{1}{y^2+q^2}, \frac{1}{y^2+(q+1)^2}, \frac{1}{y^2+(q+2)^2}, \dots\dots\dots$$

ils sont donc moindres que

$$\frac{1}{q^2}, \quad \frac{1}{(q+1)^2}, \quad \frac{1}{(q+2)^2}, \dots\dots\dots$$

La somme de ces dernières valeurs est $S - S_q$, $S$ et $S_q$ étant la somme, et la somme des $q$ premiers termes de la série convergente

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} + \dots\dots$$

On aura donc en définitive

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{y^2-2^2} + \dots\dots < \frac{1}{q} + S - S_q$$

Or si $y$ tend vers l'infini, il en est de même de $q$ ; le second membre tend évidemment vers zéro et le théorème se trouve démontré.

6° Revenons à la formule (II) ; nous avons en faisant $z = \frac{1}{2}$

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\prod_1^\infty \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

Nous pouvons d'ailleurs évaluer bien simplement le produit. On a, en effet, par la formule de Wallis (1e partie, page )

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\dots\dots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\dots\dots$$

On en conclut immédiatement

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$$

On aura donc en définitive pour résumer les propriétés de la fonction $s$, le tableau suivant

$$s(z) = z\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}$$

$$s(0) = 0 \qquad s(-z) = -s(z) \qquad s(z+1) = -s(z) \qquad s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$$

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \lambda'(\infty)_{y\neq 0} = 0$$

L'équation qui définit $s(z)$ peut être généralisée ; si nous divisons terme à terme les deux formules

$$s(z-a) = (z-a)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z-a}{n}\right)e^{\frac{z-a}{n}}$$

$$s(-a) = -a\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}$$

il vient :

$$\frac{s(z-a)}{s(-a)} = \left(1-\frac{z}{a}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n}} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

On peut encore écrire

$$\frac{s(z-a)}{s(-a)} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}}\prod_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{z}{n}-\frac{z}{n+a}}$$

ou

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}} = \frac{s(z-a)}{s(-a)}e^{-z\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{n(n+a)}}$$

On a d'ailleurs, formule (12)

$$\lambda(z) = \frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n} = 2\sum_{0}^{\infty}\frac{z}{z^2-n^2}$$

d'où, en supposant que $a$ ne soit pas un nombre entier

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{-a}{n(n+a)} = \lambda(-a) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{n(n+a)} = \lambda(a)$$

D'où enfin la formule que nous avions en vue

$$(18) \qquad \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n+a}\right)e^{\frac{z}{n+a}} = \frac{s(z+a)}{s(-a)}e^{-z\lambda(a)}$$

## IV — Fonctions circulaires.

— La fonction $\sin\pi z$ admet pour zéros la suite des nombres entiers ; nous pourrons donc l'exprimer à l'aide de la fonction $s(z)$ et poser

$$\sin\pi z = e^{G(z)}s(z)$$

$G(z)$ étant une fonction entière ; si nous différentions par logarithmes, nous aurons:

$$\pi \cot g\, \pi z = G'(z) + \lambda(z)$$

et en différentiant de nouveau

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = G''(z) + \lambda'(z)$$

Nous savons déjà que $\lambda'(z)$ tend vers $0$ quand $z$ augmente indéfiniment par des valeurs imaginaires.

Il en est de même du premier membre ; on a en effet ;

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi} - e^{-zi}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix+y} - e^{-ix+y}\right)$$

et si on suppose $y \neq 0$ quand $x$ augmente indéfiniment, cette expression croît elle-même en module au-delà de toute limite. Donc $G''(z)$ tend vers zéro quand $z$ augmente à l'infini par des valeurs imaginaires.

Supposons que $z$ croisse indéfiniment par des valeurs réelles ; un point à l'infini sur $Ox$ peut être ramené par l'addition de périodes $1$ à être compris entre $0$ et $1$ ; tant qu'on ne sera pas ramené au point $0$, $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ et $\lambda'(z)$, conserveront des valeurs finies ; quant au point zéro, c'est un pôle double pour l'une et l'autre de ces fonctions, et on a :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \varphi(z) \qquad \lambda'(z) = -\frac{1}{z^2} + \psi(z)$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant holomorphes au point $0$ ; donc la somme $G''(z)$ reste finie en ce point ; donc enfin $G''(z)$ est finie pour toute valeur réelle ou imaginaire de $z$ ; donc $G''(z)$ est une constante ; comme enfin cette constante s'annule pour $z$ infini et complexe, on a simplement $G''(z) = 0$, d'où $G'(z) = C$, $C$ étant une constante ; on aura donc:

$$\pi \cot g\, \pi z = C + \lambda(z)$$

Changeons $z$ en $-z$ et observons que $\cot g\, z$, $\lambda(z)$ sont des fonctions impaires, nous aurons

$$-\pi \cot g\, \pi z = C - \lambda(z)$$

d'où, en ajoutant, $C = 0$. Donc $G(z)$ est une constante et on a

$$\sin \pi z = c' s(z).$$

Si maintenant nous faisons $z = \frac{1}{2}$ ; $\sin \pi z = 1$ $s(z) = \frac{1}{\pi}$, $c' = \pi$ et on a enfin

$$(19) \qquad \sin \pi z = \pi s(z)$$

On en déduit immédiatement les développements suivants :

$$\sin \pi z = \pi \left(1-\frac{z^2}{1}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right) \cdots\cdots \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \cdots\cdots$$

$$\pi \cot g\, \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\right) + \left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}$$

Pour donner une application de ces formules, nous déduirons de la dernière la somme d'une série numérique importante. On a

$$\pi^2 = \sin^2 \pi z \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \cdots\right)^2$$

D'autre part:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{z-n}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+n}\right)^2\right]$$

La seconde somme est maintenant holomorphe dans le domaine de l'origine, si nous la représentons par $\mu(z)$ nous avons:

$$\mu(z) = \sum_{1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{z-n}\right)^2 + \left(\frac{1}{z+n}\right)^2\right] = \mu(0) + z\,\mu'(0) + \cdots$$

D'où

$$\pi^2 = \left[\frac{1}{z^2} + 2\,\mu(0) + 2z\,\mu'(0) + \cdots\right]\left[\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \cdots\right]^2$$

Si nous écrivons que dans le développement du second membre, le terme en $z^2$ est nul

$$2\pi^2 \mu(0) - \frac{2\pi^4}{6} = 0 \qquad \frac{\pi^2}{6} = \mu(0)$$

D'où enfin:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$$

Remarquons en terminant que toute fonction entière qui admet la période $2\omega$ peut être développée en une série de Fourier dont le terme général est $a_n \sin\frac{n\pi z}{\omega} + b_n \cos\frac{n\pi z}{\omega}$; toute fonction fractionnaire admettant cette période, peut d'après un théorème démontré plus haut être mise sous la forme d'une fraction dont les deux termes sont des séries de Fourier; on doit donc considérer la fonction $s(z)$ comme jouant un rôle fondamental dans la théorie des fonctions périodiques.

---

# Dixième Leçon

## Sur les fonctions uniformes qui possèdent un théorème d'addition.

**I — Définition.** — Nous avons dès le début, défini la fonction exponentielle par la propriété :

$$f(u+v) = f(u)\cdot f(v)$$

Les fonctions rationnelles possèdent une propriété analogue ; si en effet, on pose

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P et Q étant des polynômes entiers, on aura

$$Q(u)\cdot f(u) = P(u) \qquad Q(v)\cdot f(v) = P(v) \qquad Q(u+v)\cdot f(u+v) = P(u+v)$$

et si on élimine u et v entre ces trois relations, on obtiendra une équation entière de la forme

$$(1) \qquad G\left[f(u+v), f(u), f(v)\right] = 0$$

Il en serait de même de la fonction composée rationnellement avec $e^z$; si on a

$$f(z) = \frac{P(e^z)}{Q(e^z)}$$

on en déduira :

$$f(u)\,Q(e^u) = P(e^u) \qquad f(v)\cdot Q(e^v) = P(e^v) \qquad f(u+v)\,Q(e^u\cdot e^v) = P(e^u\cdot e^v)$$

d'où, en éliminant $e^u$, $e^v$, une relation de la forme (1).

On dit qu'une fonction f possède un théorème d'addition lorsqu'elle satisfait à une équation fonctionnelle de la forme (1), G étant un polynôme entier. M. Weierstrass a posé et résolu le beau problème de trouver toutes les fonctions uniformes qui possèdent un théorème d'addition ; et c'est la solution de ce problème qu'il a voulu prendre pour point de départ de la théorie des fonctions elliptiques.

Observons qu'il y a des fonctions multiformes possédant un théorème d'addition par exemple $\sqrt{z}$ satisfait à l'équation :

$$f^2(u+v) = f^2(u) + f^2(v)$$

mais nous nous limiterons exclusivement aux fonctions uniformes. Soit alors n le degré de l'équation (1) par rapport à $f(u+v)$.

Nous laisserons de côté les fractions rationnelles qui répondent comme nous l'avons vu à la question, et nous devrons par suite admettre, d'après un théorème

précédemment établi (II page 70) qu'il existe au moins une constante $b$ telle que l'équation $f(z) - b = 0$ ait plus de $n$ racines distinctes ; soient alors

$$v_1, v_2, \ldots\ldots v_{n+1} \ldots\ldots ;$$

les racines de l'équation $f(v) = b$ ; l'équation en $H$

$$G\left[H, f(u), b\right] = 0$$

devra admettre, quel que soit $u$, les racines :

$$f(u+v_1), f(u+v_2), \ldots\ldots\ldots f(u+v_{n+1})$$

Or elle est seulement du $n^{ième}$ degré par rapport à $H$. Elle ne peut se réduire à une identité, puisque $f(u)$ se réduirait alors à une constante ; donc il est nécessaire que deux des racines précédentes soient identiques ; on aura par exemple

$$f(u+v_\lambda) = f(u+v_\mu)$$

d'où, en faisant :

$$u + v_\mu = z$$

$$f(z + v_\lambda - v_\mu) = f(z)$$

En d'autres termes, comme $z$ est ici une valeur quelconque, $f(z)$ doit admettre la période $v_\lambda - v_\mu$ qui est essentiellement différente de zéro.

Nous obtenons donc ce premier résultat :

1° Si la fonction $f(z)$ n'est pas rationnelle, elle est nécessairement périodique.

**II — Fonctions périodiques.** — Supposons donc que $f(z)$ ait une période $\underline{2\omega}$ ; nous pouvons admettre que cette période est irréductible, c'est-à-dire n'est multiple d'aucune autre ; si l'équation $f(v) = b$ admet une racine $v_i$, elle admet toutes les racines $v_i + 2K\omega$, $K$ étant un entier quelconque ; nous dirons que deux racines sont distinctes, si leur différence n'est pas un multiple entier de $2\omega$. Supposons alors, en nous plaçant à ce point de vue, que $f(v) = b$ n'ait qu'un nombre limité de racines distinctes, quel que soit $b$. Si nous posons alors $z' = e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$, $f(z) = \varphi(z')$, la fonction $\varphi(z')$ sera uniforme, puisqu'à une même valeur de $z'$ correspondent des valeurs de $z$, en nombre infini, il est vrai, mais qui, différant deux à deux par des variables de $2\omega$, donneront à $f(z)$ et par suite à $\varphi(z')$ une valeur unique et bien déterminée.

En outre $\varphi(z') = b$ n'ayant qu'un nombre limité de racines, quel que soit $b$, sera une fonction rationnelle ; donc $f(z)$ se réduira à une fonction rationnelle de $e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$ ; nous avons fait remarquer au début qu'une pareille fonction possède un théorème d'addition.

Supposons maintenant que, pour une valeur au moins de $b$, $f(v) - b$ ait un nombre illimité de racines distinctes, c'est-à-dire non congrues à $2\omega$ ; alors on verra comme plus haut que deux d'entre elles $v_\rho$ $v_\sigma$ doivent satisfaire à la condition

$$f(u+v_\rho) = f(u+v_\sigma) \qquad f(z+v_\rho - v_\sigma) = f(z)$$

il y a donc une seconde période $v_\rho - v_\sigma = 2\omega'$, qui n'est pas un multiple entier de $2\omega$, et qui, d'après notre hypothèse, n'en peut pas être un sous multiple — Nous pouvons donc énoncer le nouveau résultat :

9° Si une fonction uniforme et possédant un théorème d'addition admet une période $2\omega$, ou bien elle est composée rationnellement avec $e^{\frac{\pi z i}{\omega}}$, ou bien elle admet au moins une seconde période, distincte de la première.

Nous sommes ainsi ramenés à considérer les fonctions uniformes qui ont au moins deux périodes distinctes.

**Théorème I.** — Lorsqu'une fonction uniforme admet deux périodes distinctes, le rapport de ces périodes est nécessairement imaginaire. (Jacobi, Œuvres Tome II, page 25).

Soient $2\omega$, $2\omega'$ les deux périodes, $2m\omega + 2m'\omega'$ sera également une période, si $m$ et $m'$ sont entiers ; il est d'abord évident que $\omega, \omega'$ ne peuvent admettre une commune mesure $2\omega''$ ; sinon on aurait $\omega = p\omega''$, $\omega' = p'\omega''$, $p, p'$ étant deux nombres entiers ; on pourrait alors, en supposant, ce qui est permis, $p$ et $p'$ premiers entre eux, trouver deux nombres entiers $q, q'$ tels qu'on eût

$$pq' + qp' = 1$$

d'où

$$2q'p\omega'' + 2qp'\omega'' = 2\omega'' = 2p\omega + 2p'\omega'$$

$2\omega''$ serait donc une période, et $2\omega$, $2\omega'$ multiples d'une même période ne seraient pas distinctes.

Nous pouvons démontrer que $\frac{\omega}{\omega'}$ ne peut être réel et incommensurable. Supposons, en effet, qu'on ait :

$$\omega = m\omega' \qquad \omega_1 = m_1\omega'$$

$m, m_1$ étant deux nombres réels incommensurables, on pourra trouver deux entiers $q, q_1$ tels qu'on ait :

$$|qm_1 - q_1 m| < \varepsilon$$

et cela, quelque petit que soit $\varepsilon$.

Si alors on considère la quantité $\alpha = 2q\omega_1 - 2q_1\omega$ qui sera une période, son module pourra être supposé inférieur à tout nombre donné.

Dans ces conditions, $z_0$ étant une valeur quelconque de la variable, on aurait

$$f(z_0 + \alpha) = f(z_0)$$

La fonction $f(z) - f(z_0)$ holomorphe dans le domaine du point $z_0$ aurait deux zéros, $z_0$ et $\alpha + z_0$ aussi rapprochés qu'on voudrait ; elle serait donc nulle dans tout le plan ; et $f(z)$ se réduirait à une constante.

## III — Fonctions doublement périodiques. — Les deux périodes

étant maintenant désignées par $2\omega$, $2\omega'$, on aura $m'$, $m$ étant des nombres entiers arbitraires, positifs ou négatifs.

$$f(z + 2m\omega + 2m'\omega') = f(z)$$

Si on laisse fixe un des nombres entiers, $m'$ par exemple, les points contenus dans la formule $z + 2m\omega + 2m'\omega'$ sont équidistants et distribués régulièrement sur une droite $D$ faisant avec $ox$ un angle égal à l'argument de la période $2\omega$; si on fait ensuite prendre à $m'$ toutes les valeurs possibles, cette droite $D$ se déplace parallèlement à la direction de la seconde période et on voit que les points considérés forment dans leur ensemble les sommets d'un réseau de parallélogrammes qui couvrent le plan tout entier; l'angle au sommet de chacun d'eux est égal à la différence d'arguments des deux périodes, et comme le rapport de ces deux périodes est imaginaire, l'angle en question ne peut être ni $0$ ni $\pi$; en d'autres termes, on pourra toujours constituer effectivement le réseau dont nous venons de parler; remarquons enfin que nous avons le droit de supposer que les deux périodes sont l'une et l'autre irréductibles, dans le sens où nous avons employé plus haut cette expression.

Revenons maintenant à la question proposée. Considérons un parallélogramme $ABCD$; si pour toute valeur de $b$, l'équation $f(z) = b$ n'a qu'un nombre limité de racines, c'est qu'il n'y a dans $ABCD$ aucun point singulier essentiel $a$; sinon, (Lemme, page 70) $p$ étant le nombre maximum de ces racines, $\beta$ la valeur de $b$ pour laquelle il est atteint, il existerait une valeur $\beta'$ infiniment voisine de $\beta$, et telle que l'équation $f(z) - \beta' = 0$ aurait $p$ racines aussi voisines que l'on voudrait des précédentes, par suite différentes entre elles, et en outre une $(p+1)^{\text{ème}}$ contenue dans le domaine de $a$ et par suite distincte des premières; (ces $p+1$) racines seraient contenues dans $ABCD$ et $p$ ne serait pas le nombre maximum.

Reste à examiner le cas où pour une valeur convenable de $b$, l'équation $f(z) = b$ aurait dans $ABCD$ un nombre illimité de racines distinctes; en raisonnant comme plus haut on en conclurait que la différence de deux de ces racines serait une période; cette période étant d'ailleurs représentée géométriquement par un segment rectiligne dont les deux extrémités sont à l'intérieur de $ABCD$, serait nécessairement distincte de $2\omega$ et de $2\omega'$. Or, nous allons démontrer l'impossibilité d'une troisième période, nous arrivons donc au théorème général suivant:

**Théorème** ——. Les seules fonctions uniformes qui puissent posséder un théorème d'addition sont:

1° Les fonctions rationnelles.

2° Les fonctions périodiques composées rationnellement avec $e^{\frac{\pi z}{\omega}}$

3° Les fonctions uniformes doublement périodiques.

Nous verrons d'ailleurs dans cette même leçon que les fonctions méromorphes doublement périodiques possèdent toutes un théorème d'addition. — Le problème sera alors complètement résolu quand nous aurons donné une expression générale de toutes les fonctions fractionnaires à deux périodes.

## IV — Impossibilité de trois périodes.

Nous avons dit qu'une fonction uniforme ne saurait avoir plus de deux périodes distinctes. On peut s'en assurer de la manière suivante. — Supposons en général $p$ périodes $a_1\ a_2 \ldots a_p$; et considérons tous les points $P$ définis par l'égalité

$$z = z_0 + m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p$$

on doit pouvoir isoler le point $z_0$ de tous les autres points $P$, sinon, la fonction $f(z) - f(z_0)$ aurait un zéro qu'on ne pourrait isoler de tous les autres; elle se réduirait donc à une constante nulle dans le domaine du point $z_0$ et par suite dans le plan tout entier, d'après le théorème de Riemann.

En d'autres termes, le module des valeurs de $z$ contenues dans la formule précédente admet une limite inférieure $\delta$ qui n'est pas nulle. Il est aisé de voir que cette limite est effectivement atteinte pour l'un au moins des points $P$. En effet d'après la définition même de $\delta$, si $\varepsilon$ désigne un nombre positif quelconque, il y aura toujours au moins un point $P$ dans la couronne comprise entre deux cercles de rayon $\delta - \varepsilon$, $\delta + \varepsilon$, ayant $z_0$ pour centre; la distance de deux points $P$ quelconques est d'ailleurs au moins égale à $\delta$, car l'un quelconque d'entre eux peut être pris pour le point $z_0$; il y aura donc un nombre limité de points $P$ dans la couronne circulaire, et le minimum $\delta$ de distance au point $z_0$ sera nécessairement atteint par un ou plusieurs d'entre eux.

Soit alors $A$ l'un des points qui correspondent au module $\delta$; si tous les points $P$ étaient en ligne droite avec $z_0 A$, deux quelconques des périodes seraient commensurables entre elles; alors, ou $f(z)$ serait une constante, ou ces périodes se réduiraient à une seule; il y aura donc un point $B$, faisant partie de ces points $P$ plus rapproché de $z_0$ que tous les autres, sauf $A$, et tel que les deux directions $z_0 A$, $z_0 B$ soient différentes. Nous pourrons dès lors construire un réseau de parallélogrammes couvrant le plan tout entier; je dis que tout point $P$ doit être l'un des sommets de ce réseau. — En effet, soit $P$ l'un des points en question. On pourra toujours par l'addition d'un nombre suffisant de périodes $z_0 A$, $z_0 B$, le ramener à un point $Q$ situé ou dans $ABCD$ ou sur son contour. Or $Q$ ne peut être ni sur $z_0 A$, ni sur $z_0 B$

puisqu'il serait plus rapproché de $z_0$ que A ou que B ; il ne peut être ni sur AC, ni sur BC car l'addition d'une période le ramènerait sur $Az_0$ ou sur $Bz_0$ ; enfin, il ne peut être à l'intérieur ; car, le contour AQB étant alors inférieur à BCA, il faudrait ou que $BQ < BC$ ou que $AQ < AC$ ; dans l'un ou l'autre cas, on obtiendrait par une parallèle $z_0 Q$, un point de période plus rapproché de $z_0$ que A ou que B ; donc en définitive tous les points P peuvent être ramenés aux quatre sommets du parallélogramme ; les périodes sont donc réductibles à deux $z_0A$, $z_0B$, ce qu'il fallait prouver.

## V — Premières propriétés des fonctions doublement périodiques.

Nous sommes maintenant amenés à chercher s'il existe des fonctions fractionnaires à deux périodes. L'étude d'une pareille fonction se limite à l'étendue d'un parallélogramme ABCD, puisque tout point du plan peut être ramené par l'addition de périodes, à l'intérieur ou sur le contour de ABCD. Il serait naturel de considérer d'abord le cas d'une fonction holomorphe dans ABCD ; mais une pareille fonction conservant un module fini dans ABCD aurait un module fini dans tout le plan, et par suite se réduirait à une constante. De là ce premier résultat (pour abréger, nous désignerons par P le parallélogramme ABCD.)

**Théorème I. —** Toute fonction doublement périodique, qui reste holomorphe dans P se réduit à une constante.

Nous devrons donc considérer les fonctions ayant au moins un pôle ; il est naturel d'appliquer immédiatement le théorème des résidus.

Considérons donc l'intégrale

$$\int_P f(z)\,dz$$

prise le long du contour ABCD. On peut la décomposer en quatre autres que nous désignerons pour abréger par $(AB)+(BC)+(CD)+(DA)$. Or si nous considérons deux points M, M' situés sur une même parallèle à AB, $f(z)$ prend en ces deux points la même valeur ; les deux intégrales $(AD)$ $(BC)$ sont donc égales entre elles, les valeurs de $dz$ étant identiques de même $(AB) = (CD)$

$$\int_P f(z)\,dz = (AB) + (BC) + (BA) + (CB) = 0$$

D'autre part, cette intégrale divisée par $2i\pi$ donne la somme des résidus de $f(z)$ dans ABCD ; donc

**Théorème. —** La somme des résidus d'une fonction doublement périodique à l'intérieur de P est égale à zéro.

**Remarque.** — Pour qu'un observateur, parcourant ABCD, ait à sa gauche l'intérieur du parallélogramme, en d'autres termes, pour que le sens dans lequel nous avons évalué l'intégrale précédente soit direct, il faut et il suffit que $\widehat{BAD} < \pi$. Or sin $\widehat{BAD}$ est le coefficient de $i$ dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, il faut donc que dans $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de $i$ soit positif; nous supposerons toujours qu'on ait disposé les deux périodes dans un ordre tel, que cette condition soit vérifiée.

Le théorème précédent peut être généralisé; supposons une fonction telle qu'on ait, $a, a'$ étant deux constantes.

$$f(z)+2\omega = f(z)+a \qquad f(z+2\omega') = f(z)+a'$$

on voit tout de suite en reprenant le raisonnement précédent qu'on a ici

$$\int_P f(z)\,dz = 2a\omega' - 2a'\omega$$

Donc la somme $S$ des résidus de cette fonction sera

$$S = \frac{a\omega' - a'\omega}{i\pi}$$

Revenons à une fonction doublement périodique; sa dérivée $f'(z)$ a évidemment les mêmes périodes, et il en est de même de la dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Or la somme des résidus de cette dernière fonction est égale à la somme des ordres de la première. Donc:

**Théorème.** — La somme des ordres d'une fonction fractionnaire à l'intérieur de P est égale à zéro.

On tire immédiatement, de ce qui précède, les conclusions suivantes:

1° Si la fonction $f(z)$ n'a qu'un pôle unique dans P; ce pôle a un résidu nul; il est donc au moins du second degré – Donc il n'y a pas de fonction qui n'ait au moins deux pôles, distincts ou confondus, dans P. Les fonctions à deux pôles sont donc les plus simples de toutes; on les appelle fonctions elliptiques

2° Si une fonction a, dans P, $p$ pôles distincts ou non, elle aura $p$ zéros; plus généralement, elle prendra $p$ fois une valeur donnée quelconque $b$; car $f(z)-b$ sera une fonction doublement périodique et aura les mêmes pôles que $f(z)$ elle aura donc $p$ zéros dans P.

## IV — Théorème d'addition.

Si dans l'équation

$$(1) \quad G\left[f(u+v), f(u), f(v)\right] = 0$$

on considère $v$ comme une constante, on en conclut que $f(u+v)$, $f(u)$ doivent être liées par une relation algébrique; or si $f(u)$ admet les périodes $2\omega, 2\omega'$ $f(u+v)$ les admettra également et on est ainsi amené à chercher, d'une manière

générale dans quel cas deux fonctions $f, \varphi$ uniformes fractionnaires, et aux mêmes périodes seront liées par une équation entière — Nous procéderons par la méthode des coefficients indéterminés ; soit

$$(2) \qquad \sum A_{\alpha\beta} f^{\alpha} \varphi^{\beta} = 0$$

la relation algébrique supposée ; son premier membre $F(z)$ est une fonction fractionnaire et doublement périodique ; nous déterminerons ses coefficients par la double condition que $F(z)$ n'ait aucun pôle, et se réduise à 0 pour une valeur particulière de $z$ ; dans ces conditions $F(z)$ étant doublement périodique et entière, se réduira identiquement à 0.

Soit donc $a$ un pôle de $f$ ou de $\varphi$ ; si on remplace $f, \varphi$, par leurs expressions dans le domaine de $a$ on mettra en évidence un système de fractions de la forme

$$\frac{M_1}{z-a} + \frac{M_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{M_n}{(z-a)^n}$$

$M_1, M_2, M_n$ étant des fonctions linéaires et homogènes des coefficients inconnus $A_{\alpha\beta}$ ; on obtiendra ainsi, pour chaque pôle, un système d'équations

$$(3) \qquad M_1 = 0 \quad M_2 = 0 \quad \dots \quad M_n = 0$$

Il est facile d'en déterminer le nombre ; soient en effet :

$n$ le nombre des pôles de $f$ contenus dans $P$, ces pôles étant ou non distincts

$n'$ le nombre des pôles de $\varphi$ contenus dans $P$

$l$ le degré de $F$ par rapport à $f$, $l'$ son degré par rapport à $\varphi$.

La fonction $F(z)$ aura évidemment, dans $P$, $ln + l'n'$ pôles distincts ou confondus ; chaque pôle d'ordre $K$ fournira $K$ équations (3) ; donc le nombre total des équations (3) sera $ln + l'n'$. — Si on y adjoint l'équation $F(z_0) = 0$ on aura en tout un nombre d'équations égal à

$$ln + l'n' + 1$$

D'autre part le nombre total des coefficients $A_{\alpha\beta}$ est $(l+1)(l'+1)$ ; pour que le système linéaire admette certainement un système de solutions non identiquement nulles, il suffit que le nombre des équations soit inférieur à celui des inconnues, c'est-à-dire qu'on ait

$$ln + l'n' + 1 < (l+1)(l'+1) \qquad ln + l'n' < ll' + l + l'$$

ou encore

$$\frac{n}{l'} + \frac{n'}{l} < 1 + \frac{1}{l} + \frac{1}{l'}$$

Or, on peut toujours y satisfaire en prenant $l$ et $l'$ suffisamment grands, puisque les deux membres ont pour limites respectivement 0 et 1. De là cet important théorème

**Théorème.** — Deux fonctions fractionnaires doublement périodiques aux mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique.

**Corollaire.** — Toute fonction fractionnaire doublement périodique admet un théorème d'addition.

En effet $v$ étant considérée comme une constante, $f(u+v)$ et $f(u)$ seront deux fonctions de $u$, aux mêmes périodes et auront entre elles une relation algébrique

$$\sum A_{pq} f^p(u+v) f^q(u) = 0$$

Les $A_{pq}$ étant fonctions de $v$; or si nous échangeons $u$ et $v$ la relation précédente subsistera et, sous sa nouvelle forme, sera une fonction entière de $f(u+v)$ et de $f(v)$; donc les $A_{pq}$ ne peuvent être que des polynômes entiers en $f(v)$; donc enfin le premier membre de l'identité précédente est un polynôme entier en $f(u+v)$, $f(u)$, $f(v)$. Il y a donc bien un théorème d'addition.

**Remarque.** — Si $f(z)$ est doublement périodique, $f'(z)$ aura les mêmes périodes; donc il existe une relation algébrique entre $f(z)$ et $f'(z)$. Toute fonction rationnelle de $z$ ou de $C^{te}$ est de même liée à sa dérivée par une relation algébrique cette propriété appartient donc à toute fonction ayant un théorème d'addition. Nous verrons un peu plus tard que réciproquement les fonctions uniformes à théorème d'addition sont les seules qui soient liées algébriquement à leur dérivée.

---

# Onzième Leçon.

## La fonction σ et les fonctions doublement périodiques.

**I — La fonction σ(z).** — Nous devons maintenant, en admettant qu'il existe de pareilles fonctions, chercher l'expression analytique générale des fonctions fractionnaires doublement périodiques; une pareille fonction peut, comme nous l'avons vu, être mise sous la forme d'une fraction dont les termes sont des fonctions entières. Si $a$ est un zéro de $f(z)$, le numérateur de cette fraction devra satisfaire à l'égalité :

$$G(z - a - 2m\omega - 2m'\omega') = 0$$

Et par suite, la fonction $\sigma(z+a) = \varphi(z)$ devra admettre comme zéros tous les points donnés par la formule

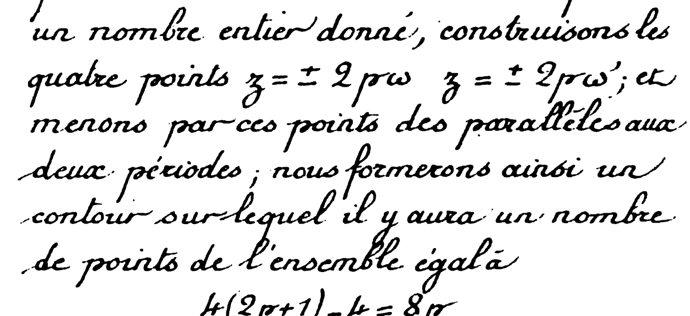
$$w = 2m\omega + 2m'\omega'$$

Nous sommes donc amenés à chercher la fonction entière la plus simple qui admette comme zéros les sommets du réseau de parallélogrammes ; elle jouera dans la théorie des fonctions doublement périodiques le même rôle que la fonction $s\left(\frac{\pi z}{\omega}\right)$ dans la théorie des fonctions à une période.

Nous démontrerons d'abord que la fonction est du second genre, c'est-à-dire que la série double dont le terme général est

$$\left|\frac{1}{w}\right|^3 = \left|\frac{1}{2m\omega+2m'\omega'}\right|^3$$

est convergente. Groupons en effet, les points $w$ de la manière suivante : $p$ étant un nombre entier donné, construisons les quatre points $z = \pm 2p\omega \quad z = \pm 2p\omega'$ ; et menons par ces points des parallèles aux deux périodes ; nous formerons ainsi un contour sur lequel il y aura un nombre de points de l'ensemble égal à



$$4(2p+1) - 4 = 8p$$

Nous réunirons en un groupe unique $g_p$ les 8 points situés sur le contour en question en donnant à $p$ toutes les valeurs entières de $0$ à $+\infty$, nous aurons parcouru tout l'ensemble des points $w$.

Tous les contours considérés sont homothétiques ; prenons un point du groupe $g_p$ ; en le joignant à l'origine nous couperons en un point $H$ le contour qui correspond au groupe $g_1$ et nous aurons

$$|w| = p.\, OH$$

Or si nous désignons par $\delta$ le rayon d'un cercle intérieur à $ABCD$ on aura $OH > \delta$ ; d'où

$$|w| > p.\,\delta.$$

Soit alors $\mu$ un nombre positif quelconque ; considérons la série $\left|\frac{1}{w}\right|^\mu$ ; le groupe $g_p$ donnera une somme inférieure à

$$\frac{1}{\delta^\mu}\;\frac{1}{p^\mu}\;8p = \frac{8}{\delta^\mu}\;\frac{1}{p^{\mu-1}}$$

La série linéaire obtenue en faisant varier $p$ de $0$ à $\infty$ sera donc convergente

si nous prenons $\mu = 3$. Donc la série double dont le terme est $\frac{1}{w^3}$ est absolument convergente pour un mode spécial de groupement et par suite pour un mode spécial de groupement quelconque ; la fonction $\sigma$ est donc de genre 2. Nous aurons alors immédiatement l'expression analytique de $\sigma(z)$ par :

$$(1)\quad \sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}} \qquad (w = 2m\omega + 2m'\omega')$$

l'accent indiquant que le couple de valeurs $m = m' = 0$ doit être exclu du produit.

On reconnait immédiatement que cette fonction est impaire ; on a, en effet

$$\sigma(-z) = -z \prod{}' \left(1 + \frac{z}{w}\right) e^{-\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}}$$

Or nous pouvons évidemment changer simultanément $m$ en $-m$ et $m'$ en $-m'$, dans le produit, $w$ change alors de signe, et on a :

$$\sigma(-z) = -z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}} = -\sigma(z)$$

**II — Les fonctions $\zeta(z)$, $p(z)$.** — La formule (1) qui donne $\sigma$ sous la forme d'un produit double serait évidemment peu commode au point de vue du calcul numérique ; mais elle nous permettra de mettre en évidence avec une grande facilité les propriétés fondamentales de la fonction au point de vue de la double périodicité. Nous pouvons d'abord par des dérivations faire disparaître les exponentielles ; nous aurons ainsi de nouvelles fonctions

$$(2)\quad \zeta(z) = +\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right)$$

$$(3)\quad p(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{w^2}\right)$$

La fonction $\sigma$ étant impaire, $\sigma'$ sera paire, donc $\zeta$ sera impaire et par suite $p$ sera paire ; on aura :

$$(4)\quad \sigma(-z) = -\sigma(z) \qquad \zeta(-z) = -\zeta(z) \qquad p(z) = p(-z) \qquad p'(-z) = -p'(z)$$

Si nous différentions l'équation (3) nous aurons

$$(5)\quad p'(z) = -2 \sum \left(\frac{1}{z-w}\right)^3$$

Or, si nous remplaçons $m$ par $m-1$ dans $w$, ce qui est évidemment permis, puisque $m$ prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, nous aurons :

$$p'(z) = -\sum \left[\frac{1}{z + 2\omega - (2m\omega + 2m'\omega')}\right]^3 = p'(z + 2\omega)$$

donc $p'(z)$ admet la période $2\omega$ et par suite aussi $2\omega'$.

Si maintenant nous intégrons l'égalité précédente

$$p(z+2\omega) = p(z) + C$$

Faisons $z = -\omega$ et observons que $p(\omega)$ est nécessairement fini, les pôles de $\xi$, de $p$ et de $p'$ étant seulement les points $w$. Nous aurons alors:

$$p(\omega) = p(-\omega) + C$$

d'où $C = 0$ puisque $p(z)$ est paire ; donc $p(z)$ admet comme période $2\omega$ et par suite aussi $2\omega'$.

Si nous intégrons ensuite l'équation

$$p(z+2\omega) = p(z)$$

il vient :

$$\xi(z+2\omega) = \xi(z) + C$$

$C$ étant encore une constante arbitraire ; en faisant $z = -\omega$, nous aurons

$$C = \xi(\omega) - \xi(-\omega) = 2\,\xi(\omega) = 2\,\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

Nous poserons :

$$\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} = \eta \qquad \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} = \eta'$$

et nous aurons :

$$\xi(z+2\omega) = \xi(z) + 2\eta \qquad \xi(z+2\omega') = \xi(z) + 2\eta'$$

Intégrons enfin l'une de ces deux relations, la première, par exemple,

$$\sigma(z+2\omega) = C\,\sigma(z)\,e^{2\eta z}$$

Faisons encore $z = -\omega$, nous aurons

$$\sigma(+\omega) = C\cdot\sigma(-\omega)\,e^{-2\eta\omega} \quad \text{d'où } C = -e^{2\eta\omega}$$

Nous aurons donc en résumé :

$$(6)\;\left\{\begin{array}{llll} p'(z+2\omega) = p'(z) & p'(z+2\omega') = p'(z) & p(z)+2\omega) = p(z) & p(z+2\omega') = p(z) \\ \xi(z+2\omega) = \xi(z+2\eta & \xi(z+2\omega') = \xi(z)+2\eta' & \eta = \dfrac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} & \eta' = \dfrac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} \\ \sigma(z+2\omega) = -\sigma(z)\,e^{2\eta(z+\omega)} & & \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z)\,e^{2\eta'(z+\omega')} & \end{array}\right.$$

Observons encore que les constantes $\eta\omega$, $\eta'\omega'$ ne sont pas indépendantes en effet la fonction $\xi$ se reproduit augmentée de $2\eta$ ou de $2\eta'$ quand on augmente l'argument $z$ de $2\omega$ ou de $2\omega'$; donc la somme des résidus de $\xi$ dans $P$ est égale à :

$$\frac{2\eta\omega' - 2\eta'\omega}{i\pi}$$

Ainsi $\zeta$ n'a qu'un pôle simple dans chaque parallélogramme ; donc la somme des résidus est $+1$ et on a :

$$(7) \qquad 2\eta\omega' - 2\eta'\omega = i\pi$$

**III — Propriétés de la fonction $\sigma$.** — La fonction $p(z)$ est doublement périodique et admet un pôle double $z=0$ ; c'est par conséquent une fonction elliptique.

1° Nous savons que $p(z)$ est paire ; il en résulte que son développement dans le domaine de l'origine, suivant la série de Laurent, est de la forme :

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + Az^2 + Bz^4 + \ldots\ldots$$

On en conclut, par intégration en n'introduisant aucune constante, parce que $\zeta - \frac{1}{z}$ est impair

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + mz^3 + nz^5 + \ldots.$$

Or on a d'autre part, pour $\sigma(z)$.

$$\sigma(z) = z(1 + az^2 + bz^4 + \ldots\ldots) \qquad \sigma'(z) = 1 + 3az^2 + 5bz^4 + \ldots\ldots$$

Substituons ces développements dans $\sigma'(z) = \zeta(z)\sigma(z)$, il vient :

$$(1 + az^2 + bz^4 + \ldots\ldots)(1 + mz^4 + nz^6 + \ldots\ldots) = 1 + 3az^2 + 5bz^4 + \ldots\ldots$$

En égalant les termes en $z^2$, on obtient $a=0$. Donc le second terme manque dans le développement de $\sigma(z)$. Cette lacune constitue une des propriétés importantes de $\sigma(z)$.

2° La fonction $p(u) - p(v)$ où $v$ est un paramètre quelconque est doublement périodique ; elle admet le zéro $u=v$ ; elle admet aussi $u=-v$ puisque $p$ est une fonction paire ; elle n'en admet aucun autre puisque la fonction n'a qu'un pôle double et possède par suite deux zéros, (la somme des ordres étant nulle).

La fonction $H = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)}$ a évidemment les mêmes zéros et les mêmes pôles ; elle est d'ailleurs doublement périodique, car

$$H(u+2\omega) = \frac{\sigma(u+2\omega+v)\;\sigma(u+2\omega-v)}{\sigma^2(u+2\omega)} = \frac{\sigma(u+v)\,e^{2\eta(u+v+\omega)}\sigma(u-v)\,e^{2\eta(u-v+\omega)}}{\sigma(u)\,e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)\,e^{2\eta(u+\omega)}} = H(u)$$

et de même $H(u+2\omega') = H(u)$. Ceci posé, le rapport $\frac{p(u)-p(v)}{H(u)}$ admet les mêmes périodes ; il n'a aucun pôle dans $P$ ; donc il se réduit à une constante $C$, et on a :

$$C\left[p.u - p.v\right] = \frac{\sigma(u+v).\,\sigma(u-v)}{\sigma^2.\,u}$$

Pour déterminer $C$, remplaçons $p$ et $\sigma$ par leurs développements en série

$$C\left(-p.v + \frac{1}{u^2} + Au^2 + \ldots.\right)u^2(1 + bu^4 + \ldots)^2 = \sigma(u+v).\,\sigma(u-v).$$

et faisons $u=0$, on a immédiatement $C=-\sigma^2 v$. D'où :

$$(8)\quad p(v)-p(u) = \frac{\sigma(u+v).\sigma(u-v)}{\sigma^2 u.\sigma^2 v.}$$

Nous connaissons maintenant les propriétés essentielles de la fonction $\sigma(z)$, elles contiennent toute la théorie des fonctions doublement périodiques (Voir Halphen : Fonctions elliptiques Tm I page 184) On peut les résumer dans le tableau suivant

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma(z) = z\prod'\left(1-\frac{z}{w}\right)e^{\frac{z}{w}+\frac{z^2}{2w^2}} \qquad \sigma(z) = z+az^5+bz^7+\ldots.. \\ \sigma(z+2\omega) = -\sigma(z)e^{2\eta(z+\omega)} \qquad \sigma(z+2\omega') = -\sigma(z)e^{2\eta'(z+\omega')} \\ \dfrac{\sigma(u+v).\sigma(u-v)}{\sigma^2 u.\sigma^2 v} = pv-pu \end{cases}$$

Toutes les propositions que nous avons rencontrées ou que nous rencontrerons en dehors de celles-là en sont des conséquences immédiates.

## IV_ Transformation des périodes.

Les deux périodes $2\omega, 2\omega'$ donnent lieu à un réseau de parallélogrammes et tous les points de périodes coïncident avec les sommets de ce réseau ; on peut du moins, comme nous l'avons vu réaliser cette condition en choisissant convenablement $2\omega, 2\omega'$ ; on dit alors que les deux périodes sont primitives. _ Un même réseau peut d'ailleurs être constitué d'une infinité de manières. Si en effet nous désignons par $p, q, p', q'$ des nombres entiers et que nous posions :

$$(10)\quad \tilde{\omega} = p\omega+q\omega \qquad \tilde{\omega}' = p\omega'+q'\omega'$$

$2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}'$ seront deux périodes qui pourront servir à construire un certain réseau ; il est bien évident que tous les points du réseau $(\tilde{\omega},\tilde{\omega}')$ appartiendront au réseau $(\omega\,\omega')$ ; or si nous supposons $pq'-qp'=\pm 1$ il est clair que l'on aura

$$\omega = p_1\tilde{\omega}+q_1\tilde{\omega}' \qquad \omega' = p_1'\tilde{\omega}+q_1'\tilde{\omega}'$$

$p_1\, q_1\, p_1'\, q_1'$ étant des nombres entiers parfaitement déterminés ; donc tous les sommets de $(\omega\,\omega')$ appartiendront au réseau $(\tilde{\omega}\,\tilde{\omega}')$ en d'autres termes $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ seront deux nouvelles périodes primitives et les deux réseaux coïncideront. _ Quand on passera d'un système de périodes à un autre à l'aide de la substitution (10) la fonction $\sigma$ restera identique à elle même, puisque les zéros qui figurent dans le produit $\Pi$ resteront les mêmes, leur ordre seul étant modifié. On peut s'en assurer directement en remarquant que lorsque le couple de nombres entiers $(m, m')$ passe une fois et une seule par toutes les valeurs possibles il en est de même du couple $(pm+qm', p'm+q'm')$ pourvu qu'on ait $pq'-qp'=\pm 1$.

## V_ Expression générale des fonctions de troisième espèce.

Les propriétés de la fonction $\sigma(z)$ conduisent naturellement à envisager sous un point de vue plus général la notion de la double périodicité ; nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est de troisième espèce lorsqu'elle satisfera aux deux conditions_

suivantes

$$(1)\qquad f(z+2\omega)=e^{2\lambda z+\mu}f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=e^{2\lambda' z+\mu'}f(z)$$

Dans le cas où $\lambda=\lambda'=0$, la fonction se reproduit multipliée par une constante quand on augmente l'argument de $2\omega$ ou de $2\omega'$ ; nous dirons alors que la fonction est de seconde espèce ; on aura alors :

$$(2)\qquad f(z+2\omega)=e^{\mu}f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=e^{\mu'}f(z)$$

Enfin nous conserverons le nom de fonction doublement périodique pour le cas où $\mu=\mu'=0$ c'est-à-dire où l'on a :

$$(3)\qquad f(z+2\omega)=f(z) \qquad\qquad f(z+2\omega')=f(z)$$

Les fonctions de troisième espèce comprennent toutes les autres comme cas particuliers ; d'autre part, il suffit d'envisager la fonction $\frac{d}{dz}Lf(z)$ pour être ramené dans tous les cas, aux fonctions doublement périodiques ; nous en conclurons que la restriction imposée aux périodes, d'avoir un rapport imaginaire, doit être étendue aux fonctions uniformes de seconde et de troisième espèce.

Cherchons l'expression générale des fonctions fractionnaires qui satisfont aux relations (1) — Soient $a_1, a_2, \ldots a_p$ les zéros de $f(z)$ dans $P$ ; soient de même $b_1 b_2 \ldots b_p$ ses pôles ; les $a$ aussi bien que les $b$ peuvent être distincts ou non. Si nous considérons la fonction

$$\varphi(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\sigma(z-b_q)}$$

le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ sera une fonction fractionnaire n'ayant aucun pôle ni aucun zéro dans le plan ; on peut donc le représenter par $e^{G(z)}$, $G(z)$ étant une fonction entière, et on aura par suite

$$f(z)=\varphi(z)e^{G(z)}$$

On en déduira :

$$\frac{d}{dz}\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{d}{dz}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=G''(z)$$

Mais $\varphi$ est évidemment une fonction de troisième espèce ; donc le premier membre de l'égalité précédente est doublement périodique ; la fonction $G''(z)$ étant doublement périodique et entière doit se réduire à une constante ; donc enfin $G(z)$ est un trinôme du second degré, et on aura :

$$(4)\qquad f(z)=e^{Az^2+Bz+C}\,\frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\sigma(z-b_q)}$$

Telle est l'expression générale des fonctions doublement périodiques. Il faut

exprimer ABC en fonction de $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$. — Si nous posons

$$(5) \qquad E = a_1 + a_2 + \dots + a_p - b_1 - b_2 - \dots - b_q$$

lorsque nous remplacerons $z$ par $z + 2\omega$, le second membre de l'équation (4) se reproduira multiplié par l'exponentielle :

$$(-1)^{p-q} e^{4A\omega^2 + 4A\omega z + 2B\omega + 2\eta\left[(p-q)z + (p-q)\omega - E\right]}$$

On devra donc avoir identiquement, K étant un nombre entier

$$4A\omega^2 + \left[4A\omega + 2\eta(p-q)\right]z + 2B\omega + 2\eta(p-q)\omega - 2\eta E + i(p-q)\pi = 2\lambda z + \mu + 2iK\pi$$

d'où deux groupes de relations dont le second s'obtiendra en accentuant les lettres

$$(6) \qquad 2A\omega + \eta(p-q) = \lambda \qquad\qquad 2A\omega' + \eta'(p-q) = \lambda'$$

$$(7) \quad 2\lambda\omega + 2B\omega - 2\eta E + i\pi(p-q) = \mu + i2K\pi \qquad 2\lambda'\omega' + 2B\omega' - 2\eta' E + i\pi(p-q) = \mu' + 2iK'\pi$$

La constante C reste arbitraire ; les équations (6) et (7) permettent de déterminer A et B, et fourniront en même temps deux équations de condition que nous allons former.

Les équations (6) donnent en éliminant A :

$$(8) \qquad \lambda\omega' - \lambda'\omega = (p-q)(\eta\omega' - \eta'\omega) = \frac{i\pi(p-q)}{2}$$

On aura de même en éliminant $b$ à l'aide des équations (7)

$$H = 2(\lambda - \lambda')\omega\omega' + i\pi(p-q)(\omega' - \omega) - Ei\pi + \mu\omega' - \mu'\omega = 2i\pi(K\omega' - K'\omega)$$

## II — Expression générale des fonctions de seconde espèce. —

Si dans l'équation (8) nous faisons $\lambda = \lambda' = 0$, nous obtenons immédiatement $p - q = 0$. Donc, le nombre des pôles doit être égal au nombre des zéros.

L'équation (9) donne ensuite :

$$(10) \qquad -E\,i\pi \equiv \mu\omega' - \mu'\omega$$

le signe $\equiv$ indiquant qu'on néglige des multiples entiers des périodes.

Les équations (6) donnent alors $A = 0$, et la première équation (7) devient

$$(11) \qquad 2B\omega - 2\eta E = \mu + 2iK\pi$$

ce qui détermine B sans ambiguïté. En résumé on aura pour les fonctions de seconde espèce :

$$(12) \qquad f(z) = e^{Bz + C} \frac{\sigma(z - a_1)\,\sigma(z - a_2) \dots \sigma(z - a_p)}{\sigma(z - b_1)\,\sigma(z - b_2) \dots \sigma(z - b_p)}$$

avec la condition

$$(13) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_p - a_1 - a_2 \dots - a_p \equiv \frac{\mu\omega' - \mu'\omega}{i\pi}$$

La relation (13) est due à M^r Hermite.

## III — Expression générale des fonctions doublement périodiques.

Si nous faisons $\mu = \mu' = 0$ dans les relations précédentes, la formule (10) nous donne d'abord $E = 0$ ; l'équation (11) nous donne ensuite $B = \frac{ik\pi}{\omega}$ et comme on devra avoir de même $B = \frac{ik'\pi}{\omega'}$ on en déduira

$$k\omega' = k'\omega$$

d'où $k = 0$ $k' = 0$ d'où enfin $B = 0$. Donc les formules générales se réduisent alors à

$$f(z) = C \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-b_2)\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$$

avec la condition unique

$$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_p = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_p.$$

Cette relation remarquable dont la relation (13) est la généralisation a été donnée par Liouville ; elle permet de calculer un pôle quand on connaît tous les autres et les zéros de la fonction.

La discussion qui précède peut se résumer dans le tableau suivant :

| | Espèce | Expression générale | Équations de condition |
|---|---|---|---|
| | $f(z+2\omega) = e^{2\lambda z+\mu} f(z)$ <br> $f(z+2\omega') = e^{2\lambda' z+\mu'} f(z)$ | $f(z) = e^{Az^2+Bz+C} \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\,\ldots\ldots\,\sigma(z-b_q)}$ | $\lambda\omega' - \lambda'\omega = \frac{i\pi}{2}(p-q)$ <br> $H = 2i\pi(K\omega' - K'\omega)$ |
| (14) | $f(z+2\omega) = e^{\mu} f(z)$ <br> $f(z+2\omega') = e^{\mu'} f(z)$ | $f(z) = e^{Bz+C} \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$ | $E = \frac{\mu'\omega - \mu\omega'}{i\pi}$ <br> $p = q$ |
| | $f(z+2\omega) = f(z)$ <br> $f(z+2\omega') = f(z)$ | $f(z) = C \frac{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-a_2)\ldots\sigma(z-a_p)}{\sigma(z-b_1)\ldots\ldots\ldots\sigma(z-b_p)}$ | $E = 0$ $p = q$ |

# Douzième Leçon

## Propriétés des fonctions doublement périodiques.

**I — Décomposition en éléments simples.** — Mr Hermite a donné, pour les fonctions de première et de seconde espèce, une expression analytique où les pôles sont mis en évidence et qui est analogue à la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples.

Toute fonction rationnelle peut s'exprimer linéairement à l'aide d'un élément simple $\frac{1}{z-a}$ et de ses dérivées ; une fonction doublement périodique peut être exprimée de la même manière à l'aide d'un élément simple convenablement choisi et des dérivées de cet élément. Considérons d'abord une fonction de première espèce ; la fonction $\zeta(z-a)$ a un pôle unique dans P et le résidu correspondant est l'unité, nous prendrons $\zeta(z-a)$ comme élément simple.

Soient $x$ et $b$ deux constantes contenues dans P et considérons la fonction

$$F(z) = f(z)\left[\zeta(z-x) - \zeta(z-b)\right]$$

Cette fonction est uniforme, fractionnaire, et doublement périodique, car la constante $2\eta$ ou $2\eta'$, qui s'introduit dans $\zeta(z-x)$ par l'addition d'une période, détruit celle qui s'introduit dans $\zeta(z-b)$ ; $F(z)$ admet les $p$ pôles de $f(z)$, que nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots a_p$, et possède en outre les deux pôles simples $x$ et $b$.

Exprimons que la somme des résidus correspondant à ces $p+2$ pôles est égale à 0.

1° Le résidu correspondant à $x$ est $f(x)$ ;

2° Le résidu correspondant au pôle $b$ est $-f(b)$

3° Cherchons maintenant le résidu correspondant à un pôle $a$ de $f(z)$ ; on a, dans le domaine de $a$, $\alpha$ étant le degré du pôle :

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{A}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha}} + B + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \cdots\cdots$$

$$\zeta(x-z) = \zeta(x-a) - (z-a)\zeta'(x-a) + \cdots\cdots \pm \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}\zeta^{(n)}(x-a) + \cdots\cdots\cdots$$

$$\zeta(b-z) = \zeta(b-a) - (z-a)\zeta'(b-a) + \cdots\cdots \pm \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}\zeta^{(n)}(b-a) + \cdots\cdots\cdots$$

Formons le produit $f(z)\left[\zeta(x-z) - \zeta(b-z)\right]$ ; dans ce produit, le coefficient

du terme $\frac{1}{z-\alpha}$ sera le résidu cherché ; or on voit immédiatement qu'il est égal à

$$A\left[\xi(z-a)-\xi(b-a)\right]+A_1\left[\xi'(x-a)-\xi'(b-a)\right]+\dots+A_{\alpha-1}\left[\xi^{(\alpha-1)}(x-a)-\xi^{(\alpha-1)}(b-a)\right]$$

Si nous appliquons le théorème des résidus, nous aurons la relation cherchée savoir :

$$f(x)-f(b)=\sum\left[A\xi(x-a)+A_1\xi'(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(x-a)\right]$$
$$-\sum\left[A\xi(b-a)+A_1\xi'(b-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(b-a)\right]$$

le signe $\Sigma$ indiquant qu'on doit affecter $\underline{a}$ des indices 1.2... $p$ et faire la somme des résultats. Si on réunit en une constante $C$ les termes indépendants de $x$, et qu'on remplace $x$ par $z$, on a la formule de M.r Hermite.

$$(1)\qquad f(z)=C+\sum\left[A\xi(z-a)+A_1\xi'(z-a)+\dots+A_{\alpha-1}\xi^{(\alpha-1)}(z-a)\right]$$

La question se résout d'une manière analogue pour une fonction de seconde espèce aux multiplicateurs $K$ et $K'$. Si on considère la fonction

$$\varphi(z)=Ce^{\rho z}\frac{\sigma(z+b)}{\sigma(z)}$$

elle admet un pôle unique $z=0$ dans $P$ ; le résidu correspondant est $C\sigma(b)$ si on veut qu'il soit égal à l'unité on devra poser

$$\varphi(z)=e^{\rho z}\frac{\sigma(z+b)}{\sigma(z)\cdot\sigma(b)}$$

enfin nous supposons qu'on a déterminé $\rho$, ce qui est possible, de telle sorte que $\varphi(z)$ admette les multiplicateurs $k$, $k'$ ; dans ces conditions $\varphi(z)$ satisfait à toutes les conditions voulues pour jouer le rôle d'élément fondamental. Considérons alors la fonction

$$F(z)=f(z)\,\varphi(x-z)$$

Elle est doublement périodique ; on a en effet :

$$F(z+2\omega)=k\,f(z)\times\frac{1}{k}\varphi(x-z)=F(z)$$
$$F(z+2\omega')=k'f(z)\times\frac{1}{k'}\varphi(x-z)=F(z)$$

Si nous écrivons que la somme des résidus est nulle dans $P$ pour la fonction $F(z)$ et si nous remarquons que le résidu au pôle $x$ est $f(x)$ nous aurons immédiatement la formule de M.r Hermite, savoir :

$$(2)\qquad f(x)=\sum\left[A\varphi(x-a)+A_1\varphi'(x-a)+\dots+A_{\alpha-1}\varphi^{(\alpha-1)}(x-a)\right]$$

Nous nous limiterons dans ce qui va suivre aux fonctions doublement périodiques et nous serons amenés à donner une nouvelle forme à la relation (15) en y introduisant la fonction elliptique $p(z)$. Mais nous devons compléter d'abord les propriétés de la fonction $p(z)$.

**II — Étude de la fonction $p(z)$.** — Nous savons que $p(z)$ est liée algébriquement à sa dérivée, et que de plus elle possède un théorème d'addition. Nous allons le démontrer directement et former ces deux relations.

1° Equation différentielle. La relation entre $p(z)$ et $p'(z)$ est aisée à obtenir. En effet, les trois équations

$$(3) \qquad p'(z+2\omega) = p'(z) \qquad p'(z+2\omega+2\omega') = p'(z) \qquad p'(z+2\omega') = p'(z)$$

donnent immédiatement en tenant compte de ce que $p'(z)$ est une fonction impaire

$$p'(\omega) = 0 \qquad p'(\omega+\omega') = 0 \qquad p'(\omega') = 0$$

D'ailleurs $p'$ a un pôle triple unique dans $P$ et par suite ne peut avoir d'autres zéros que $\omega$ $\omega'$, $\omega+\omega'$. Posons alors:

$$(4) \qquad p(\omega) = e_1, \qquad p(\omega+\omega') = e_2 \qquad p(\omega') = e_3$$

et considérons la fonction doublement périodique

$$\varphi(z) = [p(z) - e_1]\,[p(z) - e_2]\,[p(z) - e_3]$$

$\omega$ annule le premier facteur $p(z) - e_1$ et aussi sa dérivée $p'(z)$; c'est donc un zéro double de $\varphi(z)$; de même $\omega'$ et $\omega+\omega'$. $\varphi(z)$ admet donc trois zéros doubles et un pôle sextuple $z=0$; elle a donc mêmes zéros et mêmes pôles que $p'^2(z)$; on a donc en désignant par $C$ une constante.

$$(5) \qquad p'^2 = C\,(p-e_1)\,(p-e_2)\,(p-e_3)$$

il s'agit simplement de déterminer $C$. Or si nous nous plaçons dans le domaine de l'origine, nous aurons:

$$p = \frac{1}{z^2} + Az^2 + Bz^4 + \ldots\ldots \quad p' = -\frac{2}{z^3} + 2Az + 4Bz^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions les deux membres de (19) par $z^6$ nous pourrons écrire:

$$4(1 - Az^4 - 2Bz^6 + \ldots\ldots)^2 = C(-e_1z^2 + 1 + Az^4 + \ldots\ldots)(-e_2z^2 + 1 + Az^4 + \ldots\ldots)(-e_3z^2 + 1 + Az^4 \ldots)$$

et en faisant $z=0$ $C=4$. Observons en outre que le terme en $z^2$ manque au premier membre; on doit donc avoir $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. En résumé on a les deux relations

$$(6) \qquad p'^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

La première des relations (20) peut s'écrire

$$(7) \qquad p'^2(z) = 4p^3(z) - g_2\,p(z) - g_3$$

en posant

$$(8) \qquad -g_2 = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 \qquad g_3 = e_1e_2e_3$$

Nous déduirons de l'équation (21) une conséquence importante; si on la différentie, il vient:

$$(9) \qquad 2p''(z) = 12\,p^2(z) - g_2$$

Dérivons de nouveau

$$p'''(z) = 12\,p(z)\,p'(z) \qquad p^{IV}(z) = 12\,p'^2(z) + 12\,p(z)\,p''(z).$$

Si nous remplaçons $p'^2$ et $p''$ par leurs valeurs en fonction de $p(z)$, $p^{IV}(z)$ se trouvera exprimé rationnellement en fonction de $p(z)$ ; et ainsi de suite. En résumé, toutes les dérivées à partir de la seconde inclusivement s'expriment rationnellement en fonction de $p(z)$, $p'(z)$.

2° ___ Théorème d'addition. ___. Nous partirons de l'équation :

$$\frac{\sigma(u+v)\,.\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,.\,\sigma^2 v} = p(v) - p(u)$$

Différentions la par logarithmes, d'abord par rapport à $u$, puis par rapport à $v$, et ajoutons :

$$(10) \qquad 2\zeta(u+v) - 2\zeta(u) - 2\zeta(v) = \frac{p'(v) - p'(u)}{p(v) - p(u)}$$

différentions de nouveau par rapport à $u$, puis par rapport à $v$ et ajoutons

$$-2p(u+v) + 2p(u) = \frac{-p''(u)(pv - pu) + p'u(p'v - p'u)}{(pv - pu)^2}$$

$$-2p(u+v) + 2p(v) = \frac{p''v(pv - pu) - p'v(p'v - p'u)}{(pv - pu)^2}$$

$$-4p(u+v) + 2pu + 2pv = \frac{(pv - pu)(p''v - p''u) + 2p'u.p'v - p'^2u - p'^2v}{(pv - pu)^2}$$

ou simplement

$$-4p(u+v) + 2pu + 2pv = \frac{p''v - p''u}{pv - pu} - \left(\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right)^2$$

Mais

$$p''u = 6p^2u - \frac{g_2}{2} \qquad p''v = 6p^2v - \frac{g_2}{2} \qquad p''v - p''u = 6(p^2v - p^2u)$$

Donc

$$4p(u+v) - 2pu - 2pv = \left(\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right)^2 - 6pu - 6pv$$

ou enfin

$$(11) \qquad p(u+v) = -\left[p(u) + p(v)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right]^2$$

Il suffirait maintenant d'éliminer les dérivées $p'u$, $p'v$ à l'aide de l'équation différentielle ; on obtiendrait évidemment une relation algébrique entre $p(u+v)$ $pu$ et $pv$.

## VI — Autre expression des fonctions doublement périodiques

La formule de Mr Hermite qui exprime linéairement $f(z)$ à l'aide de la fonction

$\zeta$ et de ses dérivées se prête avec une extrême facilité aux questions d'intégration des fonctions doublement périodiques. Nous allons montrer, conformément à un théorème de Liouville, que $f(z)$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de $p z$ et $p' z$ et nous serons conduits à une nouvelle forme très commode au point de vue des transformations algébriques.

La formule (10) donne:

$$\zeta(z-a) = \zeta(z) - \zeta(a) + \frac{1}{2}\frac{p'(z)+p'(a)}{p(z)-p(a)}$$

$\zeta(z-a)-\zeta(z)$ s'exprime donc rationnellement en fonction de $p(z)$ et $p'(z)$; comme d'ailleurs $p''(z)$, $p'''(z)$ ..... sont dans le même cas, il en sera de même de toutes les dérivées successives de $\zeta(z-a)$; si nous nous reportons alors à la formule de Mr Hermite, nous en concluerons que toute fonction $f(z)$ doublement périodique s'exprime rationnellement à l'aide de $p(z)$ et $p'(z)$[1]. On aura donc:

$$f(z) = \frac{P(p, p')}{P_1(p, p')}$$

$P P_1$ étant des polynômes entiers; si alors on remplace partout $p'^2$ par sa valeur en fonction de $p$, on obtiendra une expression $f(z)$ de la forme:

$$\frac{M + N p'(z)}{M_1 + N_1 p'(z)}$$

$M, N, M_1, N_1$ étant des polynômes entiers par rapport à $p$; enfin, en multipliant haut et bas par $M_1 - N_1\, p'(z)$ on arrivera à la forme définitive

$$(12) \qquad f(z) = A + B\, p'(z)$$

$A, B$ étant deux fonctions rationnelles de $p(z)$. Lorsqu'on aura ramené deux fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$ à la forme précédente, il suffira d'éliminer $p$, $p'$ entre les deux relations obtenues et l'expression (21) pour avoir la relation algébrique qui lie $f(z)$ et $\varphi(z)$; et nous trouvons ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème: que deux fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes sont liées par une équation algébrique.

**VII. — Propriétés des fonctions elliptiques. —** Les propriétés fondamentales de $p(z)$ appartiennent à toutes les fonctions à deux pôles ou fonctions elliptiques; soient $\alpha, \beta$ les deux pôles, $z_1$ l'affixe d'un point du parallélogramme, la fonction $f(z) - f(z_1)$ sera, comme $f(z)$, doublement périodique et aura les mêmes pôles; un de ses deux zéros sera évidemment $z_1$; donc l'autre sera $\alpha+\beta-z_1$ on aura donc $f(\alpha+\beta-z_1) - f(z_1) = 0$; si nous remarquons que $z_1$ est quelconque nous sommes conduits à l'équation:

$$(13) \qquad f(\alpha+\beta-z) = f(z)$$

C'est la généralisation de $p(-z) = p(z)$ puisqu'on a alors $\alpha = \beta = 0$.

---

[1] Il y aurait un terme de la forme $A\zeta(z)$, $A$ étant une constante; mais ce terme $A\zeta(z)$ ne peut être doublement périodique que si $A=0$, puisque par l'addition de $2\omega$ il augmente de $2A\eta$.

Considérons maintenant $f'(z)$. Nous aurons

$$f'(\alpha+\beta-z) = -f'(z)$$

Si donc nous faisons $z = \frac{\alpha+\beta}{2}$ nous aurons:

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Or $f'$ ne devient pas infini tant que $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ne coïncide ni avec $\alpha$, ni avec $\beta$, c'est-à-dire tant que $\alpha-\beta \neq 0$. En ce cas on a nécessairement:

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

On a de même, en faisant $z = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde\omega\right)$, $\tilde\omega$ étant une demi période quelconque

$$f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \tilde\omega\right) = -f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde\omega\right) = f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde\omega\right)$$

et par suite $\frac{\alpha+\beta}{2} + \tilde\omega$ est encore un zéro de $f'(z)$; on connait donc trois des zéros de $f'(z)$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}+\omega \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}+\omega'$$

le 4e s'en déduit aisément car $f'(z)$ admet les deux pôles doubles $\alpha, \beta$ le dernier zéro est donc $\frac{\alpha+\beta}{2} + \omega + \omega'$. Ceci posé, considérons la fonction

$$\varphi(z) = \left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\omega\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\omega'\right)\right]\left[f(z) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\omega+\omega'\right)\right]$$

Chacun de ces facteurs admet un zéro de $f'(z)$ a pour dérivée $f'(z)$; donc le zéro de chaque facteur en double; $\varphi(z)$ est donc une fonction à 8 pôles admettant les mêmes zéros que $f'^2(z)$; elle admet évidemment deux pôles quadruples $\alpha, \beta$, comme $f'^2(z)$; donc on a:

$$f'^2(z) = C\varphi(z)$$

$C$ étant une constante. Ainsi la fonction $f(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(14) \qquad f'^2 = Af^4 + Bf^3 + Cf^2 + Df + H$$

Nous avons supposé $\alpha-\beta \neq 0$ — Supposons maintenant $\alpha = \beta$; en pareil cas la dérivée admet un pôle triple $\alpha$; elle a encore les trois zéros $\alpha+\omega$, $\alpha+\omega'$, $\alpha+\omega+\omega'$ en raisonnant comme précédemment on est conduit à l'équation

$$(15)\quad f'^2 = A\left[f(z) - f(\alpha+\omega)\right]\left[f(z) - f(\alpha+\omega')\right]\left[f(z) - f(\alpha+\omega+\omega')\right]$$

qui est seulement du troisième degré; c'est le cas de la fonction $p(z)$.

**VIII** ——. La formule précédemment obtenue

$$f(z) = A + B\,p'(z)$$

subsiste quand $p(z)$ est une fonction elliptique quelconque. Ce théorème plus général est dû à Liouville; on peut encore le généraliser et énoncer le théorème suivant:

**Théorème.** ——. Toute fonction doublement périodique $v$ peut être exprimée à l'aide de toute autre fonction $u$ aux mêmes périodes primitives, et à $n$ pôles, par une relation de la forme :

$$(16) \qquad v = P_0 + P_1 u' + P_2 u'^2 \ldots + P_{n-1} u'^{n-1}$$

$P_0, P_1 \ldots P_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de $u$.

Nous suivrons la même marche (voir Jordan, cours d'analyse T.II p )
que pour le théorème général démontré page 95). Considérons la fonction

$$F(z) = A_{n-1} u'^{n-1} + A_{n-2} u'^{n-2} \quad + A_1 u' + A_0 - Bv$$

$A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$ $B$ étant des polynômes entiers en $u$, soit $n'$ le nombre des pôles de $v$, $h$ le degré de $B$ ; les $n+1$ polynômes sont à coefficients indéterminés. Le terme $Bv$ a $n'+nh$ pôles ; $u'^K$ a au plus $2nK$ pôles, car le nombre de pôles de $u'$ ne peut que diminuer si quelques uns des pôles de $u$ se confondent ; nous supposerons dès lors que $A_k$ est du degré $h-2k$ et le nombre de pôles de $A_k u'^K$ sera au plus égal à $nh$. (Dans ces conditions $F(z)$ sera une fonction méromorphe, doublement périodique et à $(nh+n')$ pôles. Si nous écrivons que dans son expression analytique tous les termes fractionnaires disparaissent, et que de plus $F(z_0)=0$, nous aurons

$$nh + n' + 1$$

équations linéaires, homogènes entre les coefficients des polynômes inconnus. Or le nombre total de ces coefficients est

$$h + h + (h-2) + (h-4) \quad + (h-2n-2) = nh + h - n(n-1)$$

Il existera donc un système de coefficients qui ne seront pas tous nuls si $\underline{h}$ est choisi de telle sorte que l'on ait plus d'inconnues que d'équations c'est-à-dire

$$nh + n' + 1 < nh + h - n(n-1)$$

ou

$$h > n' + 1 + n(n-1)$$

Il est évident qu'on peut toujours satisfaire à cette condition. Mais alors les coefficients étant remplacés par les valeurs trouvées, $F(z)$ sera entière doublement périodique, et nulle au point $z_0$ ; donc $F(z)$ sera identiquement nulle et on aura :

$$v = \frac{A_0 + A_1 u' + A_2 u'^2 \quad + A_{n-1} u'^{n-1}}{B}$$

formule identique à la formule (16).

---

# Treizième Leçon

## Les fonctions $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ ..... Les fonctions sn, cn, dn.

### I _ Définition des fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. — . Si nous posons

$$\omega_1 = \omega \qquad \omega_2 = \omega + \omega' \qquad \omega_3 = \omega'$$

$$\eta_1 = \eta \qquad \eta_2 = \eta + \eta' \qquad \eta_3 = \eta'$$

et que nous désignions par $\alpha$ l'un quelconque des entiers 1, 2, 3, nous aurons pour exprimer la double périodicité de $\sigma$, la relation

$$\sigma(z + 2\omega_\alpha) = -\sigma(z) e^{2\eta_\alpha(z+\omega_\alpha)}$$

ce qu'on peut écrire en posant $u = z + \omega_\alpha$

$$\sigma(u+\omega_\alpha).e^{-\eta u} = \sigma(\omega_\alpha - u)e^{\eta u}$$

En d'autres termes la fonction $\sigma(u+\omega_\alpha)e^{-\eta u}$ est une fonction paire; nous introduisons le facteur $\frac{1}{\sigma(\omega_\alpha)}$ afin que la fonction se réduise à l'unité pour $z = 0$ et nous aurons:

(1) $$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\eta u} \qquad \sigma_2(u) = \frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')u} \qquad \sigma_3(u) = \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\eta' u}$$

Ces fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ se rattachent immédiatement à la fonction $p(u)$. On a en effet

$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2 u.\ \sigma^2 v}$$

D'où en faisant $v = \omega_\alpha$

$$pu - p(\omega_\alpha) = \frac{\sigma(\omega_\alpha + u)e^{-\eta u}}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha} \cdot \frac{\sigma(\omega_\alpha - u)e^{+\eta u}}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha} = \left(\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}\right)^2$$

Nous poserons naturellement

(2) $$X_1 = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \qquad X_2 = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \qquad X_3 = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 u}$$

et nous aurons

(3) $$pu - e_1 = X_1^2 \qquad pu - e_2 = X_2^2 \qquad pu - e_3 = X_3^2$$

Enfin l'équation

$$p'^2 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)$$

donne, en extrayant la racine, et en faisant $u = 0$ pour lever l'ambiguité du signe

(4) $$p'u = -2 X_1 X_2 X_3$$

**II — Les fonctions $X_1, X_2, X_3$.** — La fonction $X_\alpha^2$ admet les deux périodes $2\omega, 2\omega'$, cela résulte des équations (3) on aura donc, $\beta$ étant égal à [illegible]

$$X_\alpha(u+2\omega_3) = \mathcal{E}\,X_\alpha(u)$$

$\mathcal{E}$ étant égal à $\pm 1$. Pour déterminer $\mathcal{E}$, faisons $u = -\omega_3$

$$X_\alpha(\omega_\beta) = \mathcal{E}\,X_\alpha(-\omega_3)$$

Observons que $X_\alpha$ est impair, puisque $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ sont paires et $\sigma$ impaire; en outre les zéros de $X_\alpha$ sont donnés par $\omega_\alpha + 2m\omega + 2m'\omega'$; si donc $\alpha - \beta \neq 0$, $X(\omega_\beta)$ ne sera ni nul ni infini, on aura donc $\mathcal{E} = -1$

Si $\beta = \alpha$ le raisonnement ne s'applique plus; mais on a alors, en dérivant

$$X'_\alpha(u+2\omega_\alpha) = \mathcal{E}\,X'_\alpha(u)$$

faisons $u = -\omega_\alpha$ et observons que $\omega_\alpha$ étant un zéro simple de $X_\alpha$ n'annule pas $X'_\alpha$; que de plus $X'$ est paire, nous aurons alors $\mathcal{E} = +1$.

Ainsi $X_1, X_2, X_3$ sont trois fonctions de seconde espèce, aux multiplicateurs $+1, -1$; il en est de même des douze rapports qu'on peut former en combinant deux à deux les fonctions $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Le tableau suivant résume les périodicité:

(A)

| Fonctions Impaires | | Fonctions Paires | | Multiplicateurs $\omega$ | $\omega+\omega'$ | $\omega'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sigma}{\sigma_1}$ | $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ | $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ | $\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ | $+1$ | $-1$ | $-1$ |
| $\frac{\sigma_2}{\sigma_2}$ | $\frac{\sigma_2}{\sigma_2}$ | $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ | $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ | $-1$ | $+1$ | $-1$ |
| $\frac{\sigma}{\sigma_3}$ | $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ | $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ | $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ | $-1$ | $-1$ | $+1$ |

Revenons aux fonctions $X$; les équations (3) et (4) donnent immédiatement les trois groupes de relations symétriques:

$$(5)\quad X_1^2 + e_1 = X_2^2 + e_2 = X_3^2 + e_3 = p$$

$$(6)\quad X'_1 = -X_2 X_3 \qquad X'_2 = -X_3 X_1 \qquad X'_3 = -X_1 X_2$$

$$(7)\quad (X'_\alpha)^2 = (X_3^2 + e_\alpha - e_\beta)(X_\alpha^2 + e_\alpha - e_\gamma)$$

**Remarque.** — Les fonctions contenues dans le tableau (A) sont de seconde espèce pour les périodes $2\omega, 2\omega'$; comme les multiplicateurs sont $\pm 1$

ou −1, il suffit de doubler l'une des périodes pour que chacune de ces fonctions devienne une fonction elliptique ; les périodes correspondantes aux trois lignes horizontales sont alors respectivement

$$\begin{array}{ll} 4\omega & 4\omega' \\ 4\omega & 2\omega+2\omega' \\ 4\omega & 2\omega' \end{array}$$

**III — Les fonctions $\lambda, \mu, \nu$.** — Au lieu des fonctions $X_1$, $X_2$, $X_3$ on considère ordinairement trois autres des rapports considérés ; on pose :

$$\lambda(u) = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \mu(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \nu(u) = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$$

Ce sont les fonctions elliptiques normales. Les formules (5) (6) (7) donnent en y faisant

$$X_1 = \frac{\mu}{\lambda}, \; X_2 = \frac{\nu}{\lambda}, \; X_3 = \frac{1}{\lambda},$$

$$(8) \quad \mu^2+e_1\lambda^2 = \nu^2+e_2\lambda^2 = 1+e_3\lambda^2$$

ou $\quad (8) \quad \mu^2+(e_1-e_3)\lambda^2 = \nu^2+(e_2-e_3)\lambda^2 = 1$

$$(9) \quad \lambda' = \mu\nu \qquad \mu' = -(e_1-e_3)\lambda\nu \qquad \nu' = -(e_1-e_3)\lambda\mu$$

$$(10) \quad \lambda'^2 = \left[1-(e_1-e_3)\lambda^2\right]\left[1-(e_2-e_3)\lambda^2\right]$$

Observons encore que $\lambda(\mu)$ est impaire, $\mu$ et $\nu$ sont paires. Les propriétés essentielles de ces trois fonctions sont contenues dans le tableau suivant :

| | Parité. | Périodes. | | Zéros. | Pôles. |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda(\mu)$ | Impaire | $4\omega$ | $2\omega$ | $2m\omega+2m'\omega'$ | $2m\omega+(2m'+1)\omega'$ |
| $\mu(u)$ | Paire | $4\omega$ | $2\omega+2\omega'$ | $(2m+1)\omega+2m'\omega'$ | $2m\omega+(2m'+1)\omega'$ |
| $\nu(u)$ | Paire | $2\omega$ | $4\omega'$ | $(2m+1)\omega+(2m'+1)\omega'$ | $2m\omega+(2m'+1)\omega'$ |

Nous ajouterons une dernière remarque. Si on fait la substitution

$$f(z) = \sqrt{e_1-e_3}\,\lambda u \qquad z = u\sqrt{e_1-e_3} \qquad \lambda'(u) = f'(z)$$

qu'on pose en même temps

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = K^2$$

l'équation (10) devient :

$$f'^2(z) = [1 - f^2(z)][1 - K^2 f^2(z)]$$

## III — Addition des arguments.

Nous terminerons ce qui concerne les fonctions elliptiques en donnant leur formule d'addition. La propriété caractéristique de la fonction $\sigma$.

$$(11) \qquad \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v} = pv - pu$$

contient toutes les relations algébriques entre fonctions elliptiques ; on peut en faire disparaître la fonction $p$ et introduire des fonctions $\sigma_\alpha$. On a en effet :

$$pv - pu = pv - e_\alpha - (pu - e_\alpha) = \frac{\sigma_\alpha^2(v)}{\sigma^2 v} - \frac{\sigma_\alpha^2 u}{\sigma^2 u}$$

si nous portons dans la formule précédente, elle devient :

$$(12) \qquad \sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = \sigma^2 u\, \sigma_\alpha^2(v) - \sigma^2 v \,.\, \sigma_\alpha^2 u$$

On peut obtenir un grand nombre de relations analogues à la relation (12). Cherchons d'abord ce qui arrive quand on augmente l'argument d'une demi période dans la fonction $p$. La fonction

$$[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha][pu - e_\alpha]$$

doublement périodique, et on voit immédiatement que 0 est un pôle double du 2e facteur et un zéro double du premier ; les zéros du 2e facteur sont également composés par les pôles du premier ; on en conclut que la fonction précédente se réduit à une constante $C$. On obtiendra cette constante en faisant $u = \omega_\beta$ ; on remarquera en outre que

$$\omega_\alpha + \omega_\beta \equiv \omega_\gamma$$

Le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à une période près, on aura alors

$$(13) \qquad p(u+\omega_\alpha) = e_\alpha + \frac{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)}{pu - e_\alpha}$$

Ceci posé, revenons à l'équation (12). Si nous y augmentons $u$ de $\omega_\alpha$ nous aurons

$$\sigma_\alpha(u+v)\sigma_\alpha(u-v) = \sigma_\alpha^2 u\, \sigma_v^2 \,[pv - p(u+\omega_\alpha)] = \sigma_\alpha^2 u\, \sigma^2 v \left[\frac{\sigma_\alpha^2 v}{\sigma^2 v} - \frac{(e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)\sigma^2 u}{\sigma_\alpha^2 u}\right]$$

en tenant compte des formules (1) et (3). On aura donc, à cause de la relation (13)

$$(14) \quad \sigma_\alpha(u+v)\,\sigma_\alpha(u-v) = \sigma_\alpha^2 u\, \sigma_\alpha^2 v - (e_\gamma - e_\alpha)(e_\beta - e_\alpha)\,\sigma^2 u\, \sigma^2 v$$

On peut enfin obtenir sans difficulté le produit

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma_\alpha(u-v)}{\sigma u\, \sigma_\alpha u}$$

C'est en effet une fonction elliptique aux deux pôles $0, \omega_\alpha$ ; il en est de

est absolument convergent ; on en conclut, en raisonnant comme pour une série, qu'on peut l'évaluer en groupant les facteurs dans un ordre quelconque. En posant $w = 2m\omega + 2m'\omega'$ nous devrons laisser de côté la combinaison $m = m' = 0$ et envisager tous les autres systèmes de valeurs attribuées aux deux entiers $m, m'$.

Considérons d'abord tous les facteurs pour lesquels on a $m' = 0$ ; ils donnent un produit partiel $P_0$ qui est, lui aussi, absolument convergent ; son expression est:

$$P_0 = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{2m\omega}\right) e^{\frac{z}{2m\omega}} \cdot e^{\frac{z^2}{8m^2\omega^2}}$$

ou

$$(1) \qquad P_0 = \frac{2\omega s}{z}\left(\frac{z}{2\omega}\right) e^{\frac{z^2}{8\omega^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2}} = \frac{2\omega}{z}\, s\left(\frac{z}{2\omega}\right) e^{\frac{\pi^2 z^2}{24\omega^2}}$$

à cause des relations démontrées précédemment à l'occasion de la fonction $s(z)$.

Donnons maintenant à $m'$ une valeur fixe, autre que 0 ; désignons par $P_{m'}$ le produit des facteurs correspondants ; nous aurons:

$$P_{m'} = \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(1 - \frac{z}{2m\omega + 2m'\omega'}\right) \cdot e^{\frac{z}{2m\omega+2m'\omega'} + \frac{z^2}{8(m\omega+m'\omega')^2}}$$

nous ne mettons pas d'accent, car la valeur $m = 0$ ne doit plus être écartée ; posons pour un instant

$$(2) \qquad z = 2\omega u \qquad m'\omega' = \omega a$$

nous aurons:

$$P_{m'} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{u+a}\right) e^{\frac{u}{u+a}} \cdot e^{\frac{1}{2}\frac{u^2}{(m+a)^2}}$$

ou encore

$$P_{m_1} = e^{\frac{u^2}{2}\sum_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{(m+a)^2}} \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{u}{u+a}\right)^{\frac{u}{u+a}}$$

ce qui peut s'écrire en vertu des formules relatives à $s(z)$:

$$P_{m'} = e^{-\frac{u^2}{2}\lambda'(a)} e^{u\lambda(a)} \frac{s(a-u)}{s(a)} \qquad \left[\lambda(z) = \frac{s'(z)}{s(z)}\right]$$

et en remplaçant $a$, $u$ par les valeurs (11):

$$(3) \qquad P_{m'} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2\omega}\right)^2 \lambda'\left(m'\frac{\omega'}{\omega}\right)} \cdot \frac{s\left(m'\frac{\omega'}{\omega} - \frac{z}{2\omega}\right)}{s\left(m'\frac{\omega'}{\omega}\right)} e^{\frac{z}{2\omega}\lambda\left(m'\frac{\omega'}{\omega}\right)}$$

Nous pouvons maintenant obtenir $\sigma(z)$ on a en effet

$$\sigma(z) = z \cdot P_0 \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' P_{m'} = z \cdot P_0 \prod_{1}^{\infty} \left(P_{m'} \cdot P_{-m'}\right)$$

Or dans $P_{m'} \cdot P_{-m'}$ les facteurs exponentiels se détruisent ; la fonction $\lambda$ étant impaire nous poserons:

$$(4) \qquad \frac{\pi^2}{6} - \sum_{1}^{+\infty} \lambda'\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right) = l$$

en mettant $n$ au lieu de $m'$ et nous aurons la formule cherchée, savoir :

$$(5) \quad \sigma(z) = 2\omega e^{l\left(\frac{z}{2\omega}\right)^2} \sigma\left(\frac{z}{2\omega}\right) \prod_{1}^{\infty}{}^{n} \left[ \frac{\sigma\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{z}{2\omega}\right)}{\sigma\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right)} \cdot \frac{\sigma\left(n\frac{\omega'}{\omega} + \frac{z}{2\omega}\right)}{\sigma\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right)} \right]$$

On peut introduire dans cette formule des fonctions circulaires ; on a en effet :

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \qquad \sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Il vient alors

$$(6) \qquad \sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{l z^2}{4\omega^2}} \sin\frac{\pi z}{2\omega} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 n\pi\frac{\omega'}{\omega}}\right)$$

II — Expression de $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$. — La formule (6) montre que le produit

$$\sin\frac{\pi z}{2\omega} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2 n\pi\frac{\omega'}{\omega}}\right) = \varphi(z)$$

est convergent pour toute valeur de $z$ et définit une fonction de 3ᵉ espèce de la forme

$$C\,\sigma(z)\, e^{Az^2 + Bz}$$

On peut alors partir de ce résultat et déterminer après coup les constantes $A, B, C$ ; on remarque d'abord que $\varphi(z) : \sigma(z)$ est une fonction paire ce qui donne $B = 0$. On obtient ensuite $C$ en remplaçant $\sigma$ par son développement

$$\sigma(z) = z + a z^6 + b z^7 + \dots\dots\dots$$

divisant par $z$ et faisant $z = 0$. On trouve ainsi $C = \frac{\pi}{2\omega}$. Prenant enfin la dérivée logarithmique et faisant $z = \omega$, on obtient $A = -\frac{\eta}{2\omega}$ on en conclut :

$$\sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi(z)$$

ce qui donne une nouvelle valeur de la constante $l$ ; on a, en comparant à la formule (4)

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda'\left(n\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 2\eta\omega$$

La même méthode permet alors d'avoir $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$, $\sigma_3(z)$ sous forme de produits simples. Un simple changement de la constante $\omega'$ montre que les trois produits

$$(7) \quad \varphi_1 = \cos\frac{\pi z}{2\omega} \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\frac{n\pi\omega'}{\omega}}\right) \quad \varphi_2 = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\omega'}{\omega}}\right) \quad \varphi_3 = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{2\omega}}{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\omega'}{\omega}}\right)$$

sont convergents et définissent des fonctions de troisième espèce ; ces fonctions ont respectivement les mêmes zéros que $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$. — On obtiendra donc $\sigma_\alpha$ en multipliant $\varphi_\alpha$

par une exponentielle de la forme $e^{Az^2+Bz+C}$. — La méthode des coefficients indéterminés fournit les trois constantes par un calcul identique à celui qui précède. On trouve ainsi :

(8) $\sigma(z) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi(z) \quad \sigma_1(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_1(z) \quad \sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_2(z) \quad \sigma_3(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \varphi_3(z)$

Ce qu'on peut résumer dans la formule unique :

$$(9) \qquad e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} = \frac{\pi}{2\omega} \frac{\sigma(z)}{\varphi(z)} = \frac{\sigma_\alpha(z)}{\varphi_\alpha(z)}$$

**Remarques.** — 1° Si on suppose que la période $2\omega'$ augmente indéfiniment par des valeurs imaginaires, nous savons que

$$\frac{1}{\sin^2 n\pi \frac{\omega'}{\omega}}$$

tend vers 0 pour chaque valeur attribuée à $n$ ; il en est évidemment de même des trois exponentielles

$$\frac{1}{\cos^2 n\pi \frac{\omega'}{\omega}} \quad \frac{1}{\cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \frac{\omega'}{\omega}} \quad \frac{1}{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \frac{\omega'}{\omega}}$$

On en conclut que tous les produits $\Pi$ se réduisent à l'unité ; les fonctions $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ dégénèrent respectivement en :

$$\frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \sin\frac{\pi z}{2\omega},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cos\frac{\pi z}{2\omega},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}},\ e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}}$$

et deviennent simplement périodiques ; si la seconde période $2\omega$ devient aussi infinie ces fonctions deviennent $z, 1, 1, 1$.

2° Si on attribue à $z$ des valeurs réelles, on voit que la fonction impaire $\sigma(z)$ n'a d'autres zéros que $0, \pm 2\omega, \pm 4\omega \ldots$ ; elle se comporte comme $\sin\frac{z\pi}{2\omega}$ de même la fonction $\sigma_1(z)$ qui est paire, ne s'annule pour des valeurs réelles de $z$ que si $\omega$ est réel et pour les valeurs qui annuleraient $\cos\frac{\pi z}{2\omega}$, nous pourrons donc dire que cette fonction, pour des valeurs réelles de $z$, se comporte comme $\cos\frac{\pi z}{2\omega}$

Au contraire, $\omega$ étant toujours supposé réel, et par suite $\omega'$ imaginaire, il est visible que $\sigma_2\ \sigma_3$ n'auront pas de zéros réels ; ce sont des fonctions paires ; on en conclut que les fonctions $\lambda(z)$, $\mu(z)$ se comportent respectivement comme un sinus et un cosinus (mais seulement quand $z$ ne prend que des valeurs réelles et que $\omega$ est réel).

## II — Les fonctions $\Theta$.

— Toute fonction de 3e espèce, entière, et ayant un seul zéro $a$ dans le parallélogramme des périodes peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad \varphi(z) = \sigma(z-a)\, e^{Az^2+Bz+C}$$

ce qui, en posant $z-a=u$ peut s'écrire

$$(2)\quad \sigma(u) = \varphi(u+a)\,e^{Mu^2+Nu+P}$$

Il y a donc réciprocité et on en conclut que la fonction $\varphi(z)$ aurait pu, au même titre que la fonction $\sigma$, être prise comme point de départ de la théorie des fonctions doublement périodiques. C'est même ce qui est arrivé en réalité : Abel et Jacobi ont fondé cette théorie sur l'étude des fonctions nouvelles auxquelles nous allons parvenir ; d'après la relation (2) si $\varphi(u)$ est entière et admet la période $2\omega$ elle sera exprimable par une série de Fourier, convergente dans tout le plan et par suite nous aurons résolu le problème que nous avons en vue : exprimer $\sigma$ à l'aide d'une série très simple à termes périodiques. On nomme fonction intermédiaire ou fonction $\Theta$ toute fonction entière qui satisfait aux deux relations

$$(3)\quad \varphi(z+2\omega)=\varphi(z) \qquad \varphi(z+2\omega')=\mu\, e^{2\lambda z}\varphi(z)$$

Une pareille fonction étant de troisième espèce, si on désigne par $K$ le nombre de ses zéros dans un parallélogramme, on aura (page 105)

$$(4)\qquad \lambda = -\frac{iK\pi}{2\omega}$$

Nous allons chercher d'abord l'expression générale des fonctions $\Theta$. En tenant compte de la première des relations (3) on peut écrire

$$(5)\qquad \varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}.$$

et il faut déterminer les coefficients $A_n$. Or on a

$$\varphi(z+2\omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n\, e^{\frac{n\pi z i}{\omega}}\cdot q^{2n} \quad \text{en posant } q=e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$$

D'autre part

$$\mu\, e^{-\frac{iK\pi z}{\omega}}\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu A_n\, e^{\frac{n\pi z i}{\omega}-\frac{K\pi z i}{\omega}}$$

Égalons les termes de même degré dans les deux développements, nous aurons :

$$(6)\qquad \mu A_n = A_{n-K}\cdot q^{2(n-K)}$$

Telle est la loi des coefficients ; elle montre que dans le développement figurent seulement $K$ coefficients arbitraires

$$A_0\ A_1\ A_2 \dots A_{K-1}$$

les autres s'en déduisant par voie de récurrence.

Reste à voir si la série (5) ainsi déterminée est convergente. Il est commode de poser :

$$A_n = q^{\frac{n^2}{K}} B_n$$

la relation (6) devient alors :

$$\mu\, B_n = q^{-K}\, B_{n-K}$$

Nous supposerons pour simplifier $\mu = q^{-K}$ ; on aura simplement

$$(7) \qquad B_n = B_{n-K}$$

Ceci posé considérons $u_n^{\frac{1}{n}}$, $u_n$ étant le terme général de la série ($\rho$) ; $B_n$ est l'une des constantes $B_0\, B_1\, B_{K-1}$ ; son module reste donc fini quand $n$ augmente indéfiniment. Si on pose $\frac{\omega'}{\omega} = \alpha + i\beta$ on a :

$$\left|u_n^{\frac{1}{n}}\right| = \left|B_n\right| \left|e^{\frac{\pi z i}{\omega}}\right| \left|q^{\frac{n}{K}}\right|$$

et la partie de ce module qui varie avec $n$ est $e^{-n\frac{\beta\pi}{K}}$ ; elle tend vers si $\beta$ est positif, ainsi que nous l'avons toujours supposé. Donc la série ($\rho$) est absolument convergente pour toute valeur de $z$ ; elle définit donc bien une fonction intermédiaire.

## IV. – Relations entre les fonctions $\sigma$ et les fonctions $\Theta$. —

Le cas le plus simple est celui où $K = 1$, $B_0 = 1$ on est ainsi conduit à une fonction

$$(8) \qquad F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = 1 + 2 \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

Elle satisfait aux conditions suivantes

$$(9) \quad F(z) = F(-z) \qquad F(z+2\omega) = F(z) \qquad F(z+2\omega') = i\pi\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{q} F(z) e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$$

Si nous faisons dans la seconde de ces relations $z = \omega' - \omega$ et dans la dernière $z = \omega - \omega'$ nous aurons

$$F(\omega+\omega') = F(\omega'-\omega) \qquad F(\omega'+\omega) = \frac{1}{q} F(\omega'-\omega)\, e^{i\pi\left(\frac{\omega'}{\omega}-1\right)} = -F(\omega'-\omega)$$

On en conclut $F(\omega+\omega') = 0$. En d'autres termes la fonction $F(z)$ admet les mêmes zéros que $\sigma_2(z)$ ; il en résulte que $F(z+\omega')$ s'annule pour $z = \omega'$ et par suite aura les mêmes zéros que $\sigma_2(z)$ ; de même $F(z+\omega')$ aura pour zéro $\omega$ et par suite correspondra à $\sigma$ ; enfin $F(z+\omega+\omega')$ aura les mêmes zéros que $\sigma(z)$. Nous poserons alors

$$(10) \quad F_2(z) = F(z) \quad F_3(z) = F(z+\omega) \quad F_1(z) = F(z+\omega') \quad F_0(z) = F(z+\omega+\omega') \quad \sigma(z) = \sigma_0(z)$$

On aura alors

$$\sigma_\alpha(z) = e^{Az^2+Bz+C}\, F_\alpha(z)$$

nous nous bornerons à déterminer $ABC$ pour l'une des valeurs de $\alpha$, par exemple pour $\alpha = 2$

Le calcul se ferait de même dans les autres cas. Prenons donc le cas où $\alpha = 2$. La fonction $F_2$ est paire, aussi bien que $\sigma_2$ ; donc $B = 0$. On a alors

$$(11) \qquad \sigma_2(z) = e^{Az^2+C}\, F(z)$$

comme $\sigma_2(0)=1$, on a d'abord $e^{c}=\frac{1}{F(0)}$. On a ensuite (Tableau page 115)

$$\frac{\sigma_2(z+2\omega)}{\sigma(z+2\omega)} = -\frac{\sigma_2(z)}{\sigma(z)} \qquad \sigma_2(z+2\omega) = e^{2\eta(z+\omega)}\sigma_2(z) \quad \sigma_2(2\omega) = e^{2\eta\omega}$$

On aura donc, en augmentant $z$ de $2\omega$ dans l'identité (11) et égalant les facteurs exponentiels

$$A(z+2\omega)^2 + C = 2\eta z + 2\eta\omega + Az^2 + C + 2ik\pi$$

D'où, en égalant les coefficients de $z$ : $4A\omega = 2\eta$. On aura en définitive

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \cdot \frac{F_2(z)}{F_2(0)}$$

On obtiendra ainsi toutes les exponentielles ; voici les résultats dans les quatre cas que l'on doit considérer

1° $\sigma_2(z)$ – On a

$$F_2(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{F_2(z)}{F_2(0)}$$

2° $\sigma_3(z)$ – On a ici

$$F_3(z) = F_2(z+\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{\frac{n\pi z i}{\omega}} e^{ni\pi} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{n\pi z}{\omega}$$

$$\sigma_3(z) = Fe^{\frac{\eta z^2}{2\omega}} \frac{F_3(z)}{F_3(0)}$$

3° $\sigma_1(z)$ – On a ici

$$F_1(z) = F(z+\omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2+n} e^{\frac{n\pi z i}{\omega} - \frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi z i}{2\omega}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} e^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\pi z i}{\omega}}$$

ou encore :

$$F_1(z) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi z i}{2\omega}} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{m^2}{4}} e^{\frac{m}{2}\frac{\pi z i}{\omega}} \qquad (m \text{ impair})$$

---

 [redacted]

# Quatorzième Leçon.

## Fonctions algébriques

I —— Nous aborderons maintenant l'étude des fonctions multiformes ; celles que nous avons définies (page 15 et suivantes) sont déterminées par une équation de la forme $f(z,u)=0$, $f$ étant une fonction holomorphe par rapport aux deux variables $z, u$ ; nous commencerons par démontrer l'existence de pareilles fonctions implicites, et par préciser leur définition.

Supposons $f(z,u)$ holomorphe pour tous les systèmes de valeurs de $z, u$, appartenant à deux aires données $S, S'$ ; soit $a, b$ un pareil système de valeurs ; si pour $z=a$, $u=b$, la fonction s'annule, je dis que la racine $u=b$ est d'un degré fini de multiplicité. En effet, dans le domaine de $b$, la fonction $f(z,u)$ où $z$ est supposée constante, peut se mettre sous la forme

$$f(z,u) = \varphi_0(z) + (u-b)\varphi_1(z) + (u-b)^2\varphi_2(z) + \dots\dots\dots$$

Si pour $z=a$, $\varphi_0(z)$ s'annule, $b$ devient racine de l'équation ; si tous les $\varphi$ s'annulaient à la fois, la fonction $f(a,u)$ serait d'après ce que nous savons sur les fonctions d'une seule variable, identiquement nulle dans l'aire $S'$. D'autre part on peut écrire de même dans le domaine de $z=a$

$$f(z,u) = \psi_0(u) + (z-a)\psi_1(u) + \dots\dots$$

$\psi_0(u)$ étant égal à $f(a,u)$ serait identiquement nul ; on en conclut que $\frac{f(z,u)}{z-a}$ serait holomorphe dans le domaine de $z=a$ pour toute valeur de $u$ contenue dans $S'$ ; il est clair qu'il en serait de même a fortiori pour les autres valeurs de $z$. Donc la fonction $\frac{f(z,u)}{z-a}$ serait holomorphe dans le champ $S, S'$ ce qu'on peut exprimer en disant que $f(z,u)$ serait divisible par $z-a$. Si donc nous supposons, comme nous le ferons toujours que $f(z,u)$ n'est pas divisible par une fonction de $z$, l'équation $f(z,u)=0$ n'aura pour chaque valeur de $z$ que des racines d'un ordre entier et fini de multiplicité ; ces racines seront d'ailleurs isolées les unes des autres, la fonction $f(z,u)$ où $z$ est constant étant holomorphe par rapport à $u$.

Nous démontrerons maintenant le théorème fondamental sur lequel repose la définition des fonctions implicites.

Théorème —— Si l'équation $f(z,u)=0$ admet pour $z=a$, $n$ racines égales à $b$, pour $z$ voisin de $a$, elle aura $n$ racines, et seulement $n$, voisines de $b$.

En d'autres termes étant donné un cercle de rayon $r$ décrit du point $b$ comme centre, on pourra, pourvu que $r$ soit inférieur à une certaine

limite lui faire correspondre un cercle de centre $a$ ; et de rayon $r$, tel que, $z$ restant à l'intérieur du second cercle, l'équation ait toujours $n$ racines dans l'intérieur du premier cercle, et pas davantage

Nous pouvons, sans nuire à la généralité du raisonnement supposer $a$ et $b$ nuls, car cela revient à faire la substitution $z = a + z'$ $u = b + u'$. Ceci posé, nous aurons dans le domaine $u = 0$

$$(1) \qquad f(z,u) = \varphi_0(z) + u\,\varphi_1(z) + u^2\varphi_2(z) + \ldots\ldots\ldots$$

les fonctions $\varphi$ étant holomorphes dans l'aire $S$ et satisfaisant aux conditions

$$(2) \qquad \varphi_0(0) = 0 \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \varphi_2(0) = 0 \ldots\ldots \varphi_{n-1}(0) = 0 \quad \varphi_n(0) \neq 0$$

L'équation (1) peut s'écrire :

$$(3) \qquad f(z,u) = u^n\,\varphi_n(z)\left[1 + P + Q\right]$$

si on pose :

$$(4) \qquad P = \frac{1}{u^n}\,\frac{\varphi_0(z)}{\varphi_n(z)} + \frac{1}{u^{n-1}}\,\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots\ldots + \frac{1}{u}\cdot\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\varphi_n(z)}$$

$$(5) \qquad Q = u\,\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} + u^2\,\frac{\varphi_{n+2}(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots + u^p\,\frac{\varphi_{n+p}(z)}{\varphi_n(z)} + \ldots\ldots$$

Nous pouvons supposer qu'on restreigne l'aire $S$ de telle sorte que $\varphi_n(z)$ n'ait aucun zéro dans cette aire ; dans ce cas $|\varphi_n(z)|$ restera supérieur à un nombre fixe $\delta$ ; en outre les fonctions holomorphes $\varphi$ conserveront toutes dans $S$ et sur son contour un module inférieur à un nombre fixe $M$, il est bien évident que ces limites $\delta, M$ s'appliqueront à fortiori à toute aire intérieure à $S$.

Faisons décrire à la variable $u$, la circonférence d'un cercle de rayon $r' < 1$ ayant $0$ pour centre, nous aurons, quel que soit $z$ :

$$|Q| < \frac{M}{\delta}(r' + r'^2 + \ldots) = \frac{M}{\delta}\,\frac{r'}{1-r'}$$

et nous supposerons dès maintenant $r'$ inférieur à $\frac{\delta}{\delta + 2M}$, d'où nous déduirons $|Q| < \frac{1}{2}$. Supposons maintenant $r'$ choisi arbitrairement au-dessous de la limite qu'on vient d'indiquer ; les fonctions $\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ s'annulant pour $z = 0$, et étant continues, on pourra déterminer un cercle de rayon $r$ tel que dans ce cercle toutes ces fonctions aient des modules moindres que

$$\frac{\delta}{2}\;\frac{1}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r'^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{r'^n}} = H$$

Pour toute valeur de $z$ intérieure à ce cercle on aura

$$|P| < \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{r'^n}\right) \times H \text{ ou } |P| < \frac{1}{2}$$

Dans ces conditions, d'après l'équation (3) on aura, sur toute la circonférence de rayon $r'$

$$\left|\frac{f(z,u) - u^n \varphi_n(z)}{u^n \varphi_n(z)}\right| = |P+Q| < 1$$

Donc, d'après un lemme dont nous nous sommes servi à plusieurs reprises (Voir page 69) les deux équations

$$f(z,u) = 0 \qquad u^n \varphi_n(z) = 0$$

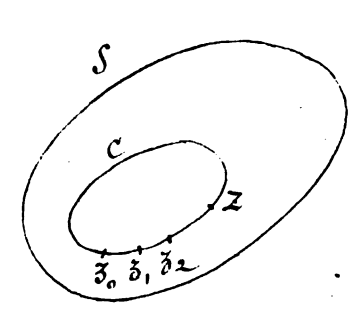
auront le même nombre de racines dans le cercle de rayon $r'$. Il en résulte évidemment que $f(z,u) = 0$ a $\underline{n}$ racines dans ce cercle ; le théorème est donc démontré.

## II – Définition de la fonction algébrique

Considérons le cas particulier où $f$ est un polynome entier par rapport à $z$, $u$. Soit

$$f(z,u) = A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + \dots + A_{m-1} u + A_m.$$

Si on donne à $z$ une valeur quelconque, l'équation $f(z,u) = 0$ aura $m$ racines ; ici les aires désignées plus haut par $S$, $S'$ s'étendent l'une et l'autre à l'infini dans tous les sens ; si $z$ vérifie l'équation $A_0 = 0$, l'équation aura un certain nombre de racines infinies, en d'autres termes, si on pose $u = \frac{1}{v}$ l'équation $f(z, \frac{1}{v}) = 0$ aura des racines nulles ; d'autre part, si $R(z)$ est le résultant des deux polynômes $f(z,u)$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ l'équation $R(z)=0$ déterminera les seuls points où l'équation puisse avoir des racines multiples ; ces racines pourront d'ailleurs être finies ou infinies, car une même valeur de $z$ pourra annuler à la fois les deux polynômes $R$ et $A_0$ ; nous appellerons points critiques, les points ayant pour affixes les racines de l'équation $A_0 R = 0$.




1° Supposons maintenant que $z$ reste à l'intérieur d'une aire $S$ ne renfermant aucun point critique ; soit $z_0$ un point quelconque de cette aire, $u_0$ l'une des racines correspondantes ; d'après notre hypothèse cette racine est simple et finie. Faisons décrire à $z$ une ligne continue ; quand on passera au point $z_1$ infiniment voisin de $z_0$, l'équation aura $m$ nouvelles racines dont ~~une et~~ une seule $u_1$ infiniment voisine de $u_0$ ; quand on passera de $z_1$ à $z_2$ il y aura de même une racine $u_2$ et une seule voisine de $u_1$, et ainsi de suite ; la suite continue des valeurs $u_0\, u_1\, u_2 \dots U$ correspondant aux valeurs $z_0, z_1, z_2 \dots Z$ constitue une fonction de $z$, continue le long du chemin considéré ; l'ensemble de toutes ces suites quand $C$ varie, définit $u$ comme

une fonction de $z$, continue dans $S$.

2° Nous allons prouver maintenant que cette fonction est uniforme. Il suffit pour cela de faire voir que si le chemin $C$ se ferme, on retrouve en $z_0$ la valeur $u_0$ de la fonction. Or dans $S$ le module de la différence des racines de $f(z,u)=0$, prises deux à deux n'est jamais nul ; il reste donc supérieur à un certain nombre $\lambda$. Autour d'un point $\xi$ quelconque de l'aire $S$ on peut décrire un cercle de rayon $r$, tel que $z$ restant dans ce cercle, l'équation ait une seule racine dans chaque cercle décrit autour d'un des points racines correspondants, avec un rayon $r' < \lambda$ ; de plus, ce nombre $r$, déterminé comme on l'a vu plus haut, à l'aide des quantités $M$ et $\delta$ sera évidemment indépendant de la valeur $\xi$ considérée ; si maintenant, on fait décrire à la variable $z$ un chemin fermé contenu dans un cercle de rayon $r$, chacune des racines variera d'une quantité inférieure en module à $\lambda$ ; elle reprendra donc sa valeur initiale.

Il est clair d'ailleurs que si on divise l'aire $C$ en aires partielles par des transversales, la variation d'une racine déterminée, pour tout le contour de $C$, sera égale à la somme des variations relatives aux contours des aires partielles. Nous pouvons alors, par deux séries de droites parallèles, diviser l'aire $S$ en un nombre fini de carrés complets ou incomplets ayant une diagonale inférieure à $2r$. Dans ces conditions, d'après ce qui précède, la variation de chaque racine sera nulle pour le contour de chaque carré, et par suite pour le contour entier de l'aire $C$, puisque le nombre des carrés est fini ; donc chaque racine est une fonction continue et uniforme de $z$.

3° Je vais démontrer enfin que cette fonction est analytique. Soit en effet, $z_0$ un point quelconque de $S$, $u_0$ la racine correspondante, $h, k$, un système d'accroissements correspondants, on aura

$$f(z_0, u_0)=0, \quad f(z_0+h,\ u_0+k)=0.$$

La seconde équation est une équation entière entre $h$ et $k$, et peut s'écrire :

$$h\,\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + k\,\overline{\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{1}{2}\left(h^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} + 2kh\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u}} + k^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}\right) + \ldots = 0$$

le signe $-$ indiquant qu'on doit faire $z=z_0$, $u=u_0$ ; si nous posons $\frac{k}{h}=v$, on peut écrire

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + v\,\overline{\frac{\partial f}{\partial u}} + \frac{h}{2}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} + 2v\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial u}} + v^2\,\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}}\right) + \ldots = 0$$

Cette équation algébrique entre $v$ et $h$ ; pour $h=0$, elle a une racine

[redacted]



simple égale à

$$v_0 = -\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\right)_0$$

Donc, si $h$ est infiniment petit, une racine et une seule de l'équation en $v$ tend vers la valeur $v_0$ ; on en conclut que $v$ a pour limite $v_0$ ou en d'autres termes que le rapport $\frac{k}{h}$ a pour limite $v_0$ ; donc la quantité variable $u$, considérée comme fonction de $z$ a une dérivée $v_0$ parfaitement déterminée ; c'est donc une fonction analytique.

En résumé, chaque racine de l'équation $f(z, u) = 0$ sera une fonction holomorphe tant que $z$ restera à l'intérieur d'une courbe fermée ne contenant aucun point critique.

**III** — Fonctions uniformes. — D'après cela, c'est parmi les points critiques, ou en d'autres termes, parmi les solutions de l'équation :

$$R(z) A_0(z) = 0$$

que peuvent se trouver les points singuliers de la fonction ; soit donc $a$ l'un de ces points — Imaginons un chemin continu $C$ partant d'un point $z_0$ et venant aboutir aux environs de $a$ ; en $z_0$ l'équation a en général $m$ racines $u_0\, u_1\, u_2 \dots u_{m-1}$ ; nous supposons qu'on choisisse exclusivement l'une d'elles pour valeur initiale ; ce sera par exemple $u_0$. Quand on arrivera au point $\alpha$ voisin de $a$, on sera parvenu par continuité à une valeur $v_0$ de la fonction ; nous désignerons de même par $v_1\, v_2 \dots v_{m-1}$ les valeurs auxquelles on serait arrivé si on avait pris pour valeurs initiales, respectivement $u_1, u_2 \dots u_{m-1}$

Supposons qu'au point $a$, l'équation ait une seule racine infiniment voisine de $v_0$ ; dans ce cas il n'y aura aucune difficulté : si cette racine est finie, elle donnera en $a$ la valeur de la fonction on pourra prolonger le chemin $C$ en franchissant le point $a$ ; au-delà, on trouvera une valeur et une seule infiniment voisine de la valeur en $a$, la fonction restera bien déterminée, continue, etc... ; si la racine en question était infinie, l'équation $f\left(\frac{1}{u}, z\right) = 0$ aurait une seule racine nulle en $a$, une seule racine infiniment petite en $\alpha$ ; la racine considérée aurait donc le point $a$ pour pôle.

Supposons maintenant qu'au point $a$ l'équation ait $n$ racines égales à $b$ ; si $v_0$ n'est pas voisin de $b$, il n'y aura encore aucune difficulté,

a ne sera pas un point singulier pour la racine considérée ; mais si $v_0$ fait partie du groupe des n racines qui en $\alpha$ sont infiniment voisines de $b$, lorsqu'on voudra prolonger C jusqu'en a, on aboutira à ce point avec la valeur $b$, si ensuite on veut prolonger C au delà de a, on se trouvera en présence de n valeurs infiniment voisines de $b$ ; en d'autres termes, la courbe représentative de u se partagera en n branches distinctes et rien n'indiquera suivant laquelle de ces branches on devra suivre la marche de la fonction. Le point a sera donc un point singulier de la fonction ; la singularité consistant dans une incomplète détermination. C'est ce qu'on nomme un point d'embranchement.

Il est facile, à l'aide d'une coupure, de rendre holomorphe toute racine de l'équation ; si on désigne par $a_1, a_2 \ldots a_p$ les différents points critiques, on pratiquera dans le plan une coupure à l'aide d'un trait continu allant de $a_1$ à $a_2$, de $a_2$ à $a_3 \ldots$ de $a_p$ à l'infini ; en interdisant à la variable de rencontrer jamais cette ligne on aura un champ de variation dans lequel l'équation $f(z,u) = 0$, de degré m par rapport à u, définira m fonctions distinctes dont chacune sera holomorphe.

Mais en opérant de la sorte, on perd de vue la liaison qui unit les m fonctions ainsi définies et leur origine commune ; cette séparation est donc tout à fait artificielle, et il est préférable de considérer l'équation $f(z,u)=0$ comme définissant une seule fonction multiforme. Nous allons voir comment on y est conduit.

## IV — Une seule fonction multiforme. —

Nous supposerons maintenant que la variable z peut se mouvoir librement dans le plan tout entier, un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra étant supprimé autour de chacun des points $a_1, a_2 \ldots a_p$ ; dans le champ ainsi défini, nous allons voir que l'équation définit une fonction multiforme à m déterminations.

Supposons qu'étant parti de $z_0$ avec la valeur $u_0$ on arrive en $\alpha$ avec la valeur $v_0$, infiniment voisine de $b$ ; soient $v_0\, v_1 \ldots v_{n-1}$ les racines infiniment voisines de $b$ qui correspondent à ce point $\alpha$ ; si nous tournons une première fois autour de a nous reviendrons en $\alpha$ avec l'une des valeurs $v_0\, v_1\, v_2 \ldots v_{n-1}$ ; si c'est $v_0$ que nous retrouvons, le même fait se reproduira indéfiniment puisqu'au début de chaque tour on se retrouvera dans les mêmes conditions, en d'autres termes la racine considérée sera uniforme et n'aura pas de singularité au point a ; supposons qu'un premier tour amène une autre racine $v_1$ ; alors un second tour ne pourra ramener $v_1$, sinon en tournant en sens contraire on retrouverait indéfiniment $v_1$ et nous

savons qu'il existe un mouvement qui peut nous faire passer de $v_1$ à $v_0$; donc après un second tour, on sera ramené à $v_0$ ou à une racine autre que $v_0, v_1$; si on retrouve $v_0$ on retrouvera indéfiniment $v_1$ puis $v_0$ puis $v_1$ .... et ainsi de suite, les deux racines s'échangeant alternativement; supposons que le second tour amène une nouvelle racine $v_2$; alors un troisième ne pourra ramener ni $v_2$ ni $v_1$ car en tournant en sens contraire, on ne retrouverait jamais que $v_1$ et $v_2$ et nous savons qu'on doit pouvoir retrouver $v_0$; le troisième tour ramènera donc $v_0$ ou une racine $v_3$ distincte de $v_0 v_1 v_2$; si c'est $v_0$ on se retrouvera dans les conditions initiales; on retrouvera donc indéfiniment et toujours dans le même ordre les trois racines $v_0, v_1, v_2$ et ainsi de suite; en résumé les $n$ racines infiniment voisines qui correspondent à un point critique forment, lorsqu'on tourne autour de ce point, un ou plusieurs systèmes circulaires.

Si partant de $z_0$ nous nous dirigeons suivant $C$ jusqu'en $\alpha$, que nous fassions un tour complet autour de $a$, et que nous revenions ensuite de $\alpha$ en $z_0$ suivant le même chemin $C$, le contour fermé ainsi défini s'appellera un lacet; $z_0$ est l'origine, $a$ l'extrémité de ce lacet.

Si la racine $v_0$ en $\alpha$ s'échange avec une autre $v$, après un tour, il est clair que le chemin $\alpha z_0$ nous ramènera au point de départ avec la valeur $u_1$ au lieu de $u_0$; nous dirons alors que le lacet a échangé les racines $u_0, u_1$; d'une manière générale si $v_0$ fait partie d'un groupe de $p$ valeurs se permutant circulairement autour de $a$, il suffira de décrire $p$ fois de suite le lacet pour obtenir en $z_0$ successivement les valeurs $u_0 u_1, \ldots u_{p-1}$. Un lacet permettra donc d'échanger circulairement entre-elles, un certain nombre des $m$ valeurs $u_0 u_1 \ldots u_{m-1}$; un système formé de plusieurs lacets consécutifs pourra permettre d'en échanger un plus grand nombre.

Considérons maintenant un point $z$ quelconque du plan; on peut aller de $z_0$ à $Z$ par un chemin particulier, par exemple suivant la droite $z_0 Z$; tout autre chemin allant de $z_0$ à $Z$ peut être déformé sans franchir aucun point critique de manière à être composé de ce chemin rectiligne précédé d'une ligne fermée $C$ allant de $z_0$ à $z_0$; ce chemin $C$ peut évidemment être lui-même réduit d'une manière continue, et sans franchir aucun point critique, à coïncider avec un certain système de lacets parcourus dans des sens convenables; en somme, tout chemin allant de $z_0$ en $Z$ se réduira au chemin rectiligne précédé d'un système de lacets.

Soient maintenant $U_0\ U_1\ U_2 \ldots U_{m-1}$ les racines de $f(u, Z) = 0$, $U_i$ étant la valeur à laquelle on arriverait par continuité en suivant le

chemin rectiligne avec $u_i$ comme valeur initiale ; nous démontrerons tout à l'heure qu'il existe un système de lacets ayant $z_0$ comme origine et permettant de passer de $u_0$ à toutes les autres racines $u_1\, u_2 \ldots u_{m-1}$ ; d'après cela en faisant varier convenablement le chemin $z_0 Z$ on pourra, par continuité, et tout en partant de la valeur initiale $u_0$ aboutir en $Z$ avec l'une quelconque des valeurs $U_0\, U_1 \ldots U_{m-1}$ ; nous acquérons ainsi la notion d'une fonction multiforme susceptible de $m$ valeurs distinctes en chaque point du plan et satisfaisant constamment à l'équation $f(u, z) = 0$ c'est cette fonction multiforme qu'on désigne sous le nom de fonction algébrique.

**Points singuliers algébriques.** — La fonction multiforme algébrique admet deux espèces de points singuliers. des pôles et des points critiques tels que, dans le voisinage de chacun d'eux il y ait $p$ valeurs de la fonction qui tendent d'une manière continue vers une limite commune $b$ finie ou non ; nous donnerons le nom de points singuliers algébriques à ces deux espèces de points singuliers ; le point à l'infini ne peut être lui-même qu'un point ordinaire ou un point singulier algébrique, car l'équation $f\left(u, \frac{1}{z}\right) = 0$ est algébrique et par suite le point $z = 0$ est ordinaire ou algébrique.

En résumé, une fonction algébrique n'a, à distance finie ou infinie que des singularités algébriques ; la réciproque est vraie et peut s'énoncer de la manière suivante :

**Théorème** — Toute fonction multiforme, qui n'a en chaque point du plan, qu'un nombre fini de valeurs, et qui n'admet, à distance finie ou infinie, que des singularités algébriques, est une fonction algébrique.

Remarquons d'abord que si, en un point non singulier $M$, la fonction admet $m$ valeurs, elle en admettra $m$ en un point $M'$ infiniment voisin de $M$, car chacune des déterminations est supposée varier d'une manière continue ; on en conclut que le nombre des valeurs de la fonction est le même pour tout les points non singuliers. Soit $m$ ce nombre, $z_0$ un point arbitraire pris pour origine, $u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}$ les valeurs de la fonction en ce point ; $a$ l'un quelconque des points singuliers ; nous pourrons à l'aide de chaque point $a$ constituer un lacet ayant $z_0$ pour origine et ce lacet ne pourra avoir d'autre effet que d'échanger entre elles certaines des valeurs $u_0\, u_1 \ldots u_{m-1}$ ; la démonstration que nous avons donnée résulte en effet de la continuité des différentes valeurs de la fonction dans les environs de $a$ et nullement de son origine algébrique.

Soit $H$ une fonction entière et symétrique des $m$ valeurs de

la fonction; $H$ est évidemment une fonction continue et analytique de $z$; mais il est aisé de voir que cette fonction est de plus uniforme, en effet, tout chemin allant de $z_0$ à un point $Z$ quelconque peut être remplacé par le chemin rectiligne $z_0 Z$ précédé d'un système déterminé de lacets ayant $z_0$ pour origine; mais ce système de lacets ramènera en $z_0$ une valeur unique et parfaitement déterminée de $H$, puisque son effet étant de permuter entre elles certaines des valeurs $u_0\, u_1 \dots u_{m-1}$ ne peut avoir d'influence sur la fonction symétrique. On en conclut que $H$ est une fonction holomorphe de $z$ sauf aux points où une ou plusieurs valeurs de la fonction donnée seraient infinies; mais un pareil point sera nécessairement un pôle pour $H$; le point à l'infini étant supposé de même nature que les points à distance finie, la fonction $H$ n'aura d'autres singularités que des pôles, à distance finie ou infinie. — Ce sera donc une fonction rationnelle.

Ceci posé, désignons par $S_q$ la somme des produits $q$ à $q$ des valeurs de la fonction $f(z)$ donnée; on aura évidemment pour toute valeur de $z$:

$$f^m(z) - S_1 f^{m-1}(z) \dots \dots + (-1)^m S_m = 0$$

Donc $f(z)$ sera lié à $z$ par une équation entière, ce qu'il fallait prouver.

**Remarque. — 1°.** — Il résulte de ce théorème que, étant donnée une équation entière $f(z, u) = 0$ irréductible c'est-à-dire ne pouvant être scindée en deux équations entières, il existe toujours un système de lacets fondamentaux c'est-à-dire permettant de passer d'une valeur de la fonction à toutes les autres; en effet, soit $z_0$ le point arbitraire pris pour origine des lacets, si toutes les combinaisons possibles de lacets ne permettent d'échanger entre elles que $p$ racines de l'équation, savoir, $u_0\, u_1 \dots u_{p-1}$, il est clair que la fonction déduite par continuité de la valeur initiale $u_0$ n'aura nulle part que $p$ valeurs au plus et ne présentera d'ailleurs que des singularités algébriques; elle satisfera donc à une équation entière $\varphi(z, u) = 0$ qui sera du degré $p$ par rapport à $u$; $z$ étant supposé constant et égal à $\zeta$, l'équation $f(\zeta, u) = 0$ admettra toutes les racines de $\varphi(\zeta, u) = 0$; donc on aura

$$f(\zeta, u) = \varphi(\zeta, u)\, F(\zeta, u)$$

$F(\zeta, u)$ étant un polynôme entier en $u$; comme cela a lieu pour toute

valeur de $z$ il en résulte que l'on aura identiquement.

$$f(z,u) = \varphi(z,u)\,[B_0 u^{m-p} + B_1 u^{m-p-1} + \dots + B_{m-p}]$$

les fonctions $B_0 B_1 \dots B_{m-p}$ seront évidemment des fonctions rationnelles ; on le voit d'ailleurs immédiatement en donnant à $u$, $m-p+1$ valeurs constantes arbitraires ; donc enfin l'équation $f(z,u)=0$ ne serait pas irréductible.

2°. — Il resterait pour compléter l'étude des fonctions algébriques, à donner le moyen de séparer autour de chaque point critique les groupes circulaires correspondants, et de former un système de lacets fondamentaux ; nous ne nous arrêterons pas à cette partie de la question qui exige d'assez longs développements ; dans les cas particuliers que nous pourrons rencontrer le problème se résoudra sans difficulté et indépendamment de toute théorie générale. — On trouvera d'ailleurs un exposé complet de cette théorie, d'après le mémoire de Puiseux sur les fonctions algébriques, dans le traité des Fonctions Elliptiques de Briot et Bouquet (pages 40 et suivantes)

---

# Quinzième Leçon.

---

## Fonctions Implicites — Fonctions définies par des Intégrales.

---

I. **Fonction implicite**. — Si la fonction $f(z,u)$ au lieu d'être un polynôme, est une fonction quelconque, holomorphe dans le domaine $(z=a, u=b)$ et s'annulant pour $z=a$, $u=b$, l'équation $f(z,u)=0$ donne lieu à une théorie toute semblable à celle des fonctions algébriques ; nous avons vu que si pour $z=a$, l'équation a $n$ racines égales à $b$, pour $z$ voisin de $a$ elle aura $n$ racines voisines de $b$ ; ces racines que nous supposerons finies se partageront en groupes s'échangeant circulairement autour du point $a$. — Si $n=1$, il existe une fonction de $z$ holomorphe dans le domaine de $a$, se réduisant à $b$ pour $z=a$, et vérifiant identiquement l'équation donnée ; mais cette condition $n=1$ exige qu'on ait $f'_u(a,b) = 0$.

Ainsi se trouve établie l'existence de la fonction implicite, que nous avions admise sans démonstration. Nous devons ajouter les remarques suivantes :

1°. – L'analogie avec les fonctions algébriques cesse quand on considère, soit une valeur infinie de $z$, soit une valeur finie à laquelle correspond une valeur infinie de $u$ ; cela tient à ce que le point $\infty$ est en général un point singulier essentiel pour les fonctions transcendantes.

2°. – Quand on veut établir l'existence de la dérivée $\frac{du}{dz}$, il faut se servir du développement

$$f(z+h,\ u+k) = f(u,z) + h\frac{df}{dz} + k\frac{df}{du} + \ldots\ldots$$

qui est illimité ; ce développement s'établit comme dans le cas des variables réelles à l'aide de la fonction

$$\varphi(t) = f(z+ht,\ u+kt)$$

où $t$ est une variable complexe de module $\leq 1$.

3°. – Il est important d'observer que la fonction implicite holomorphe définie plus haut est la seule fonction continue vérifiant l'équation donnée et se réduisant à $b$ pour $z = a$ ; en d'autres termes, si une fonction $\varphi(z)$ continue le long d'un certain chemin $C$ aboutissant au point $a$, vérifie identiquement l'équation $f(u,z) = 0$ et se réduit à $b$ pour $z = a$, elle coïncide le long de $C$ avec la fonction implicite considérée.

En effet, si nous posons $\varphi(z) = u + v$, $u$ continuant à désigner la fonction implicite, on aura identiquement le long du chemin $C$

$$f(u+v, z) = 0 \qquad f(u,z) = 0$$

$v$ étant supposée continue, on peut prendre $z$ assez voisine de $a$ pour que sur la portion conservée $C'$ de la ligne $C$, $f(u+v, z)$ soit développable en série entière, et on a :

$$f(u,z) + v f'_u(u,z) + \ldots\ldots\ldots = 0$$

d'où

$$v\left[ f'_u(u,z) + \frac{v^2}{2} f''_{u^2}(u,z) + \ldots\ldots \right] = 0$$

Si donc $v$ n'étant pas identiquement nul, la parenthèse serait nulle pour toute valeur de $z$, tout le long de $C'$, on aurait en faisant $z = a, v = 0$, d'où $f'_u(a,b) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $v$ est nul tout le long de $C'$ et par suite $\varphi(z)$ coïncide avec $u$.

4°. – Enfin, on peut, dans le voisinage d'un point critique algébrique $a$, donner un développement simple de la fonction. – Si $p$ racines égales à $b$ s'échangent circulairement autour de $a$, on posera $z-a=z'^p$ et la variable $z$ faisant $p$ tours autour de $a$, $z'$ fera un tour unique autour du point $0$; comme la fonction $u$ reprendra sa valeur initiale, il en résulte qu'elle sera une fonction uniforme de $z'$; on aura donc:

$$u = b + A_1(z-a)^{\frac{1}{p}} + A_2(z-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots\ldots$$

Dans le cas où la racine serait infinie et où $f(u,z)$ serait algébrique, $z'$ serait un pôle de la fonction donnée, on aurait alors un développement de la forme:

$$u = A_0 + A_1(z-a)^{\frac{1}{p}} + A_2(z-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ B_1(z-a)^{-\frac{1}{p}} + B_2(z-a)^{-\frac{2}{p}} + \ldots\ldots + B_q(z-a)^{-\frac{q}{p}}.$$

## II Fonction inverse

– Supposons une équation de la forme

$$(1) \qquad u = f(z)$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine de $\underline{a}$ et telle qu'on ait $f'(a)=0$. Soit $b=f(a)$; faisons décrire à la variable $z$ un arc continue $\underline{c}$ à partir de $\underline{a}$; $\underline{u}$ décrira un arc continu $\underline{c}'$ à partir du point $b$; aux différents points de $c'$ correspondront les différents points de l'arc $c$; $z$ est donc une fonction de $u$, définie au moins le long de l'arc $c'$, continue et vérifiant identiquement l'équation (1).

D'autre part nous savons qu'il existe une fonction $\varphi(u)$ se réduisant à $\underline{a}$ pour $u=b$, holomorphe dans le domaine de $a$ et vérifiant identiquement cette même équation; d'après la remarque 3°. du § précédent, on a identiquement, le long de $C'$, $z=\varphi(u)$. Ainsi se trouve définie la fonction inverse de $f$; elle est holomorphe tant qu'elle n'atteint pas une valeur pour laquelle $f'(z)$ s'annule, ou pour laquelle $f(z)$ cesse d'être holomorphe.

## III. Intégrales des fonctions algébriques.

– Un autre exemple très-important de fonctions multiformes nous est fourni par l'intégration des fonctions algébriques; cette opération constitue un moyen d'obtenir de nouvelles fonctions transcendantes, et c'est par cette voie qu'on s'est élevé à la notion des fonctions elliptiques.

Comme exemple nous ferons une étude complète de l'intégrale,

$$(2) \qquad u = \int_1^z \frac{dz}{z}$$

la fonction sous le signe présente un seul point singulier $z=0$, qui est un pôle pour cette fonction; ce sera aussi le seul point

singulier, à distance finie, de la fonction intégrale. — Soit A le point dont l'affixe est 1 ; construisons un lacet ayant pour origine A et pour extrémité le point zéro ; tout chemin d'intégration conduisant de A à un point quelconque $M(z)$ se ramène à un chemin particulier, par exemple le segment rectiligne AM, précédé d'un certain nombre de lacets ; nous désignerons par $\varphi(z)$ l'intégrale rectiligne ; pour avoir l'intégrale prise le long du lacet, imaginons qu'on aille de A en B, puis qu'on décrive la circonférence B C B dans le sens direct, puis qu'on revienne de B en A ; aux deux passages en B $\frac{1}{z}$ aura la même valeur puisque cette fonction est uniforme dans les environs de 0 ; donc les deux parties rectilignes de l'intégrale se détruiront ; l'intégrale relative au lacet complet se réduira donc à l'intégrale prise le long du cercle ce sera donc, $\rho$ étant le rayon du cercle :

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{\theta i} d\theta}{\rho e^{\theta i}} = 2 i \pi$$

Revenons maintenant à l'intégrale (2) ; elle aura au point M une infinité de valeurs données par la formule :

$$(3) \qquad u = 2 i K \pi + \varphi(z)$$

K étant un entier quelconque, positif ou négatif. — Il est d'ailleurs facile d'avoir une expression analytique de $\varphi(z)$ on peut en effet remplacer, dans l'intégration, le segment de droite AM, par le contour AHM, MH étant un arc de cercle décrit de O comme centre avec le rayon OM ; si nous posons alors $z = Re^{\theta i}$, nous aurons.

$$(4) \qquad \varphi(z) = \int_1^R \frac{dx}{x} + i \int_0^\alpha d\theta = LR + i\alpha$$

La caractéristique L désignant la première de nos deux intégrales définies réelles. — Nous désignerons par $F(z)$ la fonction multiforme que nous venons de définir.

**Propriété fondamentale de F(z).** — La propriété fondamentale de $F(z)$ consiste dans la relation

$$(\rho) \qquad F(zz') = F(z) + F(z')$$

qui résulte immédiatement de l'équation (4) ; mais on peut parvenir directement à cette relation en partant de l'équation de définition (1). On a en effet

$$F(x) = \int_1^x \frac{dz}{z} \qquad F(y) = \int_1^y \frac{dz}{z}$$

et l'équation $F(x) + F(y) = \text{const}$ peut s'écrire, en dérivant :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

ou encore

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

ou enfin $xy = \text{const}$ ; en d'autres termes les deux quantités $xy$ et $F(x) + F(y)$ sont variables ou constantes en même temps ; elles sont donc fonctions l'une de l'autre et l'on a :

$$F(x) + F(y) = \mathcal{F}(xy)$$

Or si nous y faisons $y = 1$, cette égalité se réduit à $F(x) = \mathcal{F}(x)$ on a donc

$$F(x) + F(y) = F(xy)$$

et cela quels que soient $x$ et $y$ ; c'est la propriété fondamentale de $F(z)$.

**Inversion de l'intégrale** — Si au lieu de considérer $u$ comme une fonction de $z$, on considère au contraire $z$ comme une fonction de $u$, on aura à chercher une expression analytique de $z$ ; c'est ce qu'on appelle faire l'inversion de l'intégrale. Or il y a ici un grand avantage à faire cette inversion la fonction inverse étant beaucoup plus simple que la fonction directe. Considérons donc les équations :

$$u = F(z) \qquad z = \lambda(u)$$

Cherchons d'abord ce que devient $F$ pour $z = \infty$ ; en faisant $z = \frac{1}{z}$ on obtient, soit directement sur l'intégrale, soit à l'aide de l'équation ($\rho$)

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -F(z)$$

on en conclut que $\infty$ et $0$ sont deux points singuliers de même nature pour la fonction $F(z)$ ; donc tant que $u$ conservera une valeur finie, $\lambda(u)$ ne pourra être ni nul ni infini ; en particulier la fonction $\lambda(u)$ est finie pour toute valeur finie de $\underline{u}$, $F(z)$ ne cesse d'être holomorphe que si $z$ est nul ou infini ; donc cela n'arrive jamais pour aucune valeur finie de $\underline{u}$ ; enfin $F'(z) = \frac{1}{z}$ ne s'annule jamais pour une valeur finie de $\underline{u}$ ; donc enfin la fonction inverse est holomorphe pour toute valeur finie de la variable ; c'est donc une fonction entière ; voici quelles sont ses propriétés immédiates.

1° — C'est une fonction entière

2° — Elle se réduit à 1 pour $u = 0$.

3° — Elle admet la période $2i\pi$ ; cela résulte de l'équation (3)

4°. – Elle satisfait à la relation suivante, équivalente à l'identité (5)

$$\lambda(x+y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y)$$

4°. – L'équation (1) donne:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{z} \quad d'où \quad \frac{dz}{du} = z$$

donc la fonction $\lambda(u)$ se reproduit par la dérivation.

5°. – Enfin l'équation (4) donne immédiatement

$$\lambda(X + iY) = e^X (\cos Y + i \sin Y)$$

ce qui fournit l'expression analytique de la fonction; nous avons vu comment la propriété 4° fournirait son développement en série.

On retrouve ainsi toutes les propriétés des fonctions exponentielle et logarithmique.

IV – Intégrale hyperelliptique. – Étudions de même l'intégrale

$$(6) \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_q)}}$$

aucune des quantités $a_i$ n'étant nulle, et toutes étant distinctes. Nous allons trouver encore pour cette intégrale une infinité de valeurs; désignons par $\varphi(z)$ l'intégrale prise le long du chemin rectiligne $OM(z)$, quand on part de $O$ avec une valeur bien déterminée du radical. Construisons les lacets ayant pour origine commune $O$ et pour extrémités les points critiques $a_1, a_2, a_q$. Chacun de ces lacets échange entre elles les deux valeurs du radical. – Posons d'une manière générale

$$\varphi(a_i) = A_i$$

L'intégrale prise le long du lacet $(a_i)$ se réduit à $2A_i$, car l'intégrale prise le long du cercle infiniment petit est infiniment petite. Un même lacet parcouru un nombre pair de fois consécutives donne une intégrale nulle et ramène en $O$ la valeur initiale du radical; on peut donc n'en pas tenir compte. Si on parcourt successivement les deux lacets $a_i$ et $a_j$, comme on revient en $O$ après le premier trajet avec un changement de signe du radical, on a une intégrale égale à

$$2A_i - 2A_j$$

Ceci posé tout chemin allant de $O$ à $z$ peut être ramené,

sans qu'on franchisse aucun point singulier, au chemin rectiligne $OM$ précédé d'un système de lacets.

Posons alors :

$$2A_1 - 2A_2 = \omega_1 \qquad 2A_1 - 2A_3 = \omega_2 \qquad 2A_1 - 2A_q = \omega_{q-1}$$

d'où

$$2A_i - 2A_j = \omega_{j-1} - \omega_{i-1}$$

l'ensemble des lacets parcourus donnera une intégrale de la forme

$$m_1\omega_1 + m_1\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

$m_1$, $m_2$ étant des entiers positifs nuls ou négatifs. — D'autre part il peut rester un lacet $a_1$, non utilisé, avant qu'on ne s'engage dans le chemin rectiligne $oz$ ; ce lacet ajouterait $2A_1$ et changerait le signe du radical ; en résumé nous voyons que $\underline{u}$ est susceptible, pour chaque valeur de $z$, des deux séries de valeurs suivantes :

$$u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1} + \varphi(z)$$
$$u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \ldots\ldots + m_{q-1}\omega_{q-1} + 2A_1 - \varphi(z)$$

Les quantités $\omega_1\ \omega_2 \qquad \omega_{q-1}$ s'appellent les périodes ; nous allons voir immédiatement qu'elles ne sont pas indépendantes ; soit, en effet, un cercle décrit de $0$ comme centre avec un rayon $R$ assez grand pour entourer tous les points $a_1$, $a_2$, — ; l'intégrale prise le long de ce cercle est égale à la somme des intégrales prises le long de tous les lacets successivement ; on a donc :

$$(7)\quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - \qquad + (-1)^{q-1}\,2A_q = i\int_0^{2\pi} \frac{Re^{\theta i}\,d\theta}{\sqrt{q(Re^{\theta i}-a_1)(Re^{\theta i}-a_2)\cdots(Re^{\theta i}-a_q)}}$$

Si $q > 2$, en faisant croître $R$ indéfiniment on a :

$$2A_1 - 2A_2 + 2A_3 \qquad + (-1)^{q-1}.\,2A_q = 0$$

Si $q$ est pair cette égalité peut s'écrire

$$\omega_1 + (\omega_3 - \omega_2) + (\omega_5 - \omega_4) \qquad + (\omega_{q-1} - \omega_{q-2}) = 0$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \qquad - \omega_{q-2} + \omega_{q-1} = 0$$

Si $q$ est impair, on a :

$$2A_1 - (\omega_1 - \omega_1) - (\omega_4 - \omega_3) \qquad - (\omega_{q-1} - \omega_{q-2}) = 0$$
$$2A_1 + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \qquad + \omega_{q-2} - \omega_{q-1} = 0$$

Dans le premier cas on a seulement $q-2$ périodes distinctes ; dans le second la formule fait connaître $2A_1$ en fonction des $q-1$ périodes qui sont alors distinctes ; on voit donc que le nombre des

périodes est le même pour $q = 2K$ et $q = 2K - 1$.

Nous avons supposé $q > 2$. Si $q = 2$ le second membre de l'égalité (7) se réduit à

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{g}} = \frac{2i\pi}{\sqrt{g}}$$

On a donc une période unique

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\sqrt{g}}$$

Dans le cas ou $q = 3$ ou $4$, il y a deux périodes distinctes.

Points singuliers. — Supposons que la limite supérieure $z$ de l'intégrale tend vers l'une des valeurs $a_1\, a_2 \dots a_q$; Si nous posons

$$z = a_1 + t^2 \qquad dz = 2t\,dt$$

nous aurons :

$$u = \int_{\sqrt{a_1}}^{t}\frac{2\,dt}{\sqrt{g(a_1-a_2+t^2)(a_1-a_3+t^2)\dots(a_1-a_q+t^2)}}$$

et il faut voir ce que devient cette intégrale pour $t=0$. Elle est évidemment holomorphe; on peut donc, dans le domaine de $a_1$, mettre la fonction $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = A_1 + B_1(z-a_1)^{\frac{1}{2}} + B_2(z-a)^{\frac{2}{2}} + \dots$$

les deux systèmes de valeurs de $u$ se confondent ici

$$(8) \qquad u = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \quad + m_{q-1}\omega_{q-1} + A_1$$

enfin le point $a_1$ est un point critique.

Fonction inverse. — Pour étudier la fonction inverse, cherchons les valeurs de l'intégrale pour $z$ infini. — Posons $z = \frac{1}{\zeta}$ et prenons une limite inférieure quelconque.

$$u = \int^{\zeta}\frac{-d\zeta}{\zeta^{2-\frac{q}{2}}\sqrt{g(1-a_1\zeta)(1-a_2\zeta)-(1-a_q\zeta)}}$$

pour que l'intégrale reste finie pour $\zeta = 0$ il faut et il suffit que $2 - \frac{q}{2} < 1$ ou $q > 2$:

Nous pouvons maintenant, sans difficulté, nous rendre compte des propriétés de la fonction inverse

Tant que $u$ n'atteint pas une valeur pour laquelle $z$ soit infini ou égal à l'une des valeurs $a_1\, a_2 \quad a_q$, chaque valeur

[redacted]



de $u$ est une fonction holomorphe de $z$ ; donc $z$ est une fonction holomorphe de $u$ ; supposons maintenant que $u$ atteigne l'une des valeurs $\beta$ contenues dans la formule (8) ; On a

$$u = \beta + B_1 (z-a_1)^{\frac{1}{2}} + B_2 (z-a_2)^{\frac{2}{2}} +$$

Donc $(z-a_1)^{\frac{1}{2}}$ est holomorphe par rapport à $u$, dans le domaine de $\beta$ ; donc il en est de même du carré et par suite de $z$. – $(B_1 = 0)$

Donc la fonction inverse ne peut cesser d'être holomorphe qu'en devenant infinie ; si $q = 2$ nous avons vu que $u$ devient infinie avec $z$ ; donc $z$ ne devient infinie pour aucune valeur finie de $u$, donc $z$ est une fonction entière de $u$.

Si $q > 2$, l'intégrale $\varphi(z)$ conserve une valeur finie $\lambda$ pour $z$ infini ; donc les infinis de la fonction inverse sont contenus dans les formules :

$$u = \lambda + m_1 \omega_1 + m_1 \omega_2 \quad + m_{q-1} \omega_{q-1}$$

$$u = 2A_1 - \lambda + m_1 \omega + m_1 \omega_1 \quad + m_{q-1} \omega_{q-1}$$

Soit $\gamma$ l'une de ces valeurs ; pour étudier la fonction $z$ dans le domaine de $\gamma$ il faut faire

$$z = \frac{1}{\zeta}$$

$$u = -\int^{\zeta} \frac{\zeta^{\frac{q}{2}-2}\, d\zeta}{\sqrt{g(1-a_1\zeta)(1-a_2\zeta) - (1-a_q\zeta)}}$$

Supposons $q$ pair ; comme $q$ est au moins égal à 4, $u$ est holomorphe par rapport à $\zeta$ dans le domaine de 0 ; on peut avoir aisément la forme du développement. On a en effet :

$$\frac{du}{d\zeta} = A_0 \zeta^{\frac{q}{2}-2} + A_1 \zeta^{\frac{q}{2}-1} + A_2 \zeta^{\frac{q}{2}} + \cdots$$

D'où :

$$u = \gamma + \frac{A_0}{\frac{q}{2}-1} \zeta^{\frac{q}{2}-1} + \frac{A_1}{\frac{q}{2}} \cdot \zeta^{\frac{q}{2}} + \cdots$$

Or si $q > 4$ il y a plusieurs racines qui tendent vers 0 pour $u = \gamma$, $\zeta$ et par suite $z$ n'est donc pas uniforme dans les inversions de $\gamma$ ; si au contraire $q = 4$, $\frac{q}{2} - 1 = 1$, l'équation précédente a une seule racine nulle pour $u = \gamma$ et $z$ est uniforme pour cette valeur de $u$.

Si $q$ est impair posons

$$z = \frac{1}{\zeta^2} \qquad dz = \frac{-2\,d\zeta}{\zeta^3}$$

$$\frac{du}{d\zeta} = -\frac{2\zeta^{q-3}}{\sqrt{g(1-a_1\zeta^2)(1-a_2\zeta^2)\dots(1-a_q\zeta^2)}}$$

on voit de même que plusieurs valeurs de $\zeta$ tendent vers 0 pour $u = \gamma$, sauf dans le cas où $q = 3$. Ainsi la fonction $z$ n'est uniforme autour de ses infinis que si $q$ est égal à 3 ou à 4. Nous étudierons en particulier le cas où $q$ est égal à 3 ou à 4 ; la fonction inverse est évidemment beaucoup plus simple à considérer que la fonction directe ; elle est en effet, d'après ce qui précède, méromorphe pour toutes les valeurs finies de $u$.

# Seizième Leçon.

## Inversion des Intégrales Elliptiques.

I. — Nous avons vu que l'intégrale

$$(1)\quad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-b_q)}}$$

est une fonction multiforme, susceptible, pour chaque valeur de $z$ d'un nombre infini de valeurs contenues dans les deux formules

$$u = \varphi(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \cdots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

$$u = 2A_1 - \varphi(z) + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \cdots + m_{q-1}\omega_{q-1}$$

les quantités $A$ $\varphi(z)$, $\omega$ ayant des significations bien précises; en considérant, au contraire $z$ comme une fonction $F(u)$ de l'intégrale, on a

$$(2)\quad \begin{aligned} &F(u + m_1\omega_1 + \cdots + m_{q-1}\omega_{q-1}) = F(u) \\ &F(2A - u + m_2\omega_2 \cdots\cdots) = F(u) \end{aligned}$$

La fonction $F(u)$ admet donc les périodes $\omega_1\,\omega_2\ldots$; si $q>4$ le nombre des périodes distinctes est au moins égal à 3; de plus la fonction $F(u)$ cesse d'être uniforme; il faudrait donc, pour faire l'inversion en pareil cas, nous élever à la notion des fonctions absolument nouvelles pour nous; si au contraire $q=2,3$ ou $4$, il y a une ou deux périodes au plus; $F(u)$ est une fonction uniforme et méromorphe pour toutes les valeurs finies de $u$; nous pouvons donc chercher soit à faire l'inversion à l'aide des fonctions circulaires et elliptiques, soit au contraire à retrouver par l'étude approfondie de l'intégrale, les propriétés fondamentales de ces transcendantes. C'est la question que nous résoudrons maintenant, en commençant, pour plus de clarté par le cas où $q=2$.

Soit donc

$$(3)\quad u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a)(z-b)}}$$

Il y a une période unique

$$(4)\quad \omega = 2A - 2B = \frac{2\pi i}{\sqrt{g}} \quad A = \varphi(a) = \int_{z_0}^{a} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a)(z-b)}}$$

Nous transformerons d'abord l'intégrale en posant

$$z = \frac{a+b}{2} + v \cdot \frac{a-b}{2} \qquad u\sqrt{-g} + \alpha = v$$

on a immédiatement

$$(5)\quad v = \int_{0}^{t} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

($\alpha$ est une constante convenablement choisie). Supposons que l'on adopte, dans le calcul de $\varphi(t)$, la valeur initiale +1 du radical ; on a ici

$$A = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \quad B = -\frac{\pi}{2} \quad 2A - 2B = 2\pi$$

Les formules (2) donnent en posant $F(v) = t$

$$F(v + 2k\pi) = F(v)$$

$$F(\pi - v + 2k'\pi) = F(v)$$

Nous savons de plus que $F(v)$ est une fonction entière ; on voit immédiatement que si on décrit à partir de 0, deux chemins symétriques, les intégrales $\varphi(t)$ $\varphi(-t)$ sont égales et de signes contraires on a donc

$$F(-v) = -F(v)$$

Donc $F$ est une fonction impaire de $v$, si on fait $k' = 0$ dans la dernière des équations précédentes, il vient

$$(6)\quad F(\pi - v) = F(v)$$

d'où, en changeant $v$ en $-v$

$$(7)\quad F(\pi + v) = -F(v)$$

Enfin on a évidemment

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{F'(v)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \qquad F'(v) = \sqrt{1-t^2}$$

D'où en dérivant

$$F''(v) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, F'(v) = -F(v)$$

Donc en résumé

$F(v)$ est une fonction entière de $v$ ; elle est impaire, admet $\pi$ comme période de seconde

espèce avec le multiplicateur $-1$ ; enfin elle se reproduit, changée de signe, par deux dérivations ; sa dérivée se réduit à $+1$ pour $u=0$.

On peut déduire de là toutes les autres propriétés de $F(v)$, en particulier par une identification, son développement en série entière :

$$F(v) = \frac{v}{1} - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

Nous désignerons cette fonction nouvelle par $\sin v$ ; l'équation (3) revient alors à l'équation finie

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \sin(\alpha + u\sqrt{-g})$$

Revenons à l'équation (3), nous allons en déduire aisément le théorème d'addition de la fonction $\sin v$. Considérons simultanément la fonction $\cos v$ définie par la relation

$$\cos v = \sqrt{1-\sin^2 v}$$

et la condition $\cos 0 = 1$. Cette fonction de $v$ est holomorphe ; en effet, elle ne pourrait cesser d'être uniforme que pour les valeurs de $v$ telles qu'on ait $\sin v = \pm 1$. Or considérons l'une de ces valeurs, par exemple $\frac{\pi}{2}$. Posons

$$v = \frac{\pi}{2} + u \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}$$

Comme on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Ainsi qu'on le voit en faisant $v = \frac{\pi}{2}+u$ dans (2), on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$ est une fonction paire de $u$ ; en outre $u=0$ est une racine simple pour chaque facteur du radical ; on a donc

$$1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = Au^2 + Bu^4 + \dots \quad A \neq 0$$

On en conclut

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = u\sqrt{A+Bu^2+\dots}$$

et il est manifeste que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$ est holomorphe dans le domaine de $u=0$

Les propriétés de $\cos v$ se déduiraient sans peine de celles de $\sin v$ ; on aurait pu d'ailleurs se contenter d'observer que $\cos v$ est la dérivée de $\sin v$

Considérons maintenant deux variables quelconques $x$ $y$ liées par l'équation

$$(8)\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

Si nous posons

$$x = \sin u \qquad y = \sin v$$

cette équation (8) revient évidemment à

$$u + v = \text{const.}$$

On peut encore transformer autrement l'équation (8). On a en effet

$$d(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = \left[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy\right]\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)$$

Si on suppose que $x, y$ satisfassent constamment à l'équation (8) on en déduit

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{const.}$$

ou encore

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = \text{const.}$$

Donc les deux fonctions $(\sin u \cos v + \sin v \cos u)$ et $(u+v)$ sont en même temps constantes ou variables ; on en conclut que l'une d'elles est une fonction de l'autre, en sorte qu'on a :

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = F(u+v)$$

Il suffit maintenant de faire $v=0$ et on trouve $F(u) = \sin u$ ; on a donc

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

Si on forme $1 - \sin^2(u+v)$, qu'on extraie la racine et qu'on lève l'ambiguïté de signe en faisant $v=0$ on trouve

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

On connait donc tous les éléments de la théorie des fonctions circulaires. Nous allons suivre exactement la même marche pour l'intégrale elliptique.

## II — Intégrales elliptique. — Périodes.

— Soit l'intégrale

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{g(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}$$

Nous avons vu (1<sup></sup>re partie, page 98) qu'on peut toujours par une transformation rationnelle ramener cette intégrale, et aussi celle qui porterait sur un radical du 3e degré à la suivante

$$v = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{q(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$q$ étant le multiplicateur, $k$ le module ; seulement ici $q$ et $k^2$ seront des quantités complexes de nature quelconque ; nous pourrons encore prendre comme fonction $u\sqrt{q}$ et nous serons ainsi conduits à étudier, dans tous les cas l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Si nous posons, conformément à la théorie générale, en convenant de prendre $+1$ comme valeur initiale du radical

$$\varphi(1)=A \qquad \varphi\left(\frac{1}{k}\right)=B \qquad \varphi(-1)=C \qquad \omega = 2A-2C=4A$$

nous aurons pour les valeurs de $u$ $\qquad \omega' = 2A-2B$

$$\varphi(z) - 4mA + 2m'(A-B)$$

$$2A - \varphi(z) + 4mA + 2m'(A-B)$$

La fonction inverse $z=F(u)$ sera, comme nous le savons, fractionnaire, et on aura de plus

$$F\left[u+4mA+2m'(A-B)\right] = F(u) \qquad F\left[(4m+1)2A+2m'(A-B)-u\right] = F(u)$$

Elle sera doublement périodique et ses périodes seront $4A$, $2A-2B$, mais nous trouverons avantage à introduire $2A$ au lieu de $4A$. On a en effet, d'après la dernière égalité

$$F(2A+u) = F(-u)$$

Or $F(u)$ est évidemment une fonction impaire (on le voit comme dans le cas précédent) ; on conclut

$$F(2A+u) = -F(u)$$

Nous pourrons donc dire que $F(u)$ admet les deux périodes $2A$, $2A-2B$ ; mais ce sera une fonction de seconde espèce, aux multiplicateurs $-1, +1$.

Nous nous arrêterons d'abord à l'examen de ces périodes. Nous poserons conformément à une notation constamment adoptée

$$(9) \quad K = \varphi(+1) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Nous introduisons une quantité $k'^2 = 1 - k^2$ et nous poserons

$$(10) \qquad K' = \varphi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

la valeur initiale du radical étant toujours +1. On aura alors:

$$2A = 2K \qquad 2A - 2B = 2K - \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = 2K - 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Or faisons la substitution:

$$1 - k^2 z^2 = k'^2 t^2 \qquad k^2 z\, dz = k'^2 t\, dt$$

On a

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K - i\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

ou enfin:

$$\varphi\left(\frac{1}{k}\right) = K - iK' \qquad 2A - 2B = 2iB'$$

On aura donc en résumé les deux périodes $2K$, $2iK'$ définies par les intégrales (9) et (10); nous établirons avant tout ce point important que le rapport de ces deux périodes est imaginaire; ou en d'autres termes que dans $\frac{K'}{K}$ la partie réelle ne peut être nulle.

Supposons d'abord $k^2$ réel et compris entre zéro et un. K et K' sont alors deux intégrales rectilignes dont tous les éléments sont positifs; leur rapport est donc réel et positif et le théorème est démontré.

Si $k^2$ est réel et plus grand que un, posons

$$k^2 = 1 + m^2$$

$$z = \sin\varphi$$

d'où

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1+m^2)\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + m^2\sin^2\varphi}}$$

K' est réel et K a toujours une partie réelle qui correspond à la partie de l'intégrale prise entre zéro et la valeur réelle, positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$ de $\varphi$ qui annule le radical de cette intégrale.

Si $k^2$ est réel et négatif, posons

$$k^2 = -m^2$$

$$z = \sin\varphi$$

d'où $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+m^2\sin^2\varphi}}$ $K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1+m^2)\sin^2\varphi}}$

et le rapport est l'inverse du précédent

Abordons maintenant le cas où $k^2$ est une quantité imaginaire de la forme

$$k^2 = a + ib$$

désignons par $K_0$ l'imaginaire conjuguée de $K$, on aura $\frac{K'}{K} = \frac{K' K_0}{K K_0}$; comme le dénominateur est une somme de deux carrés réels, il suffit de considérer $K_0 K'$

On a

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a-ib)\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\psi}}$$

Effectuons le produit $K_0 K'$; nous obtiendrons une intégrale double. La règle que nous appliquons, établie pour les quantités réelles, s'établit immédiatement pour le cas d'éléments différentiels imaginaires, $A+iB$ et $A'+iB'$, en écrivant

$$\int (A+iB)\,dx = \int A\,dx + i\int B\,dx$$

$$\int (A'+iB')\,dx = \int A'\,dx + i\int B'\,dx$$

et en multipliant ces égalités membre à membre. Il vient donc

$$K_0 K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{[1-(a-ib)\sin^2\varphi][1-(1-a-ib)\sin^2\psi]}}$$

Désignons le dénominateur de l'élément différentiel par $\alpha + i\beta$

$$\alpha + i\beta = \sqrt{[1-(a-ib)\sin^2\varphi][1-(1-a-ib)\sin^2\psi]}$$

La partie réelle de $K_0 K'$ est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\, d\varphi\, d\psi}{\alpha^2+\beta^2}$$

Il suffit donc de prouver que $\alpha$ n'est pas nul. Or en élevant les deux membres de la dernière égalité au carré et en identifiant les coefficients des termes en $i$ on trouve

$$2\alpha\beta = b(\sin^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi)$$

le second membre ne s'annule que pour $\varphi = \psi = 0$, mais on reconnaît immédiatement que c'est $\beta$ qui s'annule alors, $\alpha$ étant égal à $+1$. On en conclut que $\alpha$ ne s'annule pas dans le champ d'intégration, et comme $\alpha$ est une fonction continue de $\varphi$ et $\psi$, il conservera un signe constant.

Le rapport des deux périodes est donc toujours imaginaire; il en résulte qu'on pourra s'en servir pour couvrir le plan d'un réseau de parallélogrammes; on pourra alors se contenter d'étudier la fonction dans un de ces parallélogrammes.

## III — Fonctions elliptiques.

— Nous désignerons par sn u la fonction considérée et nous en introduirons en même temps deux autres cn u, dn u, en posant:

$$(11) \qquad z = \operatorname{sn} u \qquad \sqrt{1-z^2} = \operatorname{cn} u \qquad \sqrt{1-k^2 z^2} = \operatorname{dn} u$$

et en convenant que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ se réduiront à $+1$ pour $u = 0$; les trois fonctions ainsi définies sont les fonctions elliptiques.

La fonction cn est ambigue quand $z$ est la variable indépendante, mais elle est uniforme quand $u$ est pris pour variable; en effet, d'après la théorie des fonctions implicites il ne pourrait cesser d'en être ainsi que dans le voisinage d'une valeur de $u$ annulant le radical. Or $z$ ne se réduit à $\pm 1$ que pour $u = \pm K$, en négligeant des multiples de périodes; considérons par exemple $u = K$. Posons

$$u = K + v$$

$$\operatorname{cn}(K+v) = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2(K+v)}$$

il s'agit de montrer que $\operatorname{cn}(K+v)$ est holomorphe dans le domaine de $v = 0$. Or on a

$$\operatorname{sn}(2K+v) = -\operatorname{sn}(v)$$

Changeons $v$ en $v-K$

$$\operatorname{sn}(K+v) = \operatorname{sn}(K+v)$$

Donc les deux facteurs du radical sont impairs et admettent $v=0$ comme racine simple, on a donc, dans le domaine de $u = 0$.

$$\operatorname{cn}(K+v) = \sqrt{Av^2 + Bv^4 + \dots} = v\sqrt{A + Bv^2 + \dots} \quad A \neq 0$$

donc cn est bien holomorphe pour la valeur considérée de $u$. On démontrerait de même que $\operatorname{dn} u$ est uniforme dans tout le plan.

On voit immédiatement que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ sont des fonctions paires; nous donnerons d'abord les propriétés immédiates de ces fonctions.

1° Zéros. — L'équation

$$sn\, u = b$$

où $b$ est une constante admet les zéros

$$u = \varphi(b) + 2m K + 2m' iK'$$

$$u = (2m+1) K + 2m' iK' - \varphi(b)$$

Si $b$ est égal à $0$, à $\pm 1$, à $\pm \frac{1}{k}$, ces deux séries de valeurs se confondent; on voit sans peine que dans chaque parallélogramme il y a une solution unique; on a un seul zéro de $sn\, u$ savoir $u = 0$; de même $sn(u) = \pm 1$ n'admet qu'une racine $K$ dans chaque parallélogramme; on a d'autre part

$$K - iK' = \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \equiv K + iK'$$

On en conclut que les trois fonctions s'annulent une fois chacune le premier parallélogramme et les zéros sont:

pour $sn\, u$ .......... $0$
pour $cn\, u$ .......... $K$
pour $dn\, u$ .......... $K + iK'$

On s'assure aisément, en considérant les dérivées, que ces zéros sont simples.

2° Effet d'une période. — Imaginons que la variable $z$ aille de $0$ à $z$ après avoir décrit le lacet $(0, +1)$ on voit immédiatement que $\sqrt{1-z^2}$ aura changé de signe quand on reviendra à l'origine tandis que $\sqrt{1-k^2 z^2}$ n'aura pas varié; on aura donc:

$$sn(u + 2K) = -sn\, u \qquad cn(u + 2K) = -cn\, u \qquad dn(u + 2K) = +dn\, u$$

Si nous faisons au contraire précéder le chemin rectiligne de l'ensemble des deux lacets $(0, +1)$, $(0, +\frac{1}{k})$ parcourus successivement nous aurons tourné autour d'un point critique de $dn$ considéré comme fonction de $z$; nous aurons alors

$$sn(u + 2iK') = sn\, u \qquad cn(u + 2iK') = -cn\, u \qquad dn(u + 2iK') = -dn\, u$$

En d'autres termes les multiplicateurs de $sn$, $cn$, $dn$ sont respectivement

$$-1, +1 \qquad -1, -1 \qquad +1, -1.$$

3° Pôles. — On obtient les pôles en faisant la substitution:

$$z = \frac{1}{kz'} \qquad dz = -\frac{1}{k} \cdot \frac{dz'}{z'^2}.$$

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} = K + \int_{\frac{1}{k}}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} + \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

$$\varphi(z) = K + iK - \int_1^{z'} \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k^2 z'^2)}} = 2K - iK' - \varphi(z')$$

Si on pose $z = \operatorname{sn} u$, on aura

$$\pm z' = \operatorname{sn}(2K - iK' - u) = \frac{\pm 1}{k \operatorname{sn} u}$$

ou encore

$$\operatorname{sn}(iK' + u) = \pm \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

nous mettons un double signe, parce qu'on ignore pour chacune des intégrales $\varphi(z)$ $\varphi(z')$ la valeur initiale du radical ; mais nous lèverons cette ambiguité en faisant $u = K$ on aura alors

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \operatorname{sn}(K - iK') = \frac{1}{k}$$

On aura donc en définitive

$$\operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$$

Les pôles de $\operatorname{sn} u$ seront donc les zéros de $\operatorname{sn}(u + iK')$ ; ils sont donnés par la formule

$$\pm iK' + 2mK + 2m'iK'$$

Il y en a un seul dans chaque parallélogramme des périodes

Il est clair que nos trois fonctions ont les mêmes infinis ; on a par exemple

$$\operatorname{cn}(u + iK') = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 u}} = \pm \frac{i \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}$$

On en conclut que $\dfrac{1}{\operatorname{cn}(u + iK')}$ est holomorphe pour $u = 0$ qui en est un zéro simple ; donc $iK'$ est un pôle et un pôle simple de $\operatorname{cn} u$ ; on verrait qu'il en est de même pour $\operatorname{dn} u$.

4° Expression à l'aide des fonctions $\sigma$. —— Le rapport $\frac{iK'}{K}$ étant imaginaire on peut constituer une fonction $\sigma$ aux deux périodes $2K$, $2iK'$, il suffit de faire $K = \omega_1$, $iK' = \omega_3$ ; observons en outre que nous pouvons dans tout ce qui précède remplacer $k$ par $-k$ ce qui n'aurait d'autre effet que de changer le signe de $K'$ et par suite le signe du coefficient de $i$ dans le rapport des périodes ; nous admettrons naturellement qu'on ait choisi le point $\frac{1}{k}$ de manière à ce que ce rapport soit $> 0$ ce qui nous permettra d'introduire les fonctions $\theta$.

Dans ces conditions on aura immédiatement (voir II page 115) les égalités :

$$(12) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \qquad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \qquad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

car dans chacune d'elles les deux membres ont mêmes périodes, mêmes multiplicateurs, même zéro, même infini, mêmes valeurs initiales ; nous pourrions maintenant considérer l'inversion comme faite et renvoyer aux propriétés des fonctions $\sigma$. Mais il est bon de voir comment on peut achever la théorie des fonctions elliptiques en ne se servant que de l'intégrale

Cherchons d'abord l'effet de la demi période $iK'$. On a

$$dn(u+iK') = \sqrt{1-\frac{1}{sn^2 u}} = \varepsilon\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

$\varepsilon$ étant égal à $\pm i$ — Pour lever l'ambiguité de signe, nous nous servirons des formules (12) (Si on ne tient pas à introduire les fonctions $\sigma$ ce signe reste absolument arbitraire). Faisons $u = K = \omega$ ; on a en appliquant la règle de l'Hospital

$$\frac{\sigma_2'(\omega+\omega')}{\sigma_3(\omega+\omega')} = \varepsilon\,\frac{\sigma_1'(\omega)}{\sigma(\omega)} \qquad \varepsilon = -i$$

On aura donc

$$dn(u+iK') = -i\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

Changeons $u$ en $u+iK'$ et observons que $dn(2iK') = 1$, nous aurons

$$-sn(u+iK')\,dn\,u = -i\,cn(u+iK') = -\frac{dn\,u}{K\,sn\,u}$$

On a donc en résumé

$$(13) \qquad sn(u+iK') = \frac{1}{K\,sn\,u} \qquad cn(u+iK') = \frac{-i\,dn\,u}{K\,sn\,u} \qquad dn(u+iK') = -i\,\frac{cn\,u}{sn\,u}$$

Nous terminerons par une remarque relative à la quantité $K'$ qui, dans la théorie, ne figure que par son carré ; on a en faisant $u = K$

$$sn\,K = 1 \qquad cn\,K = 0 \qquad dn\,K = \sqrt{1-k^2}$$

Nous conviendrons de poser $k' = dn\,K$, ce qui lève toute ambiguité de signe.

## IV — Théorème d'addition.

— Considérons deux variables $x, y$ liées par la relation :

$$(14) \qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

On peut en avoir l'intégrale à l'aide des fonctions elliptiques ; il suffit de poser

$$x = sn\,u \qquad y = sn\,v$$

et l'équation (14) s'écrivant alors $d(u+v)=0$ exprime simplement que $u+v$ reste constant. On peut d'ailleurs avoir l'intégrale sous forme algébrique. Cette intégrale due à Euler, peut être obtenue par bien des procédés. Voici celui de M^r Darboux. Exprimons $x$ et $y$ à l'aide d'une même variable, en posant

$$(15)\qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \qquad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

Si à l'aide de ces formules (15) on forme les deux combinaisons

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} \qquad x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

et qu'on les divise membre à membre, on met l'équation (14) sous la forme

$$(16)\qquad \frac{x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}}{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-2k^2xy\left(x\dfrac{dy}{dt}+y\dfrac{dx}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2}.$$

Or cette équation s'intègre immédiatement les deux membres étant des dérivées logarithmiques et on a

$$\frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{1-k^2x^2y^2} = \text{constante}.$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par les valeurs (15) nous aurons immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v + \operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v} = \text{const}.$$

On en conclut que le premier membre est une fonction de $u+v$; on fait $v=0$ et on en déduit que cette fonction est $\operatorname{sn}(u+v)$. Connaissant $\operatorname{sn}(u+v)$ on calcule $1-\operatorname{sn}^2(u+v)$; on en déduit $\operatorname{cn}(u+v)$ en faisant $v=0$ pour déterminer le signe; enfin un calcul analogue donne $\operatorname{dn}(u+v)$; on a ainsi les trois équations d'additions :

$$(17)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{sn}u.\operatorname{cn}v.\operatorname{dn}v + \operatorname{sn}v.\operatorname{cn}u.\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2v} \\[2ex] \operatorname{cn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}v - \operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v} \\[2ex] \operatorname{dn}(u+v) = \dfrac{\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}v - k^2\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}v.\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2v} \end{cases}$$

Ces formules peuvent servir de point de départ à une théorie complète des fonctions elliptiques en y faisant $v = K$ on en déduit l'effet d'une demi première période:

$$\operatorname{sn}(u+K)=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u} \qquad \operatorname{cn}(u+K)=-\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}K' \qquad \operatorname{dn}(u+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn}u}$$

Tous les résultats trouvés peuvent être résumés dans le tableau suivant

| | $\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u$ | $\operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u$ | $\operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u$ |
|---|---|---|---|
| Multiplicateurs | $-1 \quad +1$ | $-1 \quad -1$ | $+1 \quad -1$ |
| Zéro | $0$ | $K$ | $K+iK'$ |
| Pôle | $iK'$ | $iK'$ | $iK'$ |
| $f(u+K)=$ | $\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$ | $-K'\dfrac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}$ | $K'\dfrac{1}{\operatorname{dn}u}$ |
| $f(u+iK')=$ | $\dfrac{1}{K\operatorname{sn}u}$ | $-\dfrac{i}{K}\dfrac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}$ | $-i\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$ |
| Dérivée | $\operatorname{cn}u\,\operatorname{dn}u$ | $-\operatorname{sn}u\,\operatorname{dn}u$ | $-K^2\operatorname{sn}u\,\operatorname{cn}u$ |

auquel il faut joindre les égalités (9) et (10) que nous reproduisons

$$K=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \qquad (k^2+k'^2=1)$$

et les expressions des trois dérivées

$$\frac{d\operatorname{sn}u}{du}=\operatorname{cn}u.\operatorname{dn}u \qquad \frac{d\operatorname{cn}u}{du}=-\operatorname{sn}u.\operatorname{dn}u \qquad \frac{d.\operatorname{dn}u}{du}=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$$

---

# Dix septième Leçon

## Courbes de genre un – Cubiques.

**I – Intégrales abéliennes.** —— On appelle intégrale abélienne une intégrale de la forme

$$(1) \quad I = \int^z R(x,y)\,dx$$

$R$ étant une fonction rationnelle de $x$ et de $y$, $y$ une fonction algébrique de $x$ définie par l'équation

$$(2) \quad F(x,y) = 0$$

Dans l'étude de l'intégrale (1) la courbe représentée par l'équation (2) a naturellement une importance particulière. – Lorsque cette courbe est de degré $n$, et qu'elle a un nombre de points doubles égales à $\delta$, le nombre

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \delta$$

est nécessairement positif ou nul, à moins que la courbe ne se scinde en courbes de degré inférieur. Ce nombre $g$ est ce qu'on appelle le genre de la courbe (2). S'il est égal à 0, la courbe est unicursale. On a vu, (1^re Partie, page 90) que dans ce cas, et seulement dans ce cas, les coordonnées de chaque point de la courbe peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre $u$:

$$(3) \quad x = f(u) \qquad y = \varphi(u)$$

La substitution de $u$ à $x$ ramène alors la différentielle $R(x,y)dx$ à la forme $\mathcal{R}(u)\,du$, $\mathcal{R}$ étant une fonction rationnelle – L'intégrale $I$ peut alors s'obtenir à l'aide des fonctions rationnelles et de logarithmes

Considérons le cas où $f$ et $\varphi$ sont des fonctions fractionnaires doublement périodiques, aux mêmes périodes $2\omega, 2\omega'$. On aura alors:

$$R(x,y)\,dx = R\left[f(u), \varphi(u)\right] f'(u)\,du = \mathcal{R}(u)\,du.$$

$\mathcal{R}(u)$ étant une fonction fractionnaire doublement périodique aux périodes $2\omega, 2\omega'$; on peut alors, d'après le théorème d'Hermite, représenter

$\mathcal{R}(u)$ par une somme de termes de la forme

$$c + A\zeta(u-a) + A_1\zeta'(u-a) + \dots + A_p\zeta^{p}(u-a)$$

Mais une pareille somme s'intègre immédiatement et a pour intégrale

$$cu + AL\,\sigma(u-a) + A_1\zeta(u-a) + \dots + A_p\zeta^{(p-1)}(u-a).$$

La détermination de l'intégrale I s'achève donc comme pour le cas d'une courbe (2) unicursale ; mais elle contiendra des fonctions doublement périodiques. — On voit par là, l'intérêt que présentent les courbes représentées par les équations (3) où f et φ sont des fonctions fractionnaires et doublement périodiques.

II — Courbes de genre un. —. Les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u)$ pouvant l'une et l'autre s'exprimer rationnellement à l'aide d'une fonction elliptique et de sa dérivée (voir page 113), nous dirons d'une manière générale que $x$ et $y$ sont des fonctions elliptiques de $u$, et nous sous entendrons qu'elles ont les mêmes périodes. On peut d'ailleurs donner une expression régulière de ces fonctions. Supposons qu'on les exprime à l'aide de $p\,u$ $p'u$. On aura d'abord

$$x = \frac{A}{C} \qquad y = \frac{B}{C}$$

A, B, C étant les 3 fonctions entières de $pu$, $p'u$. Or chacune de ces fonctions aura un pôle unique 0, (on ne considère qu'un parallélogramme des périodes). Soit $n$ le degré maximum de ce pôle dans les trois fonctions A, B, C. La formule de Mr Hermite donne, en remarquant que le résidu du pôle multiple est nul dans chacune des trois fonctions :

$$A = a_1 + b_1\zeta'(u) + c_1\zeta''(u) + \dots + l_1\zeta^{(n-1)}(u)$$

ou en introduisant $pu$ $p'u$,

$$A = a_1 + b_1\,pu + c_1\,p'u + \dots\; l_1\,p^{(n-2)}(u)$$

on en conclut que les coordonnées homogènes $x\,y\,z$ de chaque point de la courbe seront (Halphen — Fonctions elliptiques Tome II page 415), les coefficients $a_i$ $b_j$ .... étant proportionnels à des constantes

$$x = a_1 + b_1\,pu + \dots + l_1\,p^{(n-2)}(u) = f_1(u)$$
$$y = a_2 + b_2\,pu + \dots + l_2\,p^{(n-2)}(u) = f_2(u)$$
$$z = a_3 + b_3\,pu + \dots + l_3\,p^{(n-2)}(u) = f_3(u)$$

Il est évident que cette courbe est algébrique. On a facilement son degré ; si on cherche en effet les points où elle coupe la droite

$$(5) \qquad Ax + By + Cz = 0$$

ces points sont donnés par les valeurs de $u$ appartenant à un parallélogramme et telles qu'on ait :

$$(6) \qquad A f_1(u) + B f_2(u) + C f_3(u) = 0$$

Or le premier membre de cette équation est une fonction elliptique à $n$ pôles ; elle admet donc $n$ zéros. Donc la courbe est du degré $n$.

Cherchons maintenant le genre $g$. Si nous écrivons que la droite (5) passe par un point $\alpha\beta\gamma$ du plan, et qu'elle est vérifiée par deux valeurs infiniment voisines de $u$, nous aurons en éliminant $A, B, C$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ f_1(u) & f_2(u) & f_3(u) \\ f'_1(u) & f'_2(u) & f'_3(u) \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation (voir 1ère partie page 91) est vérifiée par les points de contact des tangentes menées de $(\alpha, \beta, \gamma)$ et aussi par les points de rebroussement. Son degré est donc égal à

$$n(n-1) - 2d - 3r + r = n(n-1) - 2\delta$$

$\delta$ étant le nombre des points doubles ($d$ et $r$ désignant du le nombre des points doubles et celui des points de rebroussement, et on suppose qu'il n'y a pas de singularités d'ordre plus élevé.)

Or $\Delta$ est une fonction elliptique à $2n$ pôles, car si on forme le mineur

$$f_i f'_j - f_j f'_i$$

on voit immédiatement que les termes contenant $p$ avec l'indice de dérivation le plus élevé, $2n-1$) disparaissent. Cet indice se réduit donc à $2n-2$. Donc 0 est un pôle d'ordre $2n$ de $\Delta$. Donc $\Delta = 0$ admet $2n$ racines ; on a donc :

$$n(n-1) - 2\delta = 2n \qquad \delta = \frac{n(n-3)}{2} \qquad g = \frac{(n-1)(n-2) - n(n-3)}{2} = 1$$

de là le théorème suivant :

Théorème ___ Si les coordonnées de chaque point d'une courbe s'expriment par des fonctions elliptiques d'un même argument, à $n$ pôles, la courbe est algébrique, du degré $n$ et du genre 1.

La réciproque est exacte et peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — . Lorsqu'une courbe algébrique est de genre 1, les coordonnées de chaque point peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques, à n pôles, d'un même argument.

La démonstration de ce théorème est compliquée ; nous nous contenterons de l'esquisser.

En général, une courbe de degré n' est définie par $\frac{n'(n'+3)}{2}$ points. Soit C' une pareille courbe, δ le nombre des points doubles de la courbe C ; assujettissons C' à passer par les points doubles de C et en outre par $\frac{n'(n'+3)}{2} - \delta - 1$ points simples pris également sur C ; la courbe C' ne sera déterminée qu'à un point près ; le nombre total des points fixes communs à C et C' sera :

$$2\delta + \frac{n'(n'+3)}{2} - \delta - 1 = \delta - 1 + \frac{n'(n'+3)}{2} = \frac{n(n-3) + n'(n'+3)}{2} = 1$$

Il est impossible de déterminer n' de telle sorte qu'il ne reste qu'un point d'intersection variable, car alors la courbe C serait unicursale — Cherchons à déterminer n' de telle sorte que le nombre des points variables soit égal à 2 ; nous aurons :

$$\frac{n'(n'+3) + n(n-3)}{2} + 1 = n n'$$

ou

$$n'^2 - n'(2n-3) + n(n-3) + 2 = 0$$

cette équation admet deux racines entières $n' = n-1$ $n' = n-2$.

Prenons par exemple des courbes C' variables de degré $(n-2)$. Soit $S = 0$ $S' = 0$ les équations de deux d'entre elles ; les courbes C' formeront un faisceau

$$(6) \qquad S + \lambda S' = 0$$

Entre cette équation et celle de C, $F(x,y) = 0$ éliminons y ; il viendra une équation entière en x de degré $nn'$, à coefficients entiers par rapport à λ ; $nn' - 2$ racines de cette équation finale seront connues d'avance, on pourra donc en débarrasser l'équation qui se réduira à la forme

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

A, B, C étant trois polynômes entiers en λ. L'équation $B^2 - AC = 0$ fournira les valeurs de λ telles que les courbes (6) soient tangentes à C en un point M. Or on démontre :

1° Qu'il y a seulement 4 courbes C' tangentes à C en un point M distinct des points fixes qui ont servi à constituer le faisceau

2° Que les valeurs de λ correspondant au cas où M coïnciderait avec un des points fixes sont d'un ordre pair de multiplicité

Il résulte de là qu'on peut écrire

$$B^2 - AC = M^2 N$$

M, N étant deux polynômes entiers dont le second est du 4ᵉ degré en $\lambda$; on aura alors:

$$x = \frac{-B + M\sqrt{N}}{A}$$

Donc $x$ s'exprime en fonction rationnelle de $\lambda$ et $\sqrt{N}$.

En éliminant $x$ au lieu de $y$, on exprimerait $y$ en fonction rationnelle de $\lambda$ et d'un radical $\sqrt{N_1}$; mais les équations $N=0$ $N_1=0$ ont les mêmes racines puisqu'elles doivent déterminer les mêmes quatre courbes du faisceau C'. Donc enfin:

Les coordonnées de chaque point de C peuvent être exprimées sous la forme

$$(7) \quad x = \mathcal{R}(\lambda, \sqrt{N}) \quad y = \mathcal{R}_1(\lambda, \sqrt{N})$$

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ étant des fonctions rationnelles.

Faisons maintenant la transformation de Legendre:

$$x = \frac{p + qt}{1 + t}$$

On ramènera $\sqrt{N}$ à la forme:

$$\sqrt{N} = \sqrt{g(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

Posant alors

$$t = \mathrm{sn}\,u \quad \sqrt{N} = \sqrt{g}\;\mathrm{cn}\,u\,.\,\mathrm{dn}\,u$$

on voit que $x, y$ se trouveront exprimées par des fonctions fractionnaires doublement périodiques, aux périodes $4K$, $2iK'$; ce qui démontre le théorème énoncé.

Revenons maintenant à l'intégrale I. On commencera par compter les points doubles de la courbe auxiliaire $F(x,y) = 0$. Si le genre de la courbe est 1, à l'aide d'un faisceau de courbes, on mettra d'abord les coordonnées sous la forme (7), on fera ensuite la transformation de Legendre, et on sera ramené à la forme (3); il suffira de faire la transformation de Mr Hermite pour obtenir l'intégrale.

## III — Propriétés des courbes du 3ᵉ ordre.

La forme particulière (4) donnée aux équations d'une courbe de genre I, met en évidence un grand nombre de leurs propriétés géométriques. Nous donnerons un exemple de ce genre d'applications en considérant seulement le cas le plus intéressant $n=3$. La courbe est alors du 3ᵉ degré et sans point double. Ses équations sont

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= a_1 + b_1\,pu + c_1\,p'u = f_1(u) \\ y &= a_2 + b_2\,pu + c_2\,p'u = f_2(u) \\ z &= a_3 + b_3\,pu + c_3\,p'u = f_3(u \end{aligned}$$

L'intersection de la cubique avec une courbe de degré $n$ $f(x,y,z)=0$ sera donnée par

$$f(f_1 f_2 f_3)=0$$

dont le 1er membre est une fonction elliptique à $3n$ pôles; comme ces pôles ont une somme nulle, il en est de même des zéros correspondants; les points d'intersection satisferont donc à la condition

$$(9) \qquad u_1+u_2+u_3+\dots+u_{3n}\equiv 0$$

Le signe $\equiv$ indiquant l'égalité à $2m\omega+2m'\omega'$ près

Par exemple, si $n=2$, on aura:

$$(10) \qquad u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6\equiv 0$$

et cette condition est nécessaire pour que les 6 points $u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5\, u_6$ soient sur une même conique. — Elle est d'ailleurs suffisante; faisons en effet passer une conique par les cinq premiers points $u_1\, u_2\, u_3\, u_4\, u_5$, elle coupera la cubique en un sixième point $v$ et l'on aura:

$$u_1=u_2+\dots+u_5+v\equiv 2m_1\omega+2m'_1\omega'$$

Si on compare les deux dernières équations, on en conclut que $v=u_6$ à une période près.

La condition $\qquad (11) \qquad u_1+u_2+u_3\equiv 0$

exprime de même la condition nécessaire et suffisante pour que 3 points de la cubique soient en ligne droite. — Si $n>2$ la condition (9) est nécessaire mais non plus suffisante pour que les $3n$ points considérés soient sur une courbe de degré $n$.

Ceci posé, soient

$$\begin{array}{lll} M_1(u_1) & N_1(v_1) & P_1(w_1) \\ M_2(u_2) & N_2(v_2) & P_2(w_2) \\ M_3(u_3) & N_3(v_3) & P_3(w_3) \end{array}$$

neuf points situés sur la cubique; supposons en ligne droite ceux qui sont écrits sur une ligne horizontale, on aura:

$$u_1+v_1+w_1\equiv 0 \qquad u_2+v_2+w_2\equiv 0 \qquad u_3+v_3+w_3\equiv 0$$

On en conclut $\qquad (u_1+u_2+u_3+v_1+v_2+v_3)+(w_1+w_2+w_3)\equiv 0$

Si nous supposons alors les 6 points $(M,N)$ sur une conique, la première parenthèse $\equiv 0$, donc il en est de même de la seconde, et les points $P$ sont en ligne droite. Donc:

**Théorème.** — Lorsque trois couples de points d'une cubique sont sur une même conique, les trois cordes correspondantes vont couper la cubique en trois autres points qui sont en ligne droite.

En supposant que certains couples de points coïncident, on aura des cas particuliers intéressants; par exemple:

1°. Étant donné deux points A et B sur la courbe, on peut de quatre manières en trouver un troisième C tel qu'il y ait une conique tangente en A, B, C à la cubique. Les tangentes en A, B, C, rencontrent la cubique en trois points qui sont en ligne droite.

Si $u_1, u_2$ sont les arguments de A, B, celui de C sera donnée par:

$$2u_3 = -2u_1 - 2u_2 + 2m\omega + 2m'\omega'$$

ce qui donne seulement quatre points distincts:

$$u_3 = -u_1 - u_2 \qquad u'_3 = -u_1 - u_2 + \omega \qquad u''_3 = -u_1 - u_2 + \omega' \qquad u'''_3 = -u_1 - u_2 + \omega + \omega'$$

2°. Si on suppose que la conique se réduise à deux droites confondues, on a le théorème:

Trois tangentes dont les points de contact sont en ligne droite coupent la cubique en trois autres points qui sont aussi en ligne droite.

Les points d'inflexion sont fournis par un cas particulier de cette dernière propriété; nous y reviendrons tout à l'heure.

Classe de la courbe. —— L'équation $\Delta = 0$ a ici 6 pôles; donc la cubique est de la 6e classe. D'un point P on peut lui mener 6 tangentes dont les points de contact sont sur une même conique – Si le point est sur la courbe il n'y a que quatre tangentes – Soit $v$ l'argument de P, $u_1, u_2, u_3, u_4$ ceux des points de contact on a:

$$2u_i + v = 2m\omega + 2m'\omega'$$

On ne peut donner à $m$, $m'$ que les valeurs 0, 1; on a donc:

$$(12) \quad u_1 = -\frac{v}{2} \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega \quad u_3 = -\frac{v}{2} + \omega' \quad u_4 = -\frac{v}{2} + \omega + \omega'$$

Les points de contact sont donc complètement déterminés; on a:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + 2v = 2\omega + 2\omega' \equiv 0$$

Donc la conique qui passe par P et les quatre points correspondants touche la cubique au point P.

Cette conique est la polaire de P par rapport à la cubique. On sait qu'elle ne peut se réduire à deux droites que dans le cas d'un point d'inflexion. Si P est un point d'inflexion on a $3v \equiv 0$. L'équation

$$2u_i + v = 2m\omega + 2m'\omega'$$

admet d'abord la solution $u_i = v$, et il reste trois tangentes seulement distinctes de la tangente en P. Les trois points de contact sont sur une droite; on a en effet

$$u_1 + u_2 + u_3 = -\frac{3v}{2} + \omega + \omega' \equiv 0$$

car $-\frac{3v}{2} + \omega + \omega'$ est évidemment une période.

Théorème de Salmon. —— Le point P étant supposé mobile, il est clair que le rapport anharmonique $\rho$ des quatre tangentes $(vu_1)(vu_2)(vu_3)(vu_4)$ est une fonction elliptique de $v$; il suffit de regarder les valeurs (12) pour voir que jamais deux des tangentes ne peuvent avoir la même direction; cela est

[redacted]



d'ailleurs facile à voir géométriquement. Donc $p$ ne peut jamais devenir infini; cette fonction $p$ est donc une simple constante. De là le théorème suivant.

**Théorème.** — Le rapport anharmonique des 4 tangentes menées d'un point P situé sur la courbe est indépendant de la position de ce point.

Revenons aux points d'inflexion. Chacun d'eux pouvant être considéré comme formé de 3 points confondus en ligne droite, l'équation qui les détermine est :

$$3u = 2m\omega + 2m'\omega'$$

on en conclut 9 points d'inflexion correspondant aux valeurs de m situées dans le tableau suivant :

| | | |
|---|---|---|
| 00 | 01 | 02 |
| 10 | 11 | 12 |
| 20 | 21 | 22 |

On voit immédiatement que chaque ligne horizontale donne trois points situés en ligne droite. Ces trois droites forment un triangle d'inflexion; on reconnaît aisément qu'on obtient des triangles d'inflexion soit à l'aide des 3 colonnes verticales, soit à l'aide des trois éléments qui, dans un déterminant fourniraient des termes affectés du signe +, soit à l'aide des trois éléments qui fourniraient des termes affectés du signe -.

**Points Steiner.** — On appelle point Steiner un point où la cubique admet une conique surosculatrice c'est-à-dire la rencontrant en 6 points confondus; un pareil point S est défini par l'équation

$$6u \equiv 0$$

Or soit $v$ l'argument correspondant au point Q où la tangente en S rencontre la cubique, on aura :

$$v + 2u \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad 3v + 6u \equiv 0$$

$$\text{d'où enfin} \quad 3v \equiv 0$$

Donc $v$ est un point d'inflexion. De là le théorème suivant :

Il existe 27 points Steiner sur une cubique; ils se décomposent en 9 groupes dont chacun est formé des points de contact des tangentes issues d'un point d'inflexion

**Transformation homographique.** — Remarquons enfin que d'après les équations (8) toute courbe du 3e ordre peut être considérée comme la transformée homographique de la suivante :

$$x = p(u) \quad y = p'(u) \quad z = 1$$

dont l'équation algébrique, est d'après la relation comme en $p$ et $p'$

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

On déduit bien aisément de ce fait la valeur de la constante qui figure dans le théorème de Salmon ; on peut en effet considérer la courbe précédente puisqu'il ne s'agit d'évoluer qu'un élément projectif, et en outre, mener les tangentes du sommet de la courbe, lequel a pour argument $(\omega'+\omega')$. Les coefficients angulaires des tangentes sont deux à deux égaux et de signes contraires. On trouve facilement, en conservant les notions de la page 109

$$\mathcal{R} = \frac{p(\omega_\alpha) - p(\omega_\gamma)}{p(\omega_\beta) - p(\omega_\gamma)} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma}$$

**IV — Intersection de deux quadriques.** — La même représentation analytique s'applique sans difficulté à l'intersection de deux surfaces du second ordre ; écrivons leurs équations sous la forme suivante

$$(13) \quad \begin{aligned} &Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z=0 \\ &A_1x^2+A_1'y^2+A''z^2+2B_1yz+2B_1'zx+2B_1''xy+2C_1x+2C_1'y+2C_1''z=0 \end{aligned}$$

l'origine étant un point quelconque de la courbe. On pourra représenter cette courbe par les relations

$$(14) \quad \begin{cases} x = \lambda z \qquad y = \mu z \\ \dfrac{A\lambda^2+A'\mu^2+2B''\lambda\mu+2B'\lambda+2B''\mu+A''}{C\lambda+C'\mu+C''} = \dfrac{A_1\lambda^2+A_1'\mu^2+2B_1''\lambda\mu+\dots+A_1''}{C_1\lambda+C_1'\mu+C_1''} \end{cases}$$

La dernière des équations (14) donne une équation du 3e degré entre $\lambda$ et $\mu$ ; en y regardant $\lambda, \mu$ comme des coordonnées, elle représente une cubique et on peut exprimer $\lambda, \mu$ en fonctions elliptiques d'un paramètre ; ces mêmes équations (14) montrent que $z$, et par suite $x, y$ seront des fonctions elliptiques. En introduisant des coordonnées homogènes et en remarquant que ces fonctions doivent avoir quatre pôles, un plan coupant toujours la courbe en 4 points, on aura :

$$(15) \quad \begin{cases} x = a_1+b_1\,pu + c_1\,p'u + l_1\,p''u \\ y = a_2+b_2\,pu + c_2\,p'u + l_2\,p''u \\ z = a_3+b_3\,pu + c_3\,p'u + l_3\,p''u \\ t = a_4+b_4\,pu + c_4\,p'u + l_4\,p''u \end{cases}$$

De ces équations on tire un grand nombre de conséquences analogues à celles que nous avons obtenues pour les cubiques planes.

La condition nécessaire et suffisante pour que $u_1$ $u_2$, $u_3$ $u_4$ soient les

arguments de quatre points situés dans un même plan est

$$(16) \qquad u_1+u_2+u_3+u_4 \equiv 0$$

le plan osculateur en $u$ coupe la courbe en un point $v$ tel qu'on ait

$$3u+v=2m\omega+2m'\omega'$$

A quatre points dans un même plan correspondront quatre points $v$, tels qu'on ait :

$$v_1+v_2+v_3+v_4+3(u_1+u_2+u_3+u_4) \equiv 0$$

Donc

$$v_1+v_2+v_3+v_4 \equiv 0$$

Donc les plans osculateurs en quatre points situés dans un même plan, coupent la courbe en quatre autres points également dans un même plan.

Les points stationnaires où le plan osculateur a un contact du 3^e^ ordre sont donnés par l'équation

$$4u=2m\omega+2m'\omega'$$

On peut donner à $m$ et à $m'$ toutes les valeurs 0, 1, 2, 3 ; de là 16 points stationnaires ; on reconnait aisément qu'ils sont 4 par 4 dans un même plan. Leur théorie est analogue à celle des points d'inflexion d'une cubique plane.

Si par deux points fixes $A(v)$, $B(w)$, on mène des plans tangents, les points de contact $u$ sont déterminés par l'équation

$$2u+v+w=2m\omega+2m'\omega'$$

On ne peut attribuer à $m$ $m'$ que les valeurs 0, 1, de là quatre points de contact ; on s'assure aisément que jamais deux des points considérés ne peuvent être dans un même plan avec A et B ; cela est d'ailleurs évident puisqu'un pareil plan couperait la courbe en 6 points ; il suit de là que le rapport anharmonique des quatre plans est, en considérant A comme fixe, une fonction doublement périodique de $w$, et que cette fonction ne peut jamais devenir infinie ; c'est donc une simple constante. Mais il est clair qu'elle ne peut davantage dépendre de $v$ ; donc :

Par une corde AB de la biquadratique, on peut lui mener quatre plans tangents, dont le rapport anharmonique est constant quand la corde AB varie.

Nous n'insisterons pas plus longuement sur ces propriétés. (Voir Halphen Tome II, page 451).

Remarquons seulement que nous avons supposé que l'équation (14)

en $\lambda\mu$, ne représentait pas une cubique à point double ; s'il en était ainsi, en appelant $\lambda_0 \mu_0$ les coordonnées du point double, on pourrait faire $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, car cela revient à remplacer $\lambda\mu$ par $\lambda + \lambda_0$, $\mu + \mu_0$ ; les conditions pour qu'il en soit ainsi seraient alors

$$A''C''_1 = A''_1C'' \qquad 2B'C''_1 + A''C_1 = 2B'_1C'' + A''_1C \qquad 2B''C'''_1 + A''C'_1 = 2B''_1C'' + A''_1C'$$

Or elles expriment, comme on le voit aisément, ou que les deux quadriques se touchent en deux points, ou qu'elles ont une génératrice commune. Dans ce dernier cas, l'intersection proprement dite est une cubique gauche, et il résulte de ce qui précède, qu'on peut exprimer les coordonnées de chaque point par des fonctions rationnelles d'un paramètre.

---

# Fin de la 2ème Partie.

---

Imp. F. Hermet, 70, Rue de Rennes. Paris

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

# COURS D'ANALYSE

PROFESSÉ PAR

**M. DEMARTRES**

ET RÉDIGÉ PAR

**M.-E. LEMAIRE**

## TROISIÈME PARTIE

**ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

**PARIS**

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

8, *Rue de la Sorbonne*, 8

1896

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE PARTIE

### Généralités sur les systèmes d'équations différentielles



---

## DEUXIÈME PARTIE

### Procédés d'intégration

# TROISIÈME PARTIE

## Équations d'ordre supérieur. — Système d'équations différentielles

## QUATRIÈME PARTIE

### Équations aux dérivées partielles



---

## CINQUIÈME PARTIE

### Calcul des variations



ERRATUM. — L'énoncé du premier exercice, page 57, doit être complété ainsi qu'il suit :
Trouver une courbe plane telle que la projection de la normale sur l'axe des $y$, *parallèlement à la tangente*, ait une longueur constante $2a$.

---

Tours. — Imprimerie Deslis Frères

qui vérifient les inégalités $|z_i - a_i| < \rho$.

4°_ Les dérivées partielles de la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, dans les mêmes limites sont déterminées par les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0.$$

C'est dans ce sens qu'on dit que l'équation

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n, u) = 0$$

définit $u$ comme fonction implicite des variables $z_1, z_2, \dots, z_n$. Cette définition se précise d'ailleurs complètement si on démontre que la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est la seule fonction continue des $z$ qui, dans les environs des valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$, vérifie l'équation donnée ; on établit sans peine ce théorème comme dans le cas d'une seule variable indépendante ; reprenons rapidement cette démonstration.

— Dans les plans des variables $z$, traçons, à partir des points $a_1, \dots a_n$, des courbes $C_1, C_2, \dots, C_n$, en ne conservant pour chacune d'elles que la partie comprise à l'intérieur d'un cercle du rayon $\rho$ défini précédemment. Supposons qu'il existe une fonction $\psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ définie et continue le long des arcs $C$ et vérifiant identiquement, le long de ces arcs, la relation

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n \, \psi) = 0 ;$$

nous allons montrer que pour ces valeurs des $z$, les fonctions $\varphi$ et $\psi$ coïncident.

En effet, soit $\psi = \varphi + \lambda$,

La fonction $\lambda(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sera, le long des courbes $C$, bien définie et continue, elle s'annulera pour $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2, \dots, z_n = a_n$, puisque pour ces valeurs des $z$, les fonctions $\varphi$ et $\psi$, prennent toutes deux la valeur $b$.

La fonction $f(z_1, z_2, \dots z_n, \varphi + \lambda)$

sera alors, en supposant qu'on ait diminué au besoin la valeur de $\rho$, développable en série entière, et on aura :

$$f(z_1, z_2, \dots z_n, \varphi + \lambda) = f(z_1, z_2, \dots z_n, \varphi) + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots$$

Donc, pour les valeurs des $z$ considérées, c'est-à-dire le long des arcs $C$, on aura identiquement

$$\lambda(A_1 + A_2 \lambda + \dots) = 0.$$

Le coefficient $A_1$ n'est autre chose que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}$; donc à cause de l'hypothèse faite sur cette dérivée, $A_1$ ne s'annule pas lorsque

l'on donne aux $z$ leurs valeurs initiales $z_i = a_i$, de plus, la fonction $\lambda$ est continue; la parenthèse $A_1 + A_2\lambda + \dots$, n'étant pas nulle pour les valeurs initiales des $z$, reste différente de zéro à l'intérieur des cercles de rayon $\rho$, si $\rho$ est suffisamment petit. Donc enfin la fonction $\lambda(z_1, z_2, \dots z_n)$ est identiquement nulle tout le long des arcs $c_1, c_2, \dots c_n$, ce qu'il fallait démontrer.

**II. — Expression analytique de la fonction implicite.** — L'existence de la fonction implicite une fois établie, il est aisé de résoudre analytiquement l'équation $f(z_1, z_2, \dots z_n, u) = 0$,
ou en d'autres termes, de trouver une expression analytique, donnant explicitement la fonction $\varphi(z_1, z_2, \dots z_n)$ à l'aide des variables $z$.

En effet, l'existence de cette fonction étant admise, les règles du calcul différentiel permettent d'obtenir de proche en proche les expressions de toutes ses dérivées partielles des divers ordres et en particulier les valeurs initiales de ces dérivées, c'est-à-dire ce qu'elles deviennent lorsque l'on donne aux variables $z$ les valeurs $a_1, a_2, \dots a_n$. Cela suffit pour pouvoir calculer tous les termes du développement de la fonction $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ en série entière, et on a de cette façon une expression analytique de la fonction implicite. Ce premier développement n'est valable que si l'on ne s'écarte pas trop des valeurs initiales; dans chaque cas particulier, on pourra de proche en proche calculer d'autres développements qui donneront l'expression de la fonction pour un système de valeurs quelconques des variables; c'est ce que nous avons fait pour une fonction déterminée par une intégrale définie (2ième partie, page 50). — On aura soin de faire suivre aux variables $z$ des chemins ne passant pas par des points critiques, c'est-à-dire tels que pour ces valeurs la fonction $f(z_1, z_2, \dots z_n, u)$ cesse d'être holomorphe, ou que $\frac{\partial f}{\partial u}$ cesse d'être différent de zéro.

**III — Système de fonctions implicites.** — Nous pouvons maintenant démontrer un théorème général d'où résulte l'existence d'un système de fonctions implicites en nombre quelconque. — Ce théorème est le suivant :

**Théorème** — Soit un système d'équations de la forme :

$$(\alpha)\begin{cases} f_1(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p) = 0 \\ f_2(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_p(z_1, z_2, \dots z_n, u_1, u_2, \dots u_p) = 0 . \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_p$, s'annulent quand on y fait, d'une manière générale $z_i = \alpha_i \quad u_j = b_j$ :

2° Ces fonctions sont holomorphes par rapport aux $n+p$ variables dont elles dépendent, dans le voisinage de ces valeurs initiales.

3° Le déterminant fonctionnel $\frac{D(f_1 f_2 \dots f_p)}{D(u_1 u_2 \dots u_p)}$ n'est pas nul pour ces mêmes valeurs initiales.

Sous ces conditions, il existera un système de $p$ fonctions :

$\varphi_1(z_1, z_2, \dots z_n)$, $\varphi_2(z_1, z_2 \dots z_n)$, ... $\varphi_p(z_1 z_2 \dots z_n)$ satisfaisant aux conditions suivantes.

1° Elles se réduiront respectivement à $b_1, b_2, \dots b_p$ pour les valeur[s] $a_1, a_2, \dots \alpha_n$ des $z$.

2° Elles seront holomorphes pour ces valeurs des $z$.

3° Pour toutes les valeurs des $z$ suffisamment voisines des valeurs initiales, elles vérifieront identiquement les équations données $(\alpha)$, c'est à dire qu'il existera un nombre $\rho$, non nul, tel que pour toutes les valeurs des $z$ satisfaisant aux inégalités $|z_i - \alpha_i| < \rho$, les fonctions des $z$, obtenues en remplaçant les $u$ par les fonctions $\varphi$ dans les équations $(\alpha)$ soient identiquement nulles.

Ces fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, sont dites les fonctions implicit[es] définies par le système $(\alpha)$.

**Remarque** — Observons que si le théorème était démon[tré] les règles du calcul différentiel permettraient de calculer de proche e[n] proche les dérivées partielles des divers ordres des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots,$ ainsi définies ; on pourrait donc avoir, pour représenter ces fonction[s] des développements en séries entières qui, d'ailleurs, seraient valable[s] tant qu'on ne s'écarterait pas trop des valeurs initiales. Former

ces développements, ce sera pour nous, résoudre les equations ($\alpha$) par rapport à $u_1, u_2, \ldots u_p$.

Supposons la proposition énoncée plus haut, vraie pour $p$ équations nous allons faire voir qu'elle s'étend au cas de $p+1$ équations.

Considérons en effet un système de $p+1$ équations :

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(z_1, z_2, \ldots z_n, u_1, u_2, u_3, \ldots u_p, v) = 0 \\ F_2(z_1, z_2 \ldots z_n, u_1, u_2 \ldots\ldots u_p, v) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(z_1, z_2, \ldots z_n, u_1, u_2 \ldots\ldots u_p, v) = 0 \\ F(z_1, z_2 \ldots z_n, u_1, u_2, \ldots\ldots u_p, v) = 0 . \end{cases}$$

Les $F$ satisfont par hypothèse aux conditions énoncées plus haut; supposons qu'ils soient nuls pour $z_i = a_i$, $u_j = b_j$, $v = b$. Le déterminant fonctionnel $D = \frac{D(F_1, F_2, \ldots F_p, F)}{D(u_1, u_2, \ldots u_p, v)}$ étant différent de zéro pour ces valeurs initiales, l'un au moins des mineurs du premier ordre est différent de zéro et nous pouvons évidemment disposer de nos notations de telle sorte que ce mineur soit $\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots F_p)}{D(u_1, u_2, \ldots u_p)}$.

Dans ces conditions, le théorème général étant supposé vrai pour le cas de $p$ équations, les $p$ premières équations (1) définiront un système de $p$ fonctions implicites.

$$\varphi(z_1, z_2 \ldots z_n, v),\ \varphi_2(z_1, z_2, \ldots z_n, v), \ldots \varphi_p(z_1, z_n \ldots z_n, v),$$

des $n+1$ variables $z_1, z_2 \ldots z_n, v$, les valeurs initiales étant $z_i = a_i$, $v = b$. Résolvons ces $p$ premières équations, comme nous l'avons dit dans la remarque première, le système (1) prendra la forme :

$$(2)\quad \begin{cases} u_1 = \varphi_1(z_1, z_2 \ldots z_n, v) \\ u_2 = \varphi_2(z_1, z_2 \ldots z_n, v) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_p = \varphi_p(z_1, z_2 \ldots z_n, v) \\ F(z_1, z_2, \ldots z_n, u_1, u_2, \ldots, u_p, v) = 0 . \end{cases}$$

Si dans la dernière de ces équations, nous remplaçons $u_1, u_2, \ldots u_p$ par les fonctions $\varphi$ correspondantes, $F$ devient fonction de $z_1, z_2, \ldots z_n, v$; désignons la nouvelle équation par

$$(3)\quad \mathcal{F}(z_1, z_2 \ldots z_n, v) = 0$$

Cette équation (3) est vérifiée quand on y fait $z_i = a_i$, $v = b$, de plus la fonction $\mathcal{F}(z_1, z_2, \dots z_n, v)$ est évidemment holomorphe dans le voisinage de ces valeurs ; si nous prouvons que pour ces mêmes valeurs sa dérivée partielle par rapport à $v$ est différente de zéro, l'équation (3) définira $v$ comme fonction implicite de $z_1, z_2, \dots, z_n$ ; effectuant la résolution et transportant cette valeur de $v$ dans les $p$ premières équations (2), on aura enfin

$$u_1 = \Psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad u_2 = \Psi_2(z_1, z_2, \dots z_n), \dots u_p = \Psi_p(z_1, z_2, \dots z_n)$$
$$v = \Psi(z_1, z_2, \dots z_n),$$

et le théorème sera démontré, car il est évident que les fonctions $\Psi$ satisferont aux équations données.

Tout revient donc à prouver qu'on a $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \neq 0$ pour $z_i = a_i$, $v = b$.

Or, d'après la définition de $\varphi$ et $\mathcal{F}$, on a identiquement

$$F_i(z_1, z_2, \dots, z_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, v) = 0$$
$$F(z_1, z_2 \dots z_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, v) = \mathcal{F}.$$

Si donc nous différentions ces identités par rapport à $v$, nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial F_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial v} = 0 \\
\frac{\partial F_2}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial v} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial F_p}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_p}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \dots + \frac{\partial F_p}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F_p}{\partial v} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = 0.
\end{array}\right.$$

On en déduit en éliminant $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \dots \frac{\partial \varphi_p}{\partial v}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} \cdot \frac{D(F_1\, F_2 \dots F_p)}{D(u_1\, u_2 \dots u_p)} = \frac{D(F_1, F_2, \dots F_p, F)}{D(u_1, u_2, \dots u_p, v)}$$

ou :

$$\Delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = D.$$

Or pour les valeurs initiales, le déterminant fonctionnel $D$ n'est pas nul, d'autre part, le déterminant $\Delta$ qui est fonction entière des dérivées partielles de fonctions toutes holomorphes pour les valeurs initiales, est fini pour

ces valeurs ; donc on a bien $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$, ce qui démontre le théorème.

## IV – Existence d'un seul système de fonctions implicites.

Tout système de fonctions continues, $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_p$, vérifiant les équations ($\alpha$); coïncide avec le système de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ défini par le théorème précédent, pourvu bien entendu, qu'on attribue aux variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots z_n$, des valeurs suffisamment voisines des valeurs initiales; en d'autres termes, les équations ($\alpha$) n'admettent pas d'autre solution que le système des fonctions $\varphi$ dans le domaine des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cette proposition doit être entendue comme dans le cas d'une seule fonction ; il est clair d'ailleurs que la démonstration faite plus haut, s'étend d'elle-même au cas d'un nombre quelconque de fonctions implicites ; il n'y a rien à changer au fond même du raisonnement.

Si l'on pose $\psi_i = \varphi_i + \lambda_i$, et si on développe les fonctions $f_i$ en séries entières, on sera conduit à écrire $p$ identités de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + \cdots + A_p \lambda_p = 0 \\ B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + \cdots + B_p \lambda_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_1 \lambda_1 + L_2 \lambda_2 + \cdots + L_p \lambda_p = 0 \end{array}\right.$$

dont le déterminant est précisément égal au déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2 \ldots f_p)}{D(u_1, u_2 \ldots u_p)},$$

supposé différent de zéro.

On en conclut que ces équations ne peuvent être vérifiées, à moins que l'on n'ait $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots \lambda_p = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

## V. Fonctions inverses.

— Supposons que dans le système ($\alpha$), il y ait autant de variables $z$, que de fonctions $\underline{u}$. De même qu'il existe un système de fonctions

$$u_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \ldots z_p), \; u_2 = \varphi_2(z_1, z_2 \ldots z_p), \ldots \; u_p = \varphi_p(z_1, z_2 \ldots z_p)$$

vérifiant identiquement dans le domaine des valeurs initiales les équations ($\alpha$), il existe aussi un système de $p$ fonctions.

$$z_1 = \psi(u_1, u_2, \ldots u_p), \; z_2 = \psi_2(u_1, u_2 \ldots u_p), \ldots z_p = \psi_p(u_1, u_2 \ldots u_p)$$

holomorphes dans le voisinage des valeurs $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$ ..... $u_p = b_p$, se réduisant respectivement à $a_1$, $a_2$ ....... $a_p$ lorsqu'on y fait $u_i = b_i$, enfin vérifiant identiquement les équations ($\alpha$), dans un domaine suffisamment restreint autour des valeurs initiales, pourvu toutefois que, pour ces valeurs, le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1 f_2 \dots f_p)}{D(u_1 u_2 \dots u_p)}$$ supposé différent de zéro.

Les fonctions $\psi$ ainsi définies sont dites les fonctions inverses des fonctions $\varphi$.

# Deuxième Leçon.

## Équations différentielles du premier ordre.

**Théorème de Cauchy.** — Considérons maintenant le cas où les équations données contiennent, outre les fonctions inconnues d'une variable, leurs dérivées par rapport à cette variable. Ces équations différentielles sont dites d'ordre $p$, si les dérivées qui y figurent sont au plus d'ordre $p$, l'une au moins étant exactement d'ordre $p$.

Nous supposerons d'abord que les équations sont du premier ordre et résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues; nous avons ainsi un système de la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = f_1(z\, u_1, u_2 \dots\dots u_p) \\ \dfrac{du_2}{dz} = f_2(z, u_1, u_2 \dots\dots u_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{du_p}{dz} = f_p(z, u_1, u_2 \dots\dots u_p) \end{cases}$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

**Théorème.** Les fonctions $f_1 . f_2 \dots f_p$ étant supposées holomorphes dans le voisinage des valeurs $z = a$, $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2$, .... $u_p = b_p$, il existe un système de fonctions $u_1 = \varphi_1(z)$, $u_2 = \varphi_2(z)$, ..... $u_p = \varphi_p(z)$, holomorphes dans le domaine du point $z = a$, se réduisant respectivement à $b_1, b_2, \dots b_p$ pour $z = a$ et vérifiant identiquement les équations (1) pour des valeurs de $z$ suffisamment voisines de $a$.

La démonstration se simplifie si on suppose que $z$ ne figure pas dans les seconds membres des équations (1). On peut d'ailleurs ramener le cas général à ce cas particulier : Considérons en effet le système :

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz} = f_1(v, u_1, u_2 \ldots u_p) \\ \dfrac{du_2}{dz} = f_2(v, u, u_2 \ldots\ldots u_p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{du_p}{dz} = f_p(v, u_1, u_2 \ldots\ldots u_p) \\ \dfrac{dv}{dz} = 1 \end{cases}$$

Assujettissons la fonction $v$ à se réduire à $a$ pour $z = a$ : le sys (II) sera évidemment équivalent au système (1) ; il y aura une équation de plus, mais les seconds membres ne contiendront plus la variable indépendante.

Enfin, nous pouvons sans inconvénient, supposer nulles les valeurs initiales $a$, $b_1$, $b_2 \ldots b_p$. Nous démontrerons le théorème énoncé dans le cas de trois équations, le raisonnement s'étendra de lui-même au cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soit donc le système

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dz} = f(u, v, w) \\ \dfrac{dv}{dz} = \varphi(u, v, w) \\ \dfrac{dw}{dz} = \psi(u, v, w) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions $f$, $\varphi$, $\psi$, sont holomorphes dans le voisinage des valeurs $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Nous allons montrer qu'il existe trois fonctions de $z$ :

$$u = \lambda(z) \qquad v = \mu(z) \quad , \quad w = \theta(z)$$

holomorphes dans le domaine de l'origine, s'annulant pour $z = 0$ et vérifiant identiquement le système (1) dans un cercle de rayon suffisamment restreint, mais non nul, entourant l'origine.

A priori, si ces fonctions : $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\theta(z)$ existent, nous pourrons les développer en séries entières de la forme :

$$(2) \quad \begin{cases} u = \lambda(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots \\ v = \mu(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_n z^n + \dots \\ w = \theta(z) = C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z + \dots \end{cases}$$

et nous pouvons calculer les coefficients de ces séries. Ces coefficients dépendent uniquement des dérivées des divers ordres des fonctions $\lambda$, $\mu$ $\theta$ prises pour $z = 0$. Or les trois identités supposées vraies :

$$\frac{d\lambda}{dz} = f(\lambda, \mu, \theta) \quad \frac{d\mu}{dz} = \varphi(\lambda, \mu, \theta), \quad \frac{d\theta}{dz} = \psi(\lambda, \mu, \theta)$$

permettent de calculer de proche en proche les dérivées d'ordre quelconque.

**Remarque.** — Il est important d'observer que chacun des coefficients A,B,C ainsi déterminés, sera composé linéairement avec les dérivées partielles des divers ordres des fonctions $f, \varphi, \psi$ prises pour $u = 0, v = 0, w = 0$, les multiplicateurs étant des nombres positifs, absolument indépendants de la forme particulière de ces fonctions.

Le premier point à démontrer est que les séries ainsi obtenues sont convergentes.

Cette démonstration repose sur un lemme également dû à Cauchy et que nous établirons d'abord.

**Lemme** — $f(z)$ étant une fonction holomorphe dans un aire (C) comprenant l'origine, et sur le contour de cette aire, on a :

$$\left(\frac{d^p f(z)}{dz^p}\right)_{z=0} = \frac{1.2.3\dots p}{2i\pi} \int \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz.$$

Si pour contour (C), on prend un cercle de rayon $r$, décrit de l'origine comme centre, il vient :

$$\left(\frac{d^p f}{dz^p}\right)_0 = \frac{1,2,3.\dots p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^p e^{pi\theta}} d\theta ;$$

de sorte que si M est un nombre supérieur au module maximum de la fonction $f(z)$ soit sur le contour du cercle (C), soit dans son intérieur, on a l'inégalité suivante :

$$\left| \left(\frac{d^p f}{dz^p}\right)_0 \right| < \frac{1,2,3\dots p}{r^p} M .$$

On peut étendre ce résultat au cas d'une fonction de plusieurs variables. Soit par exemple, $f(z, z')$ une fonction des deux variables $z$ et $z'$, nous supposons cette fonction holomorphe si les variables se meuvent à l'intérieur ou sur le contour de deux cercles (C), (C') de même rayon $\underline{r}$, décrits des origines $z = 0$, $z' = 0$ comme centres. Fixons pour un instant, la variable $z'$ ; nous avons donc :

$$\left(\frac{\partial^p f(z z')}{\partial z^p}\right)_0 = \frac{1,2,3\dots p}{2i\pi} \int_{(c)} \frac{f(z z')}{z^{p+1}} dz .$$

Si nous rendons libre la variable $z'$, le premier membre est une fonction de $z'$ que nous pouvons désigner par $F(z')$ et il vient.

$$\left(\frac{\partial^{p+2} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z^q}\right)_0 = \frac{1.2.3\ldots q}{2i\pi} \int_{(c')} \frac{F(z')}{z'^{q+1}} dz'$$

ou en remplaçant $F(z')$ par sa valeur :

$$\left(\frac{\partial^{p+2} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 = \frac{1.2.3\ldots 2}{2i\pi} \cdot \frac{1.2.3\ldots p}{2i\pi} \iint_{(c')(c)} \frac{f(z.z')}{z^{p+1} z'^{q+1}} dz.dz'.$$

Posons comme précédemment, $z = re^{i\theta}$, $z' = re^{i\theta'}$ cette égalité prend la forme :

$$\left(\frac{\partial^{p+q} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 = \frac{1.2.3\ldots q . 1.2.3\ldots p}{(2i\pi)^2 . r^{p+q}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, re^{i\theta'}) e^{-pi\theta} e^{-qi\theta} d\theta . d\theta'$$

Enfin en désignant par $M$ un nombre supérieur au module de la fonction $f(z,z')$ soit sur le contour des cercles $(C)$, $(C')$, soit dans leur intérieur, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{\partial^{p+q} f(z.z')}{\partial z^p . \partial z'^q}\right)_0 < \frac{1.2.3\ldots p . 1.2.3\ldots q}{r^{p+q}} M$$

Le raisonnement est général, et si nous l'appliquons au cas qui nous occupe, nous pouvons écrire :

$$\left|\left(\frac{\partial^{p+q+s} f(u.v.w)}{\partial u^p . \partial v^q . \partial w^s}\right)\right| < \frac{1.2.3\ldots p , 1.2.3\ldots q, 1.2.3\ldots s}{r^{p+q+s}} M.$$

Considérons maintenant la fonction $H = \dfrac{M}{(1-\frac{u}{r})(1-\frac{v}{r})(1-\frac{w}{r})}$.

Cette fonction est holomorphe tant que les variables $u, v, w$, restent en module inférieures à $r$ ; on peut alors la développer par la formule de Mac Laurin.

Le terme en $u^p, v^q, w^s$ dans ce développement, a pour coefficient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p . 1.2.3\ldots q . 1.2.3\ldots s} \left(\frac{\partial^{p+q+s} H}{\partial u^p \partial v^q \partial w^s}\right)_{u=0, v=0, w=0}$$

D'autre part, on peut former un second développement de la fonction $H$, car dans le domaine des origines, on a :

$$\frac{1}{1-\frac{u}{r}} = 1 + \frac{u}{r} + \frac{u^2}{r^2} + \ldots + \frac{u^p}{r^p} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{v}{r}} = 1 + \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + \ldots + \frac{v^q}{r^q} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{w}{r}} = 1 + \frac{w}{r} + \frac{w^2}{r^2} + \ldots + \frac{w^s}{r^s} + \ldots$$

Le coefficient du terme en $u^p v^q w^s$ dans ce second développem[ent] de $H$, est :

$$\frac{M}{r^{p+q+s}}$$

Il résulte de là qu'on a : $\left(\frac{\partial^{p+q+s} H}{\partial u^p \partial v^q \partial w^s}\right)_0 = 1.2.3\ldots p .\ 1.2.3\ldots q .\ 1.2.3\ldots s$

Et par suite :

$$\left|\left(\frac{\partial^{p+q+s} f(u,v,w)}{\partial u^p, \partial v^q, \partial w^s}\right)_0\right| < \left(\frac{\partial^{p+q+s} H(u,v,w)}{\partial u^p \partial v^q \partial w^s}\right)_0$$

## II. Convergence des séries (2).

—— Ce lemme éta[nt] établi, la démonstration du théorème s'achève très simplement. D'ap[rès] la remarque que nous avons faite précédemment sur la forme des coeffici[ents] des séries (2), si les séries que l'on obtient en remplaçant la fonctio[n] $f(u,v,w)$ par la fonction $H$ sont convergentes dans un cercle de ra[yon] $\rho$, les séries (2) sont elles-mêmes convergentes dans le même cercle. En en donnant à $z$ une valeur positive inférieure à $\rho$, d'ailleurs aussi rap[pro]chée que l'on veut de ce nombre, les séries ont leurs termes tous positif[s et] inférieurs aux termes correspondants des séries formées à l'aide d[e la] fonction $H$ ; elles convergent donc dans le cercle de rayon $\rho$.

Considérons donc le système de comparaison suivant :

$$(3) \qquad \frac{du}{dz} = H \ , \quad \frac{dv}{dz} = H \quad \frac{dw}{dz} = H$$

$u, v, w$ devant s'annuler pour $z = 0$.

On en déduit immédiatement $\frac{d(u-v)}{dz} = 0$ et $\frac{d(u-w)}{dz} = 0$

d'où $u = v = w$.

De sorte que le système (3) se réduit à la seule équation :

$$\frac{d\lambda}{dz} = \frac{M}{(1 - \frac{\lambda}{r})^3}$$

$\lambda$ désignant l'une quelconque des trois fonctions $u, v, w$ ; et s'annulant pa[r] suite pour $z = 0$. Cette équation se met sous la forme :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^3 d\lambda = M\, dz$$

on en déduit :

$$-\frac{r}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^4 = Mz - \frac{r}{4}$$

d'où :

$$(\alpha) \qquad \lambda = r\left(1 - \sqrt[4]{1 - \frac{4M}{r} z}\right).$$

on aura soin de prendre la détermination du radical qui se réduit à 1 [pour] $z = 0$. On est ainsi assuré que le système (3) admet une solution holo[morphe] dans le voisinage de la valeur $z = 0$ et s'annulant pour cette valeur in[itiale].

peut être remplacé par un autre, résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

# Troisième Leçon

## Étude des fonctions définies par des équations différentielles.

I — Considérons l'équation $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ (1)

Le coefficient différentiel $f$ étant supposé holomorphe dans le voisinage des valeurs $z = a$, $u = b$, il existe d'après le théorème de Cauchy, une intégrale holomorphe dans un cercle de rayon $\rho$ suffisamment restreint, décrit du point $a$ comme centre et se réduisant à $b$ pour $z = a$. Faisons suivre à la variable un certain chemin (C) ; en prenant comme nouvelle valeur initiale de $z$ l'affixe $a_1$ d'un point de ce chemin, intérieur au cercle précédent, le développement de l'intégrale pourra s'étendre dans un nouveau cercle de rayon $\rho$ decrit autour du point $a_1$ comme centre. En général, ce cercle aura une partie extérieure au premier, et en prenant le point $a_2$ du chemin (C) comme valeur initiale de $z$, nous étendrons encore le développement de l'intégrale et ainsi de suite. On est ainsi conduit à la notion de fonctions définies par des équations différentielles.

II — Points critiques. — On sera arrêté, dans le développement de l'intégrale, lorsque l'on parviendra le long du chemin (C) à une valeur $\alpha$ de $z$ telle que pour cette valeur et la valeur $\beta$ correspondante de $u$, le coefficient différentiel cesse d'être holomorphe : un pareil point est dit point critique.

A une valeur initiale de $z$, $a$, correspondent une infinité d'intégrales prenant pour $z = a$ des valeurs arbitraires ; il pourra se faire que certains points $z = \alpha$ soient des points critiques quelle que soit la valeur initiale choisie pour $u$ ; mais, en général, on doit s'attendre à ce que les points critiques varient quand on passe d'une intégrale particulière à une autre ; on est donc amené à considérer deux catégories de points critiques. Nous appellerons les premiers "points critiques fixes", les seconds "points

critiques mobiles." La présence des points critiques mobiles constitue la difficulté principale dans la théorie des fonctions définies par des équations différentielles.

Prenons par exemple, l'équation $\frac{du}{dz} = f(z)$.

Le coefficient différentiel étant holomorphe pour $z = a$ ; On a :

$$u = \int_a^z f(z)\, dz + C$$

et on peut disposer de la constante $C$ de façon que $u$ prenne une valeur initiale quelconque $b$ ; il suffit pour cela de faire $C = b$. On voit qu'ici tous les points critiques sont fixes et ne dépendent que des singularités de $f(z)$.

Soit, au contraire l'équation $\frac{du}{dz} = \frac{1}{z-u}$ (1).

Cherchons les points critiques pour l'intégrale qui se réduit à $b$ pour $z = 0$. Ecrivons l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{dz}{du} = z - u \qquad (2)$$

et posons:

$$z = \lambda e^{u}$$

Il vient pour déterminer $\lambda$:

$$\frac{d\lambda}{du} = -ue^{-u}$$

d'où

$$\lambda = (u+1)e^{-u} + C$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est, par suite :

$$z = u + 1 + Ce^{u}$$

On détermine $C$ par la condition :

$$0 = b + 1 + Ce^{b}$$

de sorte que l'on aura :

$$z = u + 1 - (b+1)e^{u-b}$$

Les points critiques correspondent aux valeurs de $z$ qui rendent le coefficient différentiel non holomorphe. Faisons donc $z = u$ ; on a ainsi :

$$0 = 1 - (b+1)e^{z-b}$$

d'où

$$z = b - L.(b+1)$$

Donc, dans ce cas, tous les points critiques sont mobiles. En général, il y aura en même temps des points critiques fixes et des points critiques mobile.

**Remarque** — Quand il s'agit d'étudier une fonction définie par une équation différentielle, il y a lieu de faire $z = \frac{1}{\zeta}$ pour savoir comment se comportent les intégrales pour des valeurs infinies

de la variable.

Si d'autre part, l'intégrale devient infinie pour certaines valeurs de $z$, on doit faire la substitution $u = \frac{1}{v}$ et étudier comment varie la fonction $v$ pour ces mêmes valeurs de $z$.

**III** —— Il est en général difficile, étant donné un système de valeurs $\alpha$, $\beta$ rendant non-holomorphe le coefficient différentiel, de voir s'il y a une intégrale se réduisant à $\beta$ pour $z = \alpha$ et quelle singularité cette intégrale peut présenter au point $\alpha$. Nous nous contenterons d'examiner un cas très particulier.

**Théorème** — Si pour $z = \alpha$, $u = \beta$ le coefficient différentiel devient infini, l'inverse $\frac{1}{f(u\,z)} = \varphi(u\,z)$ s'annulant pour ces valeurs tout en restant holomorphe, il existe une intégrale se réduisant à $\beta$ pour $z = \alpha$ et admettant le point $\alpha$ comme point critique algébrique.

D'après l'hypothèse, le théorème de Cauchy s'applique à l'équation :

$$\frac{dz}{du} = \varphi(u, z).$$

En d'autres termes, cette équation admet une intégrale holomorphe se réduisant à $\alpha$ pour $u = \beta$. Dans les environs de cette valeur $\beta$ on peut donc écrire :

$$z - \alpha = A_1 (u - \beta) + A_2 (u - \beta)^2 + \dots$$

A son tour, cette équation définit $u$ comme fonction de $z$. Or le premier coefficient $A_1$ n'est autre chose que $\left(\frac{dz}{du}\right)_{\alpha\beta}$, donc il est nul et on voit qu'il y a au moins deux valeurs de $u$ qui, pour $z = \alpha$, se réduisent à $\beta$. Il se peut que d'autres coefficients soient nuls ; si $A_p$ est le premier coefficient qui ne soit pas nul, le développement prendra la forme :

$$z - \alpha = A_p (u - \beta)^p + A_{p+1} (u - \beta)^{p+1} + \dots$$

Quand $z$ tend vers $\alpha$, il y a $p$ valeurs de $u$ qui tendent vers $\beta$ ; et qui se permutent circulairement autour du point $\alpha$ ; l'intégrale considérée se conduit donc, aux environs de la valeur $z = \alpha$, comme une fonction algébrique de $z$ ; en d'autres termes, on a pour $u$ un développement de la forme :

$$u = \beta + B_1 (z - \alpha)^{\frac{1}{p}} + B_2 (z - \alpha)^{\frac{2}{p}} + \dots$$

Le point $z = \alpha$ est donc un point singulier algébrique pour l'intégrale considérée.

Remarque. Il peut se faire que tous les coefficients A soient nuls ; les dérivées partielles de la fonction $\varphi$ prises par rapport à $u$ sont donc toutes nulles pour $z=\alpha$, $u=\beta$ et par suite cette fonction est de la forme :

$$\varphi\ (u.z) = (z-\alpha)^q\ \psi'\ (u.z).$$

$\psi\ (u.z)$ étant une fonction qui ne contient plus le facteur $z-\alpha$.

Dans ce cas, l'équation $\frac{dz}{du} = (z-\alpha)^q\ \psi'\ (u.z)$ est vérifiée pour $z=\alpha$, et d'après le théorème de Cauchy, il n'existe pas d'autre intégrale se réduisant à $\alpha$, quelle que soit, d'ailleurs, la valeur initiale attribuée à $u$. Donc l'équation proposée n'admet pas d'intégrale prenant une valeur donnée $\beta$ pour $z=\alpha$.

**IV** — Nous appliquerons le théorème précédent à une équation d'une forme assez générale.(1) Supposons que l'on ait $f(uz) = \frac{P}{Q}$, P et Q étant des polynomes entiers par rapport à $u$ ; en d'autres termes, soit

$$\frac{du}{dz} = \frac{A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_p u^p}{B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \dots + B_q u^q}$$

Les fonctions $A_i$ $B_j$ étant des fonctions de $z$ supposées uniformes da[ns] tout le plan ; on peut se proposer de chercher dans quel cas une parei[lle] équation pourra avoir toutes ses intégrales uniformes.

Soit $\alpha$ une valeur de $z$ qui ne soit singulière pour aucu[ne] des fonctions $A_i, B_j$, qui n'annule pas $B_0$, et enfin qui n'annule p[as] le résultat de l'élimination de $u$ entre les deux équations $P=0$, $Q=$[0]. Dans ces conditions, si on y fait $z=\alpha$, l'équation $Q=0$ admet $q$ racines. Soit $\beta$ l'une d'elles. Pour le système de valeurs $z=\alpha$, $u=$[$\beta$] le coefficient différentiel devient infini, l'inverse s'annule tout en restant holomorphe ; de plus, ce coefficient différentiel ne contient [en] facteur aucune puissance négative de $z-\alpha$ puisque $B_0$ n'est pas nu[l] pour $z=\alpha$. Par conséquent, il existe une intégrale se réduisant à [$\beta$] pour $z=\alpha$, et qui admet le point $\alpha$ comme point critique algébri[que]. Cette intégrale n'est pas uniforme. Ainsi, une condition nécessaire est qu'à la valeur $\alpha$ de $z$, il ne corresponde aucune racine de l'équation $Q=0$ et par suite l'exposant $q$ doit être nul.

Nous devons donc ne considérer que les équations de la forme :

$$\frac{du}{dz} = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_p u^p.$$

---

(1) Voir le cours d'analyse de Mr Picard, Tome II, p. 3[?] Painlevé (Lignes singulières des fonctions analytiques, page 13)

D'autre part si l'on pose $u = \frac{1}{v}$, il vient :

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{A_0 v^p + A_1 v^{p-1} + \dots + A_p}{v^{p-2}}$$

et les intégrales devront être également toutes uniformes. D'après ce qu'on vient de voir, le second membre devra se réduire à un polynôme, ce qui exige qu'on ait $p = 2$. Ainsi toute équation de la forme considérée qui n'aura que des intégrales uniformes aura pour second membre un trinôme du second degré en $u$ ; l'équation générale :

$$(1) \qquad \frac{du}{dz} = Au^2 + Bu + C$$

où $A$ $B$ $C$ sont des fonctions de $z$, s'appelle équation de Riccati ; l'intégrale générale ne sera d'ailleurs uniforme que si $A, B, C$ satisfont à de certaines conditions.

V. Equation de Riccati — Equation Linéaire — L'équation de Riccati présente un intérêt particulier tant au point de vue de ses points critiques qu'au point de vue des relations qui existent entre ses intégrales. Le second membre de l'équation (1) en ce qui concerne $u$, ne cesse d'être holomorphe que pour $u$ infini. Soit $z = \alpha$ une valeur de $z$ pour laquelle une certaine intégrale devienne infinie, la transformation $u = \frac{1}{v}$ donne :

$$\frac{dv}{dz} = -A - Bv - Cv^2.$$

Si $\alpha$ est un point singulier d'une des fonctions $A, B, C$, il est évidemment fixe, c'est à dire indépendant de toute particularisation de l'intégrale ; sinon le second membre étant holomorphe pour $z = \alpha$, $v = 0$, $v$ sera holomorphe dans le voisinage du point $\alpha$ qui sera un simple pôle de l'intégrale $u$ considérée, donc l'équation de Riccati n'a, comme points critiques mobiles que des pôles.

Nous retrouverons tout à l'heure cette propriété ; pour le moment nous nous arrêterons à un cas particulier, celui où $A = 0$. L'équation (1) prend alors la forme linéaire :

$$(2) \qquad \frac{du}{dz} = Pu + Q.$$

Soit $u_1$ une solution particulière de cette équation, on aura évidemment :

$$(3) \qquad \frac{d(u - u_1)}{dz} = P(u - u_1).$$

D'où l'on déduira $u$ à l'aide d'une quadrature : $u = u_1 + Ce^{\int P\,dz}$

D'ailleurs si $u_2$ est une seconde solution particulière on aura une relation analogue à (3), et en divisant membre à membre:

$$\frac{d(u-u_1)}{d(u-u_2)} = \frac{u-u_1}{u-u_2}.$$

D'où l'on déduit:

$$\frac{u-u_1}{u-u_2} = \text{constante},$$

pour l'intégrale générale. On en conclut d'abord que: Trois solutions quelconques de l'équation linéaire forment une proportion. On peut d'ailleurs écrire

$$u = \frac{u_1 - Cu_2}{1-C} = \frac{u_1+u_2}{1-C} - u$$

et en posant $\frac{1}{1-C} = C'$.

$$(4) \qquad u = C'(u_1+u_2) - u_2 .$$

$C'$ étant une constante arbitraire, la constante entre donc linéairement dans l'expression de l'intégrale générale; si d'ailleurs on élimine la constante entre l'équation (4) et sa dérivée, on retrouve évidemment une équation linéaire; donc les propriétés que nous venons d'énoncer sont caractéristiques de l'équation linéaire - L'équation (4) met aussi en évidence ce fait que, l'équation linéaire n'a que des points critiques fixes, puisque les points critiques ne peuvent être que ceux des fonctions $u_1$ $u_2$ qui sont choisies une fois pour toutes.

Revenons maintenant à l'équation de Riccati; on la ramène sans difficulté à une équation linéaire quand on connaît une solution particulière $u$, il suffit en effet de poser:

$$u = u_1 + \frac{1}{v} \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dz} + (2A+B)v + C = 0 ;$$

les conséquences de cette transformation apparaissent d'une manière pour ainsi dire évidente.

1°.- Les points critiques de $u$ sont ceux de $u_1$ qui sont fixes et ceux de $\frac{1}{v}$; les points singuliers de $v$ étant tous fixes, on en conclut que les seuls points singuliers mobiles de $u$ sont les zéros de $v$ et par suite se réduisent à des pôles.

2°.- La valeur générale de $v$ sera de la forme $C\varphi(z)+\psi(z)$, $C$ étant la constante arbitraire; donc l'intégrale générale de l'équation de Riccati sera de la forme: $u = \chi(z) + \dfrac{1}{C\varphi(z)+\psi(z)}$,

$\varphi, \psi, \chi$ étant trois fonctions connues.

3°. Si on connaît deux autres solutions $u_2, u_3$ de l'équation (1) on en déduira pour l'équation en $v$ les deux solutions :

$$v_1 = \frac{1}{u - u_2} \quad v_2 = \frac{1}{u - u_3} .$$

Si on écrit que trois solutions $v, v_1, v_2$ forment une proportion, on en conclut que l'intégrale générale sera :

$$\frac{\frac{1}{u - u_1} - \frac{1}{u - u_2}}{\frac{1}{u - u_1} - \frac{1}{u - u_3}} = \frac{(u_1 - u_2)(u - u_3)}{(u_1 - u_3)(u - u_2)} = \text{constante}.$$

Donc quatre solutions quelconques de l'équation de Riccati ont un rapport anharmonique constant.

Comme pour l'équation linéaire, cette propriété caractérise l'équation de Riccati, car c'est évidemment à une telle équation qu'on est conduit quand on élimine la constante entre l'équation et sa dérivée.

**VI. Équation de Bernouilli.** — L'équation linéaire peut être considérée comme un cas particulier de la suivante qu'on appelle équation de Bernouilli :

$$\frac{du}{dz} = Pu + Qu^m ,$$

$P, Q$ étant des fonctions de $z$. On peut toujours en ramener l'intégration aux quadratures.

Posons en effet $u = \lambda v$, $\lambda$ étant une fonction indéterminée, $v$ la nouvelle fonction inconnue, nous aurons alors :

$$\lambda \frac{dv}{dz} + v \frac{d\lambda}{dz} = P\lambda v + Q\lambda^m v^m .$$

Nous pouvons disposer de $\lambda$ de manière à faire disparaître le terme en $\underline{v}$ il suffit de poser :

$$d\lambda = P\lambda \, dz \qquad \lambda = e^{\int_{z_0}^{z} P dz} = \varphi(z) ,$$

$z_0$ étant choisi comme on voudra, l'équation précédente se simplifie alors et devient :

$$\frac{dv}{dz} = Q\varphi^{m-1} v^{m-1} ,$$

elle s'intègre indistinctement par une quadrature et on a en désignant par $c$ la constante :

$$\frac{1}{(m-1)v^{m-2}} = c + \int_{z_0}^{z} Q\varphi^{m-1}(z)\,dz.$$

La valeur générale de $u$ sera $v\varphi(z)$.

Remarque — Quand on connaît une solution de l'équation de Riccati on peut la réduire à la forme linéaire et par suite l'intégrer par deux quadratures ; la connaissance d'une ou de deux autres solutions abaisserait à une ou à zéro le nombre des quadratures nécessaires à l'intégration. — Ce théorème est important au point de vue de certaines applications géométriques. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'obtenir toutes les développées d'une ligne à double courbure $C$, par chaque tangente on peut mener deux plans isotropes on a ainsi deux surfaces développables dont les arêtes de rebroussement fournissent deux solutions particulières du problème, car toute courbe tracée sur une pareille surface est une trajectoire orthogonale des génératrices. — Or la méthode donnée par Bonnet pour obtenir les développées conduit à une équation de Riccati dont on connaît ainsi deux solutions particulières. — Le problème peut donc s'achever à l'aide d'une seule quadrature.

---

# IV^e Leçon

## Solutions singulières des équations du 1^{er} Ordre.

---

I — Nous avons appelé intégrale générale, la solution fournie par le théorème de Cauchy ; elle contient une constante arbitraire dont on peut disposer de telle sorte que la fonction prenne, pour une valeur déterminée de la variable, telle valeur que l'on veut ; nous désignerons sous le nom de solution singulière une intégrale qui, pour aucune valeur de la constante arbitraire, ne rentre dans l'intégrale générale. — Par exemple, l'équation [1]

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{y-x}$$

---

[1] Sans restreindre la généralité des variables, c'est à dire en les considérant toujours comme des quantités complexes, nous les représenterons dorénavant par $x, y$, cette notation étant mieux appropriée aux considérations géométriques auxquelles nous aurons souvent recours.

est évidemment vérifiée par $y = x$ ; or son intégrale générale s'obtient sans difficulté ; il suffit de poser :

$$y = x + z^2,$$

d'où

$$\frac{2\,dz}{dx} = z - 1 \quad z = \frac{x}{2} + C \quad y = x + \left(\frac{x}{2} + C\right)^2 ;$$

il est clair qu'on ne peut obtenir la solution $y = x$, pour aucune valeur de $C$. C'est donc une solution singulière ; géométriquement elle est représentée par une droite tangente à toutes les paraboles qui représentent les intégrales particulières.

Quand il y a une solution singulière il est toujours très aisé de le reconnaître a priori et de déterminer cette solution. Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ un point quelconque de cette solution ; si la valeur $\frac{dy}{dx}$, déduite de l'équation différentielle était holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, il y aurait une intégrale particulière donnée par le théorème de Cauchy, se réduisant à $\beta$ pour $x = \alpha$ ; et cette intégrale étant la seule solution possible coïnciderait avec l'intégrale considérée, qui dès lors ne serait plus singulière. Donc il faut que, tout le long de la solution singulière, la valeur de $y'$, fournie par l'équation différentielle, cesse d'être une fonction continue et uniforme.

Dans l'exemple choisi plus haut $y'$ cesse d'être holomorphe tout le long de la droite $y = x$ ; c'était donc cette droite qui, seule pouvait fournir une solution singulière. Si nous avions pris l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - x},$$

nous aurions pu affirmer l'absence de toute intégrale singulière.

En général les systèmes de valeurs pour lesquels l'équation donnée cesse de fournir une valeur finie et bien déterminée de $y'$ sont donnés par une équation $P(x, y) = 0$ qu'on peut former a priori ; ce sera par exemple, si l'équation n'est pas résolue par rapport à $y'$, le résultat de l'élimination de $y'$ entre les deux équations :

$$f(x, y, y') = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Il restera à vérifier si la fonction définie par $P = 0$ satisfait ou non à l'équation donnée.

**II — Enveloppe des Intégrales générales.** — D'après ce qui précède, il n'y aura pas en général d'intégrale singulière car la fonction définie par $P = 0$ ne vérifiera pas ordinairement l'équation

donnée ; il y a lieu de chercher, lorsque cette solution existe comment elle est liée aux intégrales générales.

Supposons pour fixer les idées que l'équation donnée :

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0$$

soit entière par rapport à $y'$ ; nous ne nous occuperons pas des valeurs de $x, y$ qui rendent $y'$ infini ; il suffirait d'échanger entre elles la variable et la fonction pour faire disparaître ces singularités ; Nous aurons donc seulement à considérer l'équation $P(x, y) = 0$ qui résulte de l'élimination de $y'$ entre l'équation $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Soit $\alpha, \beta$ une solution de cette équation, et supposons, pour nous placer dans le cas le plus simple que l'équation (1) ait une racine double en $y'$ pour un point quelconque $x = \alpha$, $y = \beta$ de $P = 0$ (Le raisonnement se généraliserait sans difficulté). — Dans le voisinage de $\alpha, \beta$, l'équation en $y'$ aura deux racines infiniment voisines dont la somme et le produit seront évidemment uniformes ; on peut donc considérer $y'$ comme donné, dans ce domaine, par une équation du 2ᵉ degré à coefficients holomorphes ; en d'autres termes $y'$ sera de la forme :

$$y' = A(x, y) + \sqrt{B(x, y)},$$

$A, B$ étant holomorphes par $x = \alpha$, $y = \beta$. On aura d'ailleurs $y_1$ étant la solution singulière considérée :

$$A(x, y_1) = y_1' \qquad B(x, y_1) = 0.$$

Posons alors $y = y_1 + z^2$ et développons $A\, B$ suivant les puissances de $z^2$, nous avons :

$$\frac{dy_1}{dx} + 2z\frac{dz}{dx} = \varphi_0(x) + z^2\varphi_1(x) + z^4\varphi_2(x) + \dots + \sqrt{\psi_0(x) + z^2\psi_1(x) + z^4\psi_2(x) + \dots}$$

Mais $\psi_0(x) = 0$ et $\frac{dy_1}{dx} = \varphi_0(x)$ ; l'équation précédente est donc divisible par $z$ ; supprimons ce facteur, qui correspond à la solution singulière, il vient :

$$\frac{2\,dz}{dx} = z\,\varphi_1(x) + z^3\varphi_2(x) - \dots + \sqrt{\psi_1(x) + z^2\psi_2(x) + \dots}$$

Dans le voisinage de tout point appartenant à $P = 0$ comme $\psi_1(x)$ est en général différent de 0, le second membre est une fonction holomorphe de $x$ et de $z$ ; donc cette équation admet une solution holomorphe se réduisant à 0 pour $x = \alpha$ ; on a par suite une nouvelle solution :

$$y = y_1 + z^2,$$

qui rentre dans l'intégrale générale ; au point qui leur est commun ces deux intégrales se touchent puisque $Z = 0$ et que par suite $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}$. Donc, par chaque point de la solution singulière passe une seconde solution rentrant dans l'intégrale générale en touchant la première au point considéré. En d'autres termes la solution singulière, quand elle existe, est l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale.

Il est clair que, réciproquement, si l'intégrale générale a une enveloppe, cette enveloppe fournira une solution de l'équation différentielle ; en effet, par tout point M de cette enveloppe passe une enveloppée qui la touche en ce point ; $x$, $y$, $y'$ ont les mêmes valeurs pour l'enveloppe et pour l'enveloppée ; comme l'équation différentielle est vérifiée en chaque point de l'enveloppée elle l'est en particulier au point M. L'enveloppe fournit donc bien une solution ; d'ailleurs ce sera en général une solution singulière, l'enveloppe ne coïncidant avec aucune des enveloppées.

**III — Equation de Clairaut** — Prenons comme exemple, l'équation :

$$(2) \qquad y - x y' = \varphi(y').$$

le 1er membre représente l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe intégrale ; cette équation exprime donc une propriété commune à toutes les tangentes de cette courbe, propriété indépendante du point de contact. Il est évident que si une courbe C répond à la question, chacune de ses tangentes y répondra également ; les droites représentées par l'équation :

$$y = Cx + f(C)$$

fournissent donc l'intégrale générale de l'équation (2) ; la solution singulière sera donnée par l'enveloppe de ces droites ; pour obtenir cette enveloppe il faut éliminer C entre l'équation précédente et sa dérivée par rapport à C ; il revient au même d'éliminer $y'$ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à $y'$ ; on retrouve bien pour solution singulière la courbe $\Gamma = 0$.

Remarque — C'est à l'occasion de l'équation de Clairaut qu'on a constaté l'existence d'une solution singulière ; en admettant que le faisceau des courbes intégrales a toujours une enveloppe on avait été conduit à considérer comme un fait normal l'existence de la solution singulière ; il n'en est rien. Pour qu'une famille de courbes admette une enveloppe, il est nécessaire que la constante

arbitraire figure d'une certaine manière dans l'équation du faisceau, rien ne prouve que l'intégrale générale d'une équation du premier ordre satisfera toujours à cette condition; ce qui précède nous prouve même que cela n'aura pas lieu en général; nous allons maintenant étudier de plus près les conditions dans lesquelles il pourra y avoir une solution singulière.

IV_ Reprenons les équations

$$(1) \quad f(x, y, y') = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Désignons toujours par $P=0$ le résultat obtenu par l'élimination de $y'$. On peut regarder cette courbe $P$ comme définie par les équations simultanées (1) (2); si alors nous différentions l'équation (1) par rapport à $x$ en tenant compte de (2), il vient.

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

cette nouvelle équation doit avoir lieu tout le long de $P$; en d'autres termes si $Q=0$ est le résultat de l'élimination de $y'$ entre les équations (1), (3) les courbes $P=0$, $Q=0$ devront coïncider tout le long de la solution singulière.

Réciproquement, si les courbes $P$ et $Q$ ont une partie commune $C$, cette courbe $C$ fournira une intégrale de l'équation donnée; en effet tout le long de $C$ les équations (1) (2) (3) auront une racine commune; en la désignant par $\lambda$ cette racine commune on aura:

$$(3) \quad f(x, y, \lambda) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Si le long de la courbe (C) définie par ces équations, ou, ce qui revient au même, par les deux premières, on dérive par rapport à $x$, on aura:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

d'où l'on conclut: $$\frac{\partial f}{\partial y}(y' - \lambda) = 0$$

En général $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sera pas identiquement nul le long de la courbe $C$; on aura donc $\lambda = y'$ et par suite en substituant dans

la 1ère des équations (3):

$$f(x, y, y') = 0$$

Donc $C = 0$ fournira bien une intégrale de l'équation proposée.

Exemples. – 1°. L'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{y - x}$$

mise sous forme entière nous donne:

$$f(x,y,y') = (y'-1)^2 + x - y \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y'} = y' - 1 \qquad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - y'$$

Les courbes P, Q coïncident avec la droite $y = x$. – Cette droite donne la solution singulière.

2°. La seconde équation que nous avions considérée peut s'écrire:

$$(y'-2)^2 + x - y = 0 \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y'} = y' - 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - y'$$

Les équations des courbes $P = 0$ $Q = 0$ sont respectivement:

$$P) \; x = y \qquad Q) \; x - y + 1 = 0.$$

Ces deux droites étant distinctes il n'y a pas de solution singulière.

3°. Soit encore l'équation de Clairaut; on a ici:

$$f(xyy') = xy' - y + \varphi(y') \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = x + \varphi'(y') \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = y' - y' = 0 .$$

Ici la dernière équation se réduit à une identité, la courbe Q est complètement indéterminée; il y a donc une solution singulière, ainsi que nous l'avions constaté.

**V – Signification géométrique des courbes P, Q** – Lorsque les courbes $P = 0$, $Q = 0$ ne coïncident pas, ce qui est le cas général, elles ont l'une et l'autre une signification géométrique qui les relie très simplement, ainsi que l'a fait voir M.r Darboux[1], au faisceau des courbes intégrales. L'équation différentielle étant satisfaite identiquement, le long d'une intégrale quelconque, on aura en la différentiant par rapport à $x$:

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

---

(1) Sur les solutions singulières des équations différentielles du 1er ordre. Bulletin des sciences mathématiques 1873

Ceci posé, considérons d'abord la courbe $Q=0$ ; on a, au point où cette courbe coupe l'intégrale considérée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} \neq 0$$

$y$ et $y'$ désignant toujours des dérivées prises le long de l'intégrale en question ; On aura donc, le long de la courbe $Q$, $y''=0$.

La courbe $Q=0$ est le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.

Soit $(C)$ le faisceau des courbes intégrales ; faisons une transformation par polaires réciproques, en prenant pour conique directrice, par exemple la parabole $y^2 = 2x$ ; les formules de transformation seront :

$$x = -X + \frac{Y}{Y'} \quad y = \frac{1}{Y'} \qquad y' = \frac{1}{Y} \qquad \left(Y' = \frac{dY}{dX}\right)$$

Les courbes transformées $(T)$ auront donc pour équation différentielle.

$$f\left(-X + \frac{Y}{Y'}, \frac{1}{Y'}, \frac{1}{Y}\right) = \varphi(X\,Y\,Y') = f\left(-X + \frac{Y}{Y'}, \frac{1}{Y'}, \frac{1}{Y}\right) = 0$$

Le lieu de leurs points d'inflexion s'obtiendra en combinant cette équation avec la suivante :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} + Y' \frac{\partial\varphi}{\partial Y} = -\frac{\partial f}{\partial x} + Y'\left(\frac{1}{Y'}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{Y^2}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = -\frac{Y}{Y^2}\ \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Les points d'inflexion des courbes $(T)$ sont donc les transformés des points où les courbes $(C)$ rencontrent la courbe $P=0$. Donc celle-ci est le lieu des points de rebroussement des courbes $(C)$.

En résumé : Lorsqu'il y a une solution singulière, les courbes $P$ $Q$ coïncident en tout ou en partie .. et leur partie commune donne la solution singulière. Lorsqu'il n'y a pas de solution singulière, ce qui est le cas général, les deux courbes $(P)$, $(Q)$ sont distinctes et représentent l'une le lieu des points de rebroussement, l'autre le lieu des points d'inflexion des courbes représentées par l'intégrale générale.

Si nous revenons par exemple à l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - x}$$

nous aurons facilement son intégrale générale, en faisant la substitution $y = x + z^2$, on trouve ainsi :

$$\sqrt{y-x} - Log\left(1 + \sqrt{y-x}\right) = \frac{x}{2} + C$$

La droite $y = x$ est le lieu des points de rebroussement des

courbes que représente cette équation ; le lieu de leurs points d'inflexion est la droite $x-y+1=0$.

# Cinquième Leçon.

## Cas où l'on peut ramener l'intégration aux quadratures.

I. Équation Homogène — L'étude d'une fonction définie par une équation différentielle présente de grandes difficultés ; la question se simplifie et doit être considérée comme résolue lorsqu'on peut exprimer $x$, $y$ soit à l'aide de fonctions connues d'une même variable $t$, soit par des quadratures portant sur de telles fonctions ; car nous avons donné le moyen d'étudier les fonctions exprimées par des intégrales définies.

Nous avons vu comment on peut effectuer cette réduction pour l'équation linéaire, pour l'équation de Bernouilli, pour celle de Riccati quand on en connaît une solution particulière.

On dit que l'équation est homogène lorsque $\frac{dy}{dx}$ s'exprime par une fonction homogène et de degré 0 de $x$, $y$ ; en d'autres termes lorsqu'elle est de la forme :

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0$$

$M$, $N$ étant deux fonctions homogènes de même degré $p$. Si nous posons alors :

$$y = ux \qquad M = x^p \varphi(u) \qquad N = x^p \psi(u)$$

nous obtiendrons immédiatement :

$$[u\psi(u) + \varphi(u)]\,dx + \psi(u)\,du = 0$$

D'où :

$$x = -\int \frac{\psi(u)}{u\psi(u) + \varphi(u)}\,du$$

on sera donc ramené à une quadrature.

Prenons comme exemple, l'équation :

$$(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$$

On a ici :

$$y = ux \qquad (u+u^2)\,dx + (u-1)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$2u^2 dx + (u-1)\,x\,du = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{du}{u} - \frac{du}{u^2} = 0$$

L'intégrale est donc:

$$xy e^{-\frac{x}{y}} = \text{Const}...$$

On peut quelquefois ramener à être homogène une équation qui ne présente pas ce caractère. Soit, par exemple, l'équation:

$$(2) \qquad (ax + by + c)\,dx + a'x + b'y + c')\,dy = 0$$

où $a, b, c, a', b', c'$ sont des constantes; si on désigne par $\xi$ $\eta$ deux nouvelles variables, par $\alpha, \beta$ deux constantes, il suffira de poser:

$$x = \xi + \alpha \qquad y = \eta + \beta,$$

et l'équation deviendra homogène si on détermine $\alpha, \beta$, par la condition qu'on ait:

$$a\alpha + b\beta + c = 0 \qquad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Ce procédé serait en défaut si l'on avait $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$; mais dans ce cas, en désignant par $K$ la valeur commune de ces deux rapports, l'équation (1) s'intègre immédiatement; elle peut en effet s'écrire:

$$(ax + by + c)\,dx + K\left(ax + by + \frac{c'}{K}\right)dy = 0$$

et il suffit de poser

$$ax + by + c = u;$$

pour la ramener à la forme:

$$(mu + n)\,dx + (pu + q)\,du = 0$$

D'où

$$x = -\int \frac{pu + q}{mu + n}\,du$$

Considérons, au lieu de l'équation homogène, l'équation plus générale:

$$(3) \qquad M\,(x\,dy - y\,dx) + P\,dy + Q\,dx = 0$$

où $M, P, Q$ sont des fonctions homogènes de degrés $n, p, p$. Si nous posons encore:

$$y = ux \qquad M = x^n \varphi(u) \qquad P\,x^p \psi(u) \qquad Q = x^p \chi(u),$$

l'équation devient :

$$\frac{dx}{du}\left(u\varphi'+\chi\right)+x\psi(u)+x^{m-p-2}\varphi(u)=0.$$

C'est une équation de Bernouilli qu'on ramène aux quadratures par le procédé que nous avons indiqué.

**II — Équation de M^r Darboux.** — Si on substitue aux variables x, y les coordonnées homogènes x y z, l'équation (3) prend la forme symétrique :

$$(4)\qquad M(y\,dz-z\,dy)+N(z\,dx-x\,dz)+P(x\,dz-y\,dx)=0$$

M, N, P étant trois fonctions homogènes et d'un même degré <u>m</u>. Cette équation, dans le cas où M, N, P sont des polynômes a été étudiée par M^r Darboux ; on peut la mettre sous la forme :

$$(5)\qquad (Nz-Py)\,dx+(Px-Mz)\,dy+(My-Nx)\,dz=0.$$

Si on égale à 0 les coefficients de dx, dy dz, on a deux équations distinctes représentant deux courbes qui se coupent en $(m+1)^2$ points ($\alpha$) ; pour ces points la tangente à la courbe intégrale n'est pas déterminée par l'équation (5). — Il est bien évident qu'il ne peut y avoir plus de m+1 points ($\alpha$) sur une droite D ; sinon cette droite ferait partie de chacune des courbes :

$$(6)\qquad Nz-Py=0\qquad Px-Mz=0\qquad My-Nx=0,$$

et l'équation (5) serait divisible par un facteur qu'il faudrait supprimer.

Nous allons faire voir que si une droite D passe par m+1 points $\alpha$, son équation fournit une solution de l'équation (4).

Remarquons en effet qu'une transformation homographique conserve la forme de l'équation (1) et le caractère des points singuliers ($\alpha$) ; prenons la droite considérée comme axe des x. Puisque l'axe y=0 coupe les courbes (6) en m+1 points chacune, le polynôme N doit être identiquement nul ; l'équation prend alors la forme :

$$M(y\,dz-z\,dy)+P(x\,dy-y\,dx)=0$$

elle est évidemment vérifiée pour y=0, dy=0. L'axe des x fournit donc bien une intégrale.

En général, considérons une équation entière et homogène

$$f(x,y,z)=0$$

Si $p$ est son degré et si cette équation fournit une intégrale on aura, tout le long de cette intégrale :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=pf=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

$$\frac{y\,dz-z\,dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{z\,dx-x\,dz}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{x\,dy-y\,dx}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

D'où :

$$M\frac{\partial f}{\partial x}+N\frac{\partial f}{\partial y}+P\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

En d'autres termes, l'expression précédente devra être divisible par $f$ puisqu'elle s'annule pour tous les systèmes de valeurs de $x, y, z$ qui annulent $f$. On aura donc :

$$(7) \qquad M\frac{\partial f}{\partial x}+N\frac{\partial f}{\partial y}+P\frac{\partial f}{\partial z}=Qf,$$

$Q$ étant un polynôme de degré $m-1$.

Ce théorème peut servir à trouver certaines intégrales algébriques de l'équation proposée ; M. Darboux a d'ailleurs montré qu'il suffit de connaître un certain nombre d'intégrales de cette nature pour obtenir par quadratures, l'intégrale générale. ——— Nous nous contenterons d'examiner un cas particulier.

**III – Équation de Jacobi** — L'équation de Jacobi est la suivante :

$$(8) \quad (ax+by+cz)(y\,dz-z\,dy)+(a'x+b'y+c'z)(z\,dx-x\,dz)+(a''x+b''y+c''z)(x\,dy-y\,dx)=0$$

On peut chercher des intégrales linéaires, c'est à dire de la forme.

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

Si on écrit la condition (7) en remarquant que $Q$ se réduit à une constante $S$, on aura :

$$(9) \qquad \begin{aligned} &(a-S)\alpha+a'\beta+a''\gamma=0\\ &b\alpha+(b'-S)\beta+b''\gamma=0\\ &c\alpha+c'\beta+(c''-S)\gamma=0 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma$ ne pouvant pas être nuls ensemble, on devra avoir :

$$\begin{vmatrix} a-S & a' & a'' \\ b & b'-S & b'' \\ c & c' & c''-S \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est du 3ᵉ degré ; à chaque racine les équations (8) feront correspondre une droite fournissant une intégrale ; il est maintenant facile d'en déduire l'intégrale générale. Désignons en effet par $X=0, Y=0, Z=0$ les trois intégrales trouvées ; si nous prenons les trois droites correspondantes pour former le triangle de référence, l'équation se transformera dans la suivante :

$$\mathcal{M}(Y dZ - Z dY) + \mathcal{N}(Z dX - X dZ) + \mathcal{P}(X dY - Y dX) = 0$$

et comme elle doit être vérifiée identiquement par $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}$ sont respectivement divisibles par $X, Y, Z$. On aura donc en désignant par $\lambda\ \mu\ \nu$ trois constantes :

$$(\mu-\nu)\frac{dX}{X} + (\nu-\lambda)\frac{dY}{Y} + (\lambda-\mu)\frac{dZ}{Z} = 0$$

Dont l'intégrale générale est évidemment :

$$X^{\mu-\nu} \times Y^{\nu-\lambda} \times Z^{\lambda-\mu} = C.$$

On peut remarquer que les droites $X, Y, Z$ forment l'un des triangles inscrits à la fois aux trois coniques,

$$My - Nx = 0 \qquad Nz - Px = 0 \qquad Py - Nz = 0$$

La solution précédente revient à prendre ce triangle comme triangle de référence

## IV – Équations non résolues par rapport à y'

Nous avons supposé jusqu'ici l'équation différentielle résolue par rapport à $y'$. Supposons que cela n'ait pas lieu ; il peut arriver qu'elle soit résoluble par rapport à $x$ ou à $y$, ces deux cas se ramènent l'un à l'autre si on échange entre elles la variable et la fonction. Supposons donc qu'on ait :

$$(10) \qquad y = f(x, p)$$

$p$ étant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. En différentiant par rapport à $x$, il vient :

$$(11) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{dx}.$$

Cette dernière équation (11) est résolue par rapport à la dérivée $\frac{dp}{dx}$, si elle rentre dans l'une des formes particulières que nous avons rencontrées, nous pourrons obtenir son intégrale générale.

Supposons que cette intégrale soit :

$$(12) \qquad p = F(x, C).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (10), il vient :

$$(13) \qquad y = f(x\ F)$$

cette équation contenant une constante arbitraire, définira l'intégrale générale, si nous démontrons qu'elle satisfait à l'équation (10) ; il est aisé de le vérifier ; en effet on déduit de (12):

$$y' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial F} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Mais l'équation (12) étant l'intégrale de l'équation (11) nous avons quelle que soit la constante C.

$$F(x, c) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial F} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}.$$

D'où en rapprochant cette relation de la précédente :

$$y' = F(x, c)$$

$y'$ étant la dérivée déduite de l'équation (13) ; on aura donc bien, à cause de cette même équation (13)

$$y = f(x, y')$$

L'équation (10) est donc vérifiée.

Remarque — Si on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) sous une forme non résolue par rapport à $p$, on devrait considérer l'intégrale comme représentée par cette relation et l'équation donnée, $x$ $y$ étant des fonctions d'un paramètre variable $p$.

## V — Équation de Lagrange et de Clairaut —

Lorsque l'équation (10) est du premier degré par rapport à $x$, l'équation (11) est linéaire et par suite réductible aux quadratures. On a en effet

$$(14) \qquad y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$$

et, en différentiant par rapport à $x$ :

$$(15) \qquad p = \varphi(p) + [x\,\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

équation linéaire si on y considère $x$ comme une fonction de $p$.

L'équation (14) comprend comme cas particulier celle de Clairaut :

$$y = px + \psi(p)$$

dont nous nous sommes occupés à propos des solutions singulières. — Dans ce cas particulier, l'équation (15) se simplifie et devient :

$$\frac{dp}{dx}\left[x + \psi'(p)\right] = 0$$

Elle se scinde en deux facteurs ; le 1er donne l'intégrale $p = c$ et par suite la solution générale sous la forme :

$$y = Cx + \psi(c)$$

Le second facteur définit la solution singulière par l'ensemble des deux équations :

$$y = px + \psi(p) \qquad x + \psi'(p) = 0$$

C'est l'enveloppe des droites données par l'intégrale générale. —

Nous avons remarqué que l'équation de Clairaut est l'équation générale des courbes dont les tangentes satisfont à une condition donnée indépendante du point contact. — Lorsqu'il s'agit de déterminer une courbe dont les normales satisfont à une condition de cette nature on est conduit à une équation de la forme :

$$(12) \qquad x + py = f(p)$$

Les équations de cette forme, se ramènent sans difficulté aux quadratures. — Si on différentie, qu'on multiplie par $p$ et qu'on remplace $p\,dx$ par $dy$, l'équation précédente devient.

$$dy\,(1+p^2) + py\,dp = p\,f'(p)\,dp.$$

D'où en divisant par $\sqrt{1+p^2}$ :

$$\sqrt{1+p^2}\,dy + \frac{yp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \frac{p\,f'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Mais le premier membre est une différentielle exacte et en intégrant on est conduit à l'équation :

$$(13) \qquad y\sqrt{1+p^2} = \int \frac{p f'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

Les équations (12) et (13) fournissent explicitement $x$ et $y$ en fonction du paramètre $p$.

## VI _ Cas où l'une des variables manque. ___

Nous dirons quelques mots pour terminer, des équations de la forme :

$$f(y, y') = 0$$

qui ont été étudiées par Briot et Bouquet. - Supposons que l'équation soit, par exemple, du 5ᵉ degré par rapport à $y'$, pour chaque valeur de $y$, la dérivée $\frac{dx}{dy}$ de la fonction inverse sera susceptible de cinq valeurs que nous représenterons par :

$$\varphi_1(y) \quad \varphi_2(y) \quad \varphi_3(y) \quad \varphi_4(y) \quad \varphi_5(y)$$

Supposons maintenant que l'équation donnée admette une intégrale uniforme ; la fonction inverse sera susceptible de valeurs, en nombre fini ou infini,

$$x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_p \; \cdots$$

Les dérivées de ces valeurs de $x$ par rapport à $y$ ne pouvant prendre que les cinq valeurs distinctes écrites plus haut, si nous désignons par $x_1$ $x_2 \ldots x_5$ cinq valeurs de $\underline{x}$ donnant lieu à des dérivées distinctes, toute autre valeur $x_p$ satisfera à l'une des équations :

$$\frac{d(x_p - x_1)}{dy} = 0 \qquad \frac{d(x_p - x_2)}{dy} = 0 \ldots \frac{d(x_p - x_3)}{dy} = 0$$

d'où l'on conclut

$$x_p = \varphi_i(y) + \omega$$

$\omega$ étant une constante et $\underline{i}$ l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ; donc si l'équation proposée admet une intégrale uniforme $y = \psi(x)$ l'équation $\psi(x) = b$ où $\underline{b}$ serait une constante, n'admettra qu'un nombre limité de racines, abstraction faite de certaines périodes. - Nous avons vu (IIᵉ partie, page 90) que dès lors la fonction $\psi(x)$ ne peut être que rationnelle, ou composée rationnellement avec une exponentielle, de la forme $e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}$, ou méromorphe et doublement périodique.

Il est évident que $\psi'(x)$ sera alors de la même forme que $\psi(x)$ ; donc $\psi$ et $\psi'$ devront être liées par une relation qui coïncidera avec

l'équation donnée ; en outre, dans les deux premiers cas $\psi$ et $\psi'$ seront des fonctions rationnelles d'un paramètre donc la courbe $f(X,y)=0$, sera unicursale ; dans le 3° cas $\psi$ et $\psi'$ étant des fonctions elliptiques cette courbe sera de genre un. En résumé :

Pour que l'équation $f(y\,y')=0$ admette une intégrale uniforme, il faut que cette équation supposée entière par rapport à $y'$ soit algébrique et que la courbe $f(Xy)=0$ soit unicursale ou de genre 1.

Cette condition n'est pas suffisante, mais lorsqu'elle est remplie on peut, dans tous les cas ramener l'intégration aux quadratures. On a en effet deux équations de la forme :

$$y=\varphi(t) \qquad y'=X(t)$$

$\varphi$. $X$ étant des fonctions rationnelles, ou doublement périodiques du paramètre $t$. Or si on différentie la première en tenant compte de la seconde, il vient :

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(t)\,\frac{dt}{dx}=X(t)$$

D'où :

$$x\int\frac{\varphi'(t)}{X(t)}\,dt \qquad y=\varphi(t)$$

$x$ et $y$ sont donc exprimés explicitement en fonction de $t$.

---

# Exercices sur la 5ème Leçon.

---

1° — Trouver une courbe plane telle que la projection de la normale sur l'axe des $y$ ait une longueur constante $2a$.

L'équation différentielle est :

$$y(1+y'^2)=2a$$

On peut obtenir $x$ immédiatement par une quadrature :

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{2a}{y}-1}}$$

mais il est préférable ici d'exprimer rationnellement $y$ et $y'$ en fonction d'un paramètre ; on a alors :

$$y=\frac{2a}{1+p^2} \qquad y'=p$$

Différentiant la première équation et tenant compte de la seconde :

$$dx = \frac{-4\,a\,dp}{(1+p^2)^2}.$$

D'où en posant

$$y = 2a\cos^2 t \qquad x = C + \frac{a}{2}\sin 2t - at,$$

on reconnaît les équations d'une cycloïde.

2° Courbe telle que l'arc soit égal à la projection de l'ordonnée sur la tangente. Si on appelle $\alpha$ l'angle de la tangente avec l'axe oX, on a :

$$y \times \sin\alpha = s$$

d'où :

$$dy\sin\alpha + y\cos\alpha\,d\alpha = \frac{dy}{\sin\alpha} \qquad \frac{dy}{y} - \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

d'où :

$$y\cos\alpha = C$$

Si maintenant on remplace $\cos\alpha$ par $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$ on obtient immédiatement :

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}} \qquad x = \int \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

En achevant la quadrature on a l'équation d'une chaînette.

3° Lignes de Courbure de l'ellipsoïde. Les lignes de courbure de l'ellipsoïde

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

sont déterminées par l'équation :

$$A(B-C)x\,dy\,dz + B(C-A)y\,dz\,dx + C(A-B)z\,dx\,dy = 0$$

Si on pose :

$$x^2 = \xi \quad y^2 = \eta \quad z^2 = \zeta.$$

ces deux équations deviennent :

$$A(B-C)\xi\, d\eta\, d\zeta + B(C-A)\eta\, d\zeta\, d\xi + C(A-B)\zeta\, d\xi\, d\eta = 0$$

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 1$$

Si on élimine $\zeta$ et $d\zeta$ à l'aide de la seconde, on aura, pour la projection des lignes de courbure sur le plan des $xy$ :

$$AB\left(\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left[(B-c)\frac{d\eta}{d\xi} + A - c\right] + (A-B)c\,\frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

C'est une équation de Clairaut. — L'intégrale générale s'obtiendra en y remplaçant $\frac{d\eta}{d\xi}$ par une constante $\lambda$ ; on a donc, en revenant aux variables $x, y$ :

$$(AB)\,(y^2 - \lambda x^2)\left[(B-c)\lambda + A - c\right] + (A+B)c\lambda = 0$$

Les lignes de courbures se projettent donc suivant cette famille de coniques ; leur enveloppe donne la solution singulière :

$$\left[\left(y\sqrt{B-C} + x\sqrt{c-A}\right)^2 + c\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\right]\left[\left(y\sqrt{B-c} - x\sqrt{c-A}\right)^2 + c\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\right] = 0$$

C'est un système de quatre droites.

4°. – Trajectoires orthogonales d'une famille de courbes — Étant donnée une famille de courbes (C) dépendant d'un paramètre $\underline{a}$ et ayant pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

toute courbe qui coupe sous un même angle V toutes les courbes de ce faisceau est une trajectoire.

Or si on se déplace le long d'une trajectoire, le coefficient angulaire, de cette trajectoire et celui de la courbe C qui le coupe en un point $xy$ sont $\frac{dy}{dx}$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$. On a donc :

$$(2) \qquad \operatorname{Tg} V = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy}$$

Si on élimine $\underline{a}$ entre les équations (1) (2), on aura l'équation différentielle des trajectoires. Dans le cas des trajectoires orthogonales

l'équation (2) se réduit à :

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

Prenons comme exemple la famille de coniques homofocales :

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$$

Ici $\lambda$ est le paramètre, l'équation (3) est :

$$\frac{a+\lambda}{x\,dy} = \frac{b+\lambda}{y\,dx} = \frac{b+a}{y\,dx - x\,dy}$$

Si on élimine $\lambda$ on a pour l'équation des trajectoires orthogonales :

$$(x\,dy - y\,dx)(x\,dx + y\,dy) = (a-b)\,dx\,dy$$

Si on fait encore $y^2 = \eta$, $x^2 = \xi$, on obtient :

$$(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi)(d\xi + d\,n) = d\xi\,d\eta\,(a-b),$$

qui est une équation de Clairaut ; si on y remplace $\frac{d\eta}{d\xi}$ par une constante $C$, on a l'intégrale générale :

$$C x^2 - y^2 = \frac{C(a-b)}{1+C}$$

Elle représente des coniques homofocales aux proposées. La solution singulière est le quadrilatère isotrope ayant les foyers pour sommets.

---

# Sixième et Septième Leçons.

## Facteurs Intégrants. – Groupes de transformation.

I – Facteurs Intégrants – L'équation du premier ordre :

$$(1) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

s'intègre immédiatement lorsque les variables sont séparées, c'est à dire lorsque $M$ est une fonction de $x$, $N$ une fonction de $y$ ; plus généralement quand le premier membre est la différentielle exacte d'une fonction $\varphi$ de deux variables, car l'équation est alors équivalente à $\varphi =$ constante.

On peut, dans le cas général, chercher à multiplier l'équation par un facteur $\mu$ tel que son premier membre devienne une différentielle exacte ; ce facteur est déterminé par l'équation.

$$\frac{\partial(M\mu)}{\partial y} - \frac{\partial(N\mu)}{\partial x} = 0$$

ou

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = 0$$

Cette équation est aux dérivées partielles du premier ordre ; son intégration pourra se faire complètement quand on connaîtra une solution particulière.

Supposons en effet que $\mu_1$ soit une pareille solution ; l'expression $\mu_1(M\,dx + N\,dy)$ sera la différentielle d'une fonction $\varphi_1(x,y)$ et l'intégrale générale de l'équation (1) sera $\varphi_1 =$ constante. Soit maintenant $\mu$ une solution quelconque de l'équation (2) de sorte qu'on ait :

$$d\varphi_1 = \mu_1(M\,dx + N\,dy) \qquad d\varphi = \mu(M\,dx + N\,dy).$$

Les fonctions $\varphi_1$, $\varphi$, ayant leurs dérivées partielles proportionnelles, sont fonctions l'une de l'autre ; on a par conséquent :

$$\varphi = F(\varphi_1)$$

d'où en dérivant par rapport à $x$ :

$$\mu M = F'(\varphi_1)\mu_1 M$$

$$\mu = \mu_1 F'(\varphi_1).$$

Donc toute solution de l'équation (2) s'obtiendra en multipliant $\mu_1$ par une fonction de $\varphi_1$ ;

Cette fonction de $\varphi_1$ est d'ailleurs arbitraire ; si on substitue en effet $\mu_1 \lambda(\varphi_1)$ dans le 1er membre de l'équation (2) divisé par $\mu_1$, on trouve :

$$\frac{M}{\mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - \frac{N}{\mu_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + M \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - N \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\lambda'}{\lambda}\left(M \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - N \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)$$

résultat évidemment nul.

Remarquons enfin que si l'on connait l'intégrale générale de l'équation (1) on sait intégrer l'équation (2) ; car si on met cette intégrale sous la forme $u$ = constante, il est visible que la fonction $\frac{1}{M} \frac{\partial u}{\partial y}$ sera un facteur intégrant et fournira par conséquent une solution particulière de l'équation (2).

En résumé, l'équation (1) admet une infinité de facteurs intégrants la connaissance d'un seul d'entre eux fournit à la fois l'intégrale générale et l'ensemble de tous les autres facteurs. L'intégration de l'équation (1) et celle de l'équation (2) ne sont qu'une seule et même fonction.

**II. Recherche d'un facteur intégrant.** — La recherche d'une solution particulière de l'équation (2), sera d'après ce qui précède, aussi difficile que l'intégration même de l'équation (1). Il peut arriver, cependant que dans certains cas particuliers on obtienne assez aisément un facteur d'intégrabilité. Considérons par exemple l'équation linéaire :

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

On a ici $M = Py + Q$, $N = 1$ et l'équation (2) devient :

$$(Py + Q) \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu P = 0 .$$

Si on suppose $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ on est ramené à trouver une fonction de $x$ satisfaisant à la condition :

$$\frac{d\mu}{dx} = P\mu \qquad \mu = e^{\int P dx} ;$$

on a ainsi un facteur qui permet d'achever l'intégration.

Soit l'équation homogène :

$$M dx + M dy = 0$$

Le procédé que nous avons suivi pour l'intégrer met en évidence un facteur intégrant ;

En effet, multiplions d'abord par $\frac{1}{N}$ et soit $\frac{M}{N} = \varphi(u)$, $u$ désignant $\frac{y}{x}$ ; elle deviendra :

$$[\varphi(u) + u]\, dx + x\, du = 0 .$$

Elle admet évidemment comme facteur intégrant :

$$\frac{1}{x\varphi(u)+y} = \frac{1}{x\frac{M}{N}+y}$$

Donc, l'équation donnée sous sa forme primitive, admettait le facteur :

$$\frac{1}{Mx+Ny}.$$

On peut déduire, de la théorie du facteur, un procédé d'intégration lorsqu'on sait décomposer l'équation donnée en deux parties séparément intégrables. Supposons l'équation mise sous la forme :

$$(M\,dx+N\,dy)+(M_1\,dx+N_1\,dy)=0$$

Si on sait intégrer séparément les deux équations :

$$M\,dx+N\,dy=0 \qquad M_1\,dx+N_1\,dy=0,$$

on connaîtra la forme générale des facteurs intégrants pour chacune d'elles ; on cherchera alors à disposer des fonctions arbitraires de manière à obtenir un facteur qui convienne à l'une et à l'autre des deux expressions ; on aura ainsi un facteur de l'équation proposée.

Soit par exemple :

$$ay\,dx+bx\,dy+x^p y^q(my\,dx+nx\,dy)=0$$

On trouve immédiatement que les formes générales des facteurs sont respectivement :

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b) \qquad \frac{1}{x^{p+1}y^{q+1}}\psi(x^m y^n)$$

pour chacune des expressions :

$$(ay\,dx+bx\,dy \qquad x^p y^q(my\,dx+nx\,dy).$$

Les fonctions $\varphi$, $\psi$ étant arbitraires, cherchons à les déterminer de telle sorte qu'on ait :

$$\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b)=\frac{1}{x^{p+1}y^{q+1}}\psi(x^m y^n),$$

ou encore :

$$\frac{\psi(x^m y^n)}{\varphi(x^a y^b)}=x^p y^q$$

Si on pose $\varphi(x^a y^b) = (x^a y^b)^h$ $\quad \Phi(x^m y^n) = x^{mk} y^{nk}$,
On aura pour déterminer $h$ et $K$ :

$$mK = ah + p \qquad nK = bh + q$$

On en tirera $h$ et $K$ et on aura un multiplicateur commun qui sera :

$$h = x^{ah-1} \cdot y^{bk-1} .$$

On en déduit sans difficulté l'intégrale :

$$\frac{1}{h} x^{ah} y^{bh} = \frac{1}{K} x^{mK} y^{nK} + C.$$

Si les équations qui donnent $h, K$ étaient incompatibles, l'équation proposée s'intégrerait immédiatement.

**III – Groupes de Transformations à un paramètre** – La théorie des équations différentielles peut être rattachée à une théorie très importante, celle des groupes de transformations à un paramètre. Considérons deux équations de la forme :

$$(1) \qquad x_1 = f(x, y, \alpha) \qquad y_1 = \varphi(x, y, a)$$

a étant un paramètre pouvant prendre une infinité de valeurs ; elles définiront, pour chaque valeur de a, une transformations permettant de passer d'un point $M$ $(x, y)$ du plan à un autre point $M_1$ $(x_1, y_1)$. Effectuons sur $x, y$, la même opération avec une valeur $b$, du paramètre, nous aurons un nouveau point $M_2$

$$(2) \qquad x_2 = f(x, y, b) \qquad y_2 = \varphi(x, y, b) .$$

Cette double opération qui a permis de passer de $x, y$ à $x_2$ $y_2$ peut être considérée comme une transformation unique qu'on appelle produit des deux transformations (a), (b).

Ceci posé on dit qu'un ensemble d'opérations, définies d'une manière quelconque, forme un groupe, lorsque le produit de deux opérations quelconques de l'ensemble est aussi une opération de cet ensemble. En particulier nos transformations à un paramètre formeront un groupe si, quelles que soient les valeurs a, b, il existe une troisième valeur c du paramètre, telle qu'on ait :

$$(3) \qquad x_2 = f(x, y, c) \qquad y_2 = \varphi(x, y, c) .$$

Il est clair que c devra être une fonction de a et de b.
L'intégration d'une équation différentielle du 1er ordre,

revient à la détermination d'un groupe de transformations à un paramètre. Une pareille équation

$$(4) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

peut s'écrire en effet :

$$(5) \qquad \frac{dx}{\xi(x,y)} \quad \frac{dy}{\eta(x,y)} = dt,$$

$t$ étant une variable auxiliaire. D'après le théorème de Cauchy il existe un système d'intégrales $x, y$ se réduisant à $x_0\, y_0$ pour $t=0$. Si on intègre d'abord la première on aura une première équation

$$F(x,y) = F(x_0 y_0).$$

On obtiendra alors $t$ par une quadrature, ce qui fournira la seconde intégrale

$$\phi(x,y) = \phi(x_0 y_0) + t.$$

Comme $x_0\, y_0$ sont des valeurs quelconques, les deux équations précédentes permettent de transformer un système de valeurs de $x, y$ en un autre ; elles définiront donc un ensemble de transformations à un paramètre ; écrivons les sous la forme :

$$(6) \qquad F(x_1 y_1) = F(x y) \quad \phi(x_1 y_1) = \phi(x,y) + t.$$

Je dis que les transformations définies par les équations (6) forment un groupe ; si on donne en effet à $t$, les valeurs $t, t_1$ on aura :

$$F(x_2 y_2) = F(x_1 y_1) = F(x,y); \qquad \phi(x_2 y_2) = \phi(x_1 y_1) + t_1 = \phi(x,y) + t + t_1$$

D'où l'on conclut :

$$F(x_2 y_2) = F(x,y) \qquad \phi(x_2 y_2) = \phi(x,y) + t_2.$$

avec la relation $t_2 = t + t_1$.

Pour $t=0$ on a $x_1 = x$, $y_1 = y$ ; on exprime ce fait en disant que le groupe admet la transformation identique. On voit aussi que si on change $t$ en $-t$, on passe du point $M_1$ au point $M$ ; en d'autres termes, la transformation inverse de toute transformation du groupe appartient elle-même au groupe ; mais cette seconde propriété est une conséquence de la précédente. Nous allons démontrer en effet que : Tout groupe à un paramètre, qui admet la substitution identique,

peut être obtenu par l'intégration d'un système analogue au système (5) et par suite ramené à la forme (6).

Rappelons en effet les relations (1), (2), (3) nous en déduisons :

$$f(x,y_1,b) = f(x,y,c) \quad \varphi(x,y_1 b) = \varphi(x,y,c) \quad b = \psi'(a,c)$$

a, b, c étant liées par une relation constante ; nous considérons $x, y$ comme constants ; $x_1, y_1$ sont alors des fonctions de a, définies par les équations mêmes du groupe ; quant aux relations précédentes, elles contiennent deux variables indépendantes a, c, si nous considérons b comme une fonction connue de a et de c ; différentions ces deux relations par rapport à a, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{da} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{da} = -\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a} \qquad \frac{d\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{da} = -\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a}$$

$f$ et $\varphi$ étant des fonctions de $x, y_1, b$ ; on tire de là pour $\frac{dy_1}{da}$ $\frac{dx_1}{da}$ des valeurs de la forme :

$$\frac{dx_1}{da} = \frac{\partial \psi}{\partial a}\mathcal{F}(x,y,b) \qquad \frac{dy_1}{da} = \frac{\partial \psi}{\partial a}\mathcal{G}(x_1 y_1 b)$$

Les premiers membres étant indépendants de $b$ il en est de même des seconds ; nous ne changerons rien en attribuant à b une valeur particulière $b_0$ ; remplaçons donc $b$ par $b_0$ et $c$ par sa valeur tirée de $b_0 = \psi'(a,c)$ nous aurons en définitive deux équations de la forme :

$$\frac{dx_1}{da} = \lambda(a)\xi(x,y_1) \quad \frac{dy_1}{da} = \lambda(a)\eta(x,y_1)$$

Soit maintenant $a_0$ la valeur du paramètre qui correspond à la substitution identique

$$x = f(x,y,a_0) \quad y = \varphi(x,y,a_0) .$$

Si nous posons

$$t = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\,da \quad \lambda(a)\,da = dt$$

nous aurons à intégrer le système :

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1 y_1)} = \frac{dy_1}{\eta_1(x_1 y_1)} = dt$$

avec la condition que $x_1, y_1$ se réduisent à $x, y$ respectivement, pour $t=0$.

Le théorème est donc démontré, et on voit comment les fonctions $\xi$, $\eta$ peuvent se déduire des équations mêmes qui définissent le groupe.

Quand on se donne le groupe les fonctions $\xi, \eta$ ne sont déterminées qu'à un facteur constant près ; si on prend en effet $Kt$ pour paramètre au lieu de $t$, $\xi, \eta$ sont divisées par $K$ ; au contraire à une équation différentielle donnée, c'est à dire à un système de valeurs de $\xi, \eta$, correspond un système d'intégrales, et par suite un groupe unique et parfaitement déterminé.

IV — Développement des formules de Transformation suivant les puissances de $t$. — Partons du système :

$$(7) \qquad dx_1 = \xi(x_1, y_1)\,dt \qquad dy_1 = \eta(x_1, y_1)\,dt$$

qui, ainsi que nous l'avons vu, définit le groupe sans ambiguité ; $x, y$, peuvent être développés suivant deux séries entières :

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + t\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)_0 + \dots \\ y_1 &= y + t\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)_0 + \dots \end{aligned}$$

Nous transformerons ces développements à l'aide des équations (7). — Désignons en général par $A(H)$, le résultat obtenu en effectuant sur la fonction $H(x, y)$ l'opération :

$$\xi \frac{\partial H}{\partial x} + \eta \frac{\partial H}{\partial y}$$

Continuons en outre à remplacer $H(x, y_1)$ par $H_1$. On aura :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2}\xi_1 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2}\eta_1$$

d'où :

$$\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)_0 = \xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = A(\xi)$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\xi_1 + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial^2 y_1^2}\eta_1 \qquad \left(\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)_0 = \xi\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = A(\eta)$$

Les coefficients de $\frac{t^2}{2}$ dans les formules (8) sont donc $A(\xi), A(\eta)$ ;

les autres coefficients s'en déduisent bien aisément. On a en effet quelle que soit la fonction $F$:

$$\frac{d}{dt} F(x,y) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = A(F)$$

On en déduit en différentiant $(p-1)$ fois par rapport à $t$ et en représentant d'autre part, par $A^{(p)}$ le résultat obtenu en répétant $p$ fois de suite l'opération $(A)$,

$$\frac{d^p F}{dt^p} = A^p(F) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d^p F_1}{dt^p}\right)_0 = A^p(F).$$

On en conclut pour les formules (8)

$$x_1 = x + \frac{t}{1}\cdot\xi + \frac{t^2}{1.2} A(\xi) + \frac{t^3}{1.2.3} A^2(\xi) + \ldots$$

$$y_1 = y + \frac{t}{1}\cdot\eta + \frac{t^2}{1.2} A(y) + \frac{t^3}{1.2.3} A^2(\eta) + \ldots$$

Elles peuvent être mises sous une forme plus symétrique en remarquant que, par définition, on a $\xi = A(x)$, $y = A(y)$. On a alors les formules définitives :

$$(9) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} A(x) + \frac{t^2}{1.2} A^2(x) + \ldots \\ y_1 = y + \frac{t}{1} A(y) + \frac{t^2}{1.2} A^2(y) + \ldots \end{cases}$$

Plus généralement on peut développer une fonction quelconque des intégrales $x_1 y_1$ ; on a la formule suivante, qui est intuitive quand on considère les formules (9) et qu'on vérifie sans aucune difficulté

$$(10) \qquad F_1 = F + \frac{t}{1}\cdot A(F) + \frac{t^2}{1.2} A^2(F) + \frac{t^3}{1.2.3} A^3(F) + \ldots$$

V — Invariants d'un groupe de transformations — Faisceaux invariants — On donne le nom d'invariant à toute fonction $H(x,y)$ qui se reproduit par toutes les transformations du groupe, il est très fa[cile] de former tous les invariants.

Nous en connaissons déjà un ; car si nous supposons les équations du groupe mises sous la forme canonique :

$$\varphi_1 = \varphi \qquad \psi_1 = \psi + t$$

il est évident que $\varphi$ est un invariant ; plus généralement, tout

fonction $\lambda(\varphi)$ sera invariante, puisque l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)}$$

est $\lambda(\varphi)$ = constante, et que par suite l'une des équations du groupe est

$$\lambda\left[\varphi(xy)\right] = \lambda\left[\varphi(x,y)\right]$$

Réciproquement tout invariant est de la forme $\lambda(\varphi)$.. En effet si dans la formule (10) nous faisons $F_1 = F$ et que nous supposions cette relation vérifiée quelque soit $t$, nous devons avoir :

$$A(F) = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Comme on a d'ailleurs
$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

on en conclut que $F$ et $\varphi$ sont fonctions l'une de l'autre, leur déterminant fonctionnel étant nul.

D'après cela on peut dire que le groupe n'admet qu'un seul invariant et qu'on obtient cet invariant en résolvant, par rapport à la constante, l'intégrale générale de l'équation :

$$\eta\, dx - \xi\, dy = 0 .$$

Supposons maintenant que l'on considère une famille de courbes dépendant d'un paramètre

$$H(x, y, a) = 0 .$$

Nous dirons qu'elles forment un faisceau invariant du groupe $(\xi, \eta)$ si une transformation quelconque de ce groupe transforme chaque courbe du faisceau en un autre appartenant également au faisceau. En éliminant $\underline{a}$ entre les deux équations :

Dem. Equat. 7. $$H = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial x}\, dx + \frac{\partial H}{\partial y}\, dy = 0$$

on aura une équation différentielle du premier ordre :

$$M\,dx + M\,dy = 0\ ;$$

c'est l'équation différentielle du faisceau. Soit $u = \text{const.}$ son intégrale générale. Si on transforme la fonction $u$ par la formule (10) on a :

$$u_1 - u = t A(u) + \frac{t^2}{1\cdot 2} A^2(u) + \text{———}$$

à tout système de valeurs de $x\,y$ qui laissent $u$ constant correspondent des valeurs de $x_1, y_1$, pour lesquelles $u_1$ reste lui-même constant ; $u_1$ doit donc être une fonction de $u$ ; par suite $u_1 - u$ doit aussi être une fonction de $u$ quelque soit $t$ ; cela exige évidemment que l'on ait :

$$A(u) = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} = f(u).$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante ; car si on la suppose remplie on aura :

$$A^2(u) = f'(u) A(u) = f(u) f'(u)\ ;$$

donc le coefficient de $t^2$, et de même les suivants, seront des fonctions de $u$.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle $M\,dx + N\,dy = 0$ définisse un faisceau invariant du groupe $(\xi, \eta)$ c'est qu'on ait :

$$\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} = f(u)\ ,$$

$f$ étant une fonction quelconque.

Cette condition peut être d'ailleurs mise sous une autre forme. Puisque $u = \text{const.}$ est l'intégrale générale de l'équation :

$$M\,dx + N\,dy = 0\ ,$$

on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda M \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda N\ .$$

$\lambda$ étant un facteur d'intégrabilité. La condition trouvée peut donc s'écrire :

$$\lambda(M\xi + \eta N) = f(u) ,$$

ou

$$\frac{1}{M\xi + N\eta} = \frac{\lambda}{f(u)}$$

Mais le second membre est, d'après ce que nous avons vu, l'expression générale des facteurs intégrants ; donc

Pour que le groupe $(\xi, \eta)$ transforme en lui-même le faisceau défini par l'équation différentielle :

$$M dx + N dy = 0$$

il faut et il suffit que $\frac{1}{M\xi + N\eta}$ soit un facteur intégrant de cette équation.

On voit donc que la recherche du facteur intégrant revient à celle d'un groupe pour lequel le faisceau intégral soit un invariant. Il est quelquefois aisé de trouver un pareil groupe par des considérations géométriques, et l'intégration de l'équation différentielle s'en déduit alors sans difficulté.

## VI _ Exemples _ 1° _ Les formules :

$$(11) \qquad x_1 = ax \qquad y_1 = ay$$

déterminent un groupe, le groupe homothétique ; si on pose

$$x_2 = bx_1 \qquad y_2 = by_1$$

on en déduit en effet :

$$x_2 = cx \qquad y_2 = cx \qquad c = ab.$$

De plus il admet la transformation identique pour $a = 1$ ; si on pose $a = 1+t$ on aura :

$$x_1 = x + tx \quad y_1 = y + ty \qquad \xi = x \qquad \eta = y .$$

En intégrant les équations :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = dt$$

on obtient immédiatement la forme canonique :

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x} \qquad \text{Log}\, x_1 = \text{Log}\, x + t .$$

Observons maintenant que si on transforme une courbe, le rapport $\frac{dy}{dx}$ reste invariable ; donc le groupe admet comme invariant tout faisceau de courbes définies par une relation constante entre $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{y}{x}$ ; en d'autres termes par une équation différentielle telle que :

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) ;$$

c'est sous une forme particulière l'équation homogène la plus générale. Donc, si on considère l'équation homogène :

$$M\,dx + N\,dy = 0 ,$$

elle admet les transformations du groupe homothétique et $\frac{1}{Mx+Ny}$ est un facteur intégrant.

Considérons, comme second exemple, les formules :

$$(12) \qquad x_1 = x\cos t + y\sin t \qquad y_1 = x\sin t - y\cos t .$$

Elles forment un groupe de rotations autour de l'origine ; si on remplace $t$ par $t_1$ on a :

$$x_2 = x_1\cos t_1 + y_1\sin t_1 = x\cos(t-t_1) + y\sin(t-t_1) = x\cos t_2 + y\sin t_2 .$$

$$y_2 = x\sin t_2 - y\cos t_2 \qquad (t_2 = t - t_1) .$$

La subotitution identique correspond ici à $t = 0$. Si nous développons $x_1$, $y_1$ suivant les puissances de $t$ nous aurons :

$$\frac{dx_1}{dt} = -y_1 \qquad \frac{dy_1}{dt} = x_1 ,$$

d'où en faisant $t=0$, $\xi=-y$ $\eta=x$

On mettra bien aisément les équations du groupe sous la forme canonique :

$$x_1^2+y_1^2=x^2+y^2 \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{y_1}{x_1}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+t.$$

D'après cela toute équation différentielle admettant les transformations du groupe s'intégrera par une quadrature si on prend $x^2+y^2$ comme variable et $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ comme fonction. On pourra d'ailleurs intégrer en remarquant que si $M\,dx+N\,dy=0$ est cette équation, la fonction :

$$\frac{1}{My-Nx}$$

sera un facteur d'intégrabilité.

Il est évident que l'on sera dans le cas que nous venons d'indiquer toutes les fois qu'on cherchera à déterminer, d'après une propriété différentielle, une famille de lignes tracées sur une surface de révolution et plus généralement sur un hélicoïde (Picard, cours autographié, page 318), pourvu que la propriété en question soit indépendante de l'azimut ; on intégrera par des quadratures l'équation différentielle qui traduit cette propriété en projection sur le plan des $x\,y$ (lignes asymptotiques, lignes de courbure, etc.)

## VII. Transformation infinitésimale

— Effectuons sur les différents points du plan la transformation :

$$x_1=x+\varepsilon\xi \quad y_1=y+\varepsilon\eta$$

dans laquelle nous supposons $\varepsilon$ infiniment petit nous aurons ainsi ce qu'on appelle une transformation infinitésimale ; un système de fonctions données $\xi(x\,y)$, $\eta(x,y)$ peut être considéré comme définissant soit un groupe $(\xi.\eta)$ soit une transformation infinitésimale unique, la transformation infinitésimale étant connue, le groupe sera complètement déterminé ; la réciproque ne serait pas exacte.

En cherchant les invariants et les faisceaux invariants du groupe $(\xi,\eta)$ nous avons constaté que la condition d'invariance une fois exprimée à l'aide du premier terme dans le développement des formules (9) et (10) se trouvaient d'elles-mêmes vérifiées par toute

la suite des coefficients. Il résulte de là qu'au point de vue des invariants il est indifférent de considérer ou le groupe (§, 7) dans son ensemble, ou la transformation infinitésimale et il pourra être plus commode d'envisager cette transformation unique et c'est ce qu'on fait en général. On prendra par exemple la transformation :

$$y_1 = y(1+\varepsilon) \qquad x_1 = x(1+\varepsilon),$$

au lieu du groupe homothétique que nous avons considéré ; de même au groupe des rotations effectuées autour de l'origine, on substituera la rotation infinitésimale :

$$x_1 = x - \varepsilon y \qquad y_1 = y + \varepsilon x$$

---

# Huitième Leçon.

## Généralités sur les systèmes d'équations différentielles.

I. Réduction à un système du 1er ordre. — Nous nous occuperons maintenant des systèmes d'équations différentielles d'ordre quelconque. Supposons qu'on ait un système de $n$ équations contenant une variable indépendante $z$ et $n$ fonctions $u, v, w, \ldots$ de cette variable, et les dérivées des différents ordres de $u, v, w$ ; on peut immédiatement ramener un pareil système à un autre qui ne contienne que des dérivées du premier ordre, à la condition d'introduire de nouvelles fonctions inconnues.

Supposons, pour fixer les idées que $n$ soit égal à (3) et soit

$$f\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, v, \frac{dv}{dz}, \frac{d^2v}{dz^2}, \frac{d^3v}{dz^3}, w, \frac{dw}{dz}, \frac{d^2w}{dz^2}, \frac{d^3w}{dz^3}, \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

$$(1) \quad \varphi\left(z, u, \frac{du}{dz}, \ldots, v, \frac{dv}{dz} \ldots\ldots \frac{d^3v}{dz^3}, w \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

$$\psi\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2} \ldots\ldots \frac{d^3v}{dz^3}, w \ldots\ldots\ldots \frac{d^4w}{dz^4}\right) = 0$$

le système proposé ; il est évident qu'on peut le remplacer par le suivant :

(2)

$$\frac{du}{dz} = u' \qquad \frac{dv}{dz} = v' \qquad \frac{dv'}{dz} = v'' \qquad f\left(z, u, u', \frac{du'}{dz}, v, v', v'', \frac{dv''}{dz}, w, w', w'', w''', \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

$$\frac{dw}{dz} = w' \qquad \frac{dw'}{dz} = w'' \qquad \frac{dw''}{dz} = w''' \qquad \varphi\left(z, u, u' \ldots\ldots \ldots \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

$$\psi\left(z, u, u', \frac{du'}{dz}, \ldots\ldots \ldots \frac{dw'''}{dz}\right) = 0$$

Si les équations (1) sont résolubles par rapport à $\frac{d^2u}{dz^2}$ $\frac{d^3v}{dz^3}$ $\frac{d^4w}{dz^4}$ c'est à dire par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé, les trois dernières équations du système (2) seront résolubles par rapport à $\frac{du'}{dz}$ $\frac{dv''}{dz}$ $\frac{dw'''}{dz}$ et on aura un système du premier ordre, résolu par rapport aux dérivées des neuf fonctions inconnues :

$$u, v, w, u', v' \ldots\ldots w'''.$$

On peut dès lors appliquer à ce système le théorème général de Cauchy ; l'intégrale générale contiendra 9 constantes arbitraires permettant d'attribuer pour $z = a$, des valeurs arbitraires aux trois fonctions $u, v, w$ et à leurs dérivées jusqu'à celles de l'ordre le plus élevé exclusivement ; il faudra d'ailleurs pour que la théorie soit applicable, qu'on puisse tirer des équations (1) trois valeurs de $\frac{d^2u}{dz^2}$ $\frac{d^3v}{dz^3}$ $\frac{d^4w}{dz^4}$ holomorphes pour le système de valeurs initiales considéré.

Remarques : Nous avons supposé les équations (1) résolubles par rapport aux plus hautes dérivées des fonctions inconnues ; s'il en était autrement, on pourrait éliminer ces dérivées et substituer à l'une des équations (1) une équation dans laquelle n'entreraient que les dérivées d'ordre inférieur ; on pourra ensuite en dérivant cette dernière équation s'en servir pour faire disparaître dans les deux autres l'une des dérivées de l'ordre le plus élevé par exemple $\frac{d^4w}{dz^4}$ ; on sera ramené ainsi à un système de trois équations nouvelles, dont l'ordre aura diminué d'une unité pour l'une des fonctions inconnues.

2° _ Nous avons supposé le nombre $p$ des équations égal au nombre $n$ des fonctions inconnues ; si l'on avait $p < n$, on pourrait se donner arbitrairement $n - p$ des fonctions inconnues et on serait ramené à un système d'équations analogues au système (1) ; le système proposé serait donc indéterminé ; si au contraire on avait

$p > n$ ; en laissant de côté $n-p$ équations on aurait un système de $p$ équations à $p$ fonctions inconnues dont l'intégrale serait déterminée; ces intégrales ne vérifieraient pas, en général, les $n-p$ équations complémentaires ; donc les équations données seraient, en général incompatibles.

## II – Réduction à une équation différentielle unique.

La réduction précédente porte sur l'ordre des équations qu'on abaisse au premier, à la condition d'augmenter le nombre des équations et des fonctions inconnues. On peut, au contraire, ramener le problème à l'intégration d'une seule équation différentielle, d'ordre plus élevé, et ne contenant plus qu'une fonction inconnue.

Prenons par exemple deux équations :

$$(3) \quad \begin{cases} f\left(z, u, v, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{d^2u}{dz^2}, \dfrac{dv}{dz}, \dfrac{d^2v}{dz^2}, \dfrac{d^3v}{dz^3}\right) = 0 \\ \varphi\left(z, u, v, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{d^2u}{dz^2} \cdots\cdots \dfrac{d^3v}{dz^3}\right) = 0 \end{cases}$$

Pour $z = a$ on devra avoir :

$$u = b \qquad v = c \qquad \frac{du}{dz} = b' \qquad \frac{dv}{dz} = c' \qquad \frac{d^2v}{dz^2} = c''$$

Ces conditions entraînent à cause des équations (3) la connaissance de toutes les dérivées d'ordre supérieur, pour $z = a$ ; on aura par exemple :

$$\frac{d^2u}{dz^2} = b'' \qquad \frac{d^3u}{dz^3} = b''' \quad \cdots\cdots \quad \frac{d^3v}{dz^3} = c''' \quad \cdots\cdots \quad \frac{d^4v}{dz^4} = c'''' \cdots\cdots$$

Ceci posé, si nous dérivons deux fois de suite chacune des équations (3) nous aurons en tout six équations contenant comme plus hautes dérivées $\frac{d^4u}{dz^4}$, $\frac{d^5v}{dz^5}$ ; entre ces 6 équations éliminons $u$ et ses 4 dérivées, nous aurons en définitive une équation de la forme

$$(4) \qquad F\left(z, v, \frac{dv}{dz}, \frac{d^2v}{dz^2}, \frac{d^3v}{dz^3}, \frac{d^4v}{dz^4}, \frac{d^5v}{dz^5}\right) = 0 .$$

On voit sans difficulté que si les équations (3) sont résolues par rapport à $\frac{d^3v}{dz^3}, \frac{d^4v}{dz^4}$, l'équation (4) sera elle-même résoluble par rapport à $\frac{d^5v}{dz^5}$; on pourra donc l'intégrer; elle admettra donc une solution déterminée et telle que l'on ait pour $z=a$

$$v=c \qquad \frac{dv}{dz}=c' \qquad \frac{d^2v}{dz^2}=c'' \qquad \frac{d^3v}{dz^3}=c''' \qquad \frac{d^4v}{dz^4}=c^{IV}$$

En portant la valeur de $v$ dans les six équations précédentes, elles se réduiront à cinq, permettant d'obtenir, sans intégration $u$, et ses quatre premières dérivées..

**III – Réduction à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre –** Supposons qu'on ait réduit le système donné à un système du premier ordre; désignons par $x$ la variable indépendante, par $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n$ les fonctions inconnues, nous pourrons mettre les équations obtenues sous la forme :

$$(5) \qquad \frac{dx}{\xi(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \frac{dx_1}{\xi_1(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x, x_1 x_2 \cdots x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n(x, x_1 x_2 \cdots x_n)}$$

la variable indépendante n'étant plus spécifiée. – Les propositions démontrées dans le cas de deux variables se généralisent sans difficulté.

Considérons d'abord l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$(6) \qquad \xi \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \cdots + \xi \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} = 0 .$$

Supposons qu'on ait intégré les équations (1) et résolu les intégrales par rapport aux constantes, de sorte qu'elles soient sous la forme :

$$(7) \qquad F_1(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = C_1 \qquad F_2(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = C_2 \qquad F_n(x, x_1 x_2 \cdots x_n) = C_n .$$

Si on les différentie totalement et qu'on y remplace $dx_i$ par $\xi_i$ on exprimera que ce sont les intégrales du système (5). On obtient ainsi $n$ identités :

$$\xi \frac{\partial F_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

Donc chacune des fonctions $F$ vérifie l'équation (6). – Plus généralement toute fonction $\varphi(F_1 F_2 \cdots F_n)$ vérifiera l'équation (6) car en la substituant dans (6) on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial F_i} \left( \xi \frac{\partial F_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdots + \xi_n \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) = 0,$$

identité qui est évidente, chaque parenthèse, séparément, étant nulle. Réciproquement toute solution $F$ de l'équation (6) est une fonction de $F_1 F_2 F_n$ ; Si en effet on élimine les $\xi$ entre les relations qui expriment que $F$, $F_1$, .. $F_n$ sont des intégrales on obtient la relation

$$\frac{D(F, F_1 F_2 \ldots F_n)}{D(x, x_1 x_2 \ldots x_n)} = 0$$

Elle exprime qu'il existe une identité entre les fonctions $F$, $F_1 F_2 \ldots F_n$ et cette identité doit nécessairement contenir effectivement $F$, sinon les équations $F_1 = c_1$ $F_2 = c_2$ ... $F_n = c_n$, ne représenteraient pas l'intégrale générale du système (5), puisqu'elles ne permettraient pas de disposer des valeurs de $x_1 x_2 \ldots x_n$ pour $x = a$. – Donc on aura bien

$$F = \varphi(F_1 F_2 \ldots F_n)$$

la fonction $\varphi$ étant d'ailleurs arbitraire.

Ainsi l'intégration du système (5) entraine celle de l'équation

Réciproquement, supposons qu'on connaisse $n$ solutions indépendantes, $\lambda_1 \lambda_2 . \lambda_n$, de l'équation (6) ; je dis qu'on connaît l'intégrale générale du système (5). En effet, désignons par $a_1 a_2 \ldots a_n$ des constantes arbitraires et considérons les équations

$$(7) \qquad \lambda_1 = a_1 \quad \lambda_2 = a_2 \qquad \lambda_n = a_n$$

elles définissent $x, x_2 \ldots x_n$ comme fonctions de $x$ et les différentielles des fonctions ainsi définies satisfont aux équations

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2} dx_2 \ldots + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

Mais on a en même temps les identités :

$$\xi \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \xi_n \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

Comme le déterminant fonctionnel :

$$\frac{D\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)}{D\ (x, x_2 \quad x_n)} \neq 0$$

on en conclut évidemment :

$$\frac{dx_j}{dx} = \frac{\xi_j}{\xi}$$

Donc les équations (5) sont vérifiées .– Ainsi les équations (7) fournissent une intégrale et c'est l'intégrale générale puisque d'après l'inégalité précédente, elles sont résolubles par rapport à $x, x_2 \cdots x_n$.

En résumé, l'intégration du système (5) et celle de l'équation (6) sont une seule et même question.

## IV_ Groupes de Transformation à un paramètre.

Nous pouvons généraliser aussi facilement ce que nous avons dit d'une équation à deux variables dans ses rapports avec la théorie des groupes ; il n'y a rien à changer aux démonstrations ; les résultats sont intuitifs et on peut se contenter de les énoncer.

1° Prenons pour fixer les idées, quatre variables, $x, y, z, u$ et considérons le système :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{\xi(x,y,z,u)} = \frac{dy_1}{\eta(x,y,z,u)} = \frac{dz_1}{\zeta(x,y,z,u)} = \frac{du_1}{\theta(x,y,z,u)}.$$

Déterminons de nouvelles variables $x_1, y_1, z_1, u_1$ définies par les équations :

$$(9) \qquad \frac{dx_1}{\xi\,(x_1,y_1,z_1,u_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1,y_1,z_1,u_1)} = \frac{dz_1}{\zeta(x_1,y_1,z_1,u_1)} = \frac{du_1}{\theta(x_1,y_1,z_1,u_1)} = dt,$$

et devant se réduire à $x, y, z, u$, respectivement, pour $t = 0$. Trois des intégrales pourront s'obtenir en laissant de côté la variable <u>t</u> et la 4<sup>ème</sup>

une fois les autres connues, s'obtiendra par une quadrature. – La solution sera donc de la forme :

$$(10)\quad \begin{cases} f(x_1 y_1 z_1 u_1) = f(xyzu) \quad \varphi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \varphi(xyzu) \quad \psi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \psi(xyzu) \\ \chi(x_1 y_1 z_1 u_1) = \chi(xyzu) + t \end{cases}$$

Ces relations définissent un groupe de transformations à un paramètre ; $t=0$ correspond à la transformation identique ; deux valeurs égales et de signes contraires de $t$ donnent deux transformations inverses l'une de l'une de l'autre.

Réciproquement, soit un groupe de transformations donné par les équations :

$$(11)\quad x_1 = F(x,y,z,u,a) \quad y_1 = \Phi(x,y,z,u,a) \quad z_1 = \Psi(x,y,z,u,a) \quad u_1 = X(x,y,z,u,a)$$

admettant pour $a = a_0$ la transformation identique ; si on raisonne sur les relations :

$$F(x_1 y_1 z_1 u_1 b) = F(xyzuc \qquad \Phi(x_1 y_1 z_1 u_1 b) = \Phi(xyzuc) \dots \qquad c = \theta(a,b)$$

comme nous l'avons fait (page 46) dans le cas de deux variables, nous obtiendrons des relations de la forme :

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{dz_1}{\zeta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = \frac{du_1}{\theta(x_1 y_1 z_1 u_1)} = dt \qquad t = \int_{a_0}^{a} \lambda(a)\,da$$

et les fonctions inconnues de $t$, $x_1 y_1 z_1 u_1$ devront pour $a = a_0$ ou pour $t=0$ se réduire à $x, y, z, u$ respectivement.

2° Les formules de développement suivant les puissances $t$ peuvent être écrites immédiatement ; si nous désignons symboliquement par $A(H)$ l'expression :

$$\xi \frac{\partial A}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial A}{\partial x_2} \dots + \xi_n \frac{\partial A}{\partial x_n}$$

et par $H_1$ le résultat obtenu en remplaçant $x\,y\,z\,u$ par $x_1 y_1 z_1 u_1$

on aura :

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} A(x) + \frac{t^2}{1,2} A^2(x) + \cdots \\ y_1 = y + \frac{t}{1} A(y) + \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

et en général

$$(12) \qquad H_1 = H + \frac{t}{1} A(H) + \frac{t^2}{1,2} A^2(H) + \cdots$$

La transformation infinitésimale sera ici, en appelant $\varepsilon$ un infiniment petit :

$$x_1 = x + \varepsilon \xi \quad y_1 = y + \varepsilon \eta \quad z_1 = z + \varepsilon \zeta \quad u_1 = u + \varepsilon \theta .$$

9. — Les invariants du groupe s'obtiennent aussi sans difficulté ; pour qu'une fonction $\lambda$ se conserve par toutes les transformations du groupe, c'est à dire pour qu'on ait, quelque soit $t$, $\lambda_1 = \lambda$, il faut et il suffit que $A(\lambda) = 0$. Or on connaît trois invariants distincts, ce sont les fonctions $f, \varphi, \psi$, obtenues en mettant les équations du groupe sous forme canonique, et d'après ce que nous avons vu plus haut toutes les autres solutions de l'équation aux dérivées partielles $A(\lambda) = 0$ seront des fonctions de $f, \varphi, \psi$.. A ce point de vue on doit considérer le groupe comme admettant trois invariants distincts.

Quant au faisceau formé par les intégrales d'un système différentiel, il n'admet pas en général de transformation infinitésimale, les groupes de transformation qui correspondraient à une équation d'ordre supérieur ou à un système de plusieurs équations du premier ordre, seraient des groupes à plusieurs paramètres ; nous n'aborderons pas la théorie des groupes de transformation de cette nature.

## V — Cas d'abaissement

10. — Revenons à un système de $n$ équations du 1er ordre ; soit $x$ la variable, $x_1 x_2 \cdots x_n$ les fonctions inconnues ; le système aura la forme (5) ;

$$(5) \qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

nous avons vu que, si on connaît $x$ solutions indépendantes de l'équation (6) ;

$$\xi \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} = 0$$

on pouvait en déduire l'intégrale générale du système (5). - Si on connait un nombre moindre $p$ de solutions de l'équation (6) on pourra s'en servir pour diminuer de $p$ unités le nombre des équations (5). - Soient, en effet $\varphi_1\ \varphi_2 \dots \varphi_p$ les solutions connues ; l'intégrale générale du système (5) sera :

$$\varphi_1 = C_1 \quad \varphi_2 = C_2 \quad \varphi_3 = C_3 \dots \varphi_p = C_p$$

$$\varphi_{p+1} = C_{p+1} \quad \varphi_{p+2} = C_{p+2} \qquad \varphi_n = C_n$$

les $C$ étant des constantes et les $n-p$ dernières fonctions $\varphi$ étant inconnues ; servons-nous des $p$ premières pour exprimer $x_1\, x_2 \dots x_p$ en fonction de $x,\ x_{p+1}\ x_{p+2} \dots x_n$ et désignons par $(\xi_i)$ ce que devient $(\xi_i)$ quand on y substitue les expressions ainsi trouvées ; on sera ramené évidemment à intégrer le système de $(n-p)$ équations.

$$\frac{dx_{p+1}}{(\xi_{p+1})} = \frac{dx_{p+2}}{(\xi)_{p+2}} = \qquad = \frac{dx_n}{(\xi_n)} = \frac{dx}{(\xi)}$$

où ne figurent plus que $\underline{n-p}$ fonctions inconnues.

2°. Si l'une des variables $\underline{x}$ par exemple, ne figure dans les équations que par sa différentielle, on intégrera d'abord le système de $n-1$ équations obtenu en laissant de côté le rapport $\frac{dx}{\xi}$ ; une fois les intégrales obtenues, on en tirera $x_1\ x_2 \dots x_{n-1}$ en fonction de $x_n$ et $\xi$ s'obtiendra par une quadrature :

$$x = \int \frac{(\xi)}{(\xi_n)}\, dx_n$$

Dire que $x$ n'entre dans les équations que par sa différentielle c'est dire que ces équations ne changent pas si on y change $x$ en $x+t$, $t$ étant quelconque ; en d'autres termes elles admettent le groupe de transformations :

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 \qquad y_n = x_n \quad y = x + t$$

Supposons plus généralement, qu'elles admettent le groupe :

$$y_1 = x_1 + a_1 t \qquad y_2 = x_2 + a_2 t \qquad y_n = x_n + a_n t \qquad y = x + t$$

les $a$ étant des constantes.

Si on prend pour variables nouvelles:

$$\alpha_1 = x_1 - a_1 x \quad \alpha_2 = x_2 - a_2 x \; \ldots \; \alpha_n = x_n - a_n x \; \ldots \quad \alpha = x$$

il est évident que le système admettra, quel que soit $t$, la transformation.

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 \qquad \beta_n = \alpha_n \quad \beta = \alpha + t$$

On sera donc ramené au cas précédent ; on aura une équation de moins à intégrer, puis une quadrature à effectuer.

# Neuvième Leçon.

## — Intégration des équations différentielles d'ordre supérieur.

I — Nous avons vu que l'intégrale générale d'une équation d'ordre $n$,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

doit contenir $n$ constantes arbitraires permettant d'attribuer, pour $x = a$, des valeurs également arbitraires à $y$ et à ses $(n-1)$ premières dérivées. Il existe un certain nombre de cas où cette intégrale peut s'exprimer à l'aide de quadratures.

Soit d'abord une équation de la forme :

$$(1) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = f(x).$$

On peut par une quadrature, obtenir $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, puis en déduire par un nouvelle quadrature $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$ et ainsi de suite — On a ainsi :

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx \qquad \Bigg| \qquad \frac{dy}{dx} = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int f(x)\,dx \qquad \Bigg| \qquad y = \int dx \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx$$

le nombre des signes $\int$ surperposés étant $n$; chaque quadrature nouvelle introduit une constante arbitraire

On peut encore opérer de la manière suivante. Remarquons que, quand on connaît une intégrale particulière $y_1$, il est facile d'obtenir l'intégrale générale, car posons:

$$y = y_1 + z$$

En différentiant $n$ fois, on voit que la fonction $z$ est donnée par l'équation:

$$(2) \qquad \frac{d^n z}{dx^n} = 0$$

On sait qu'alors $z$ se réduit à un polynôme entier $P_{n-1}$ de degré $n-1$ à coefficients arbitraires:

$$P_{n-1} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1} x^{n-1}.$$

Et par suite, on a pour l'intégrale générale cherchée:

$$y = y_1 + P_{n-1}:$$

Ceci posé, considérons l'intégrale définie:

$$u_p = \frac{1}{1.2\dots\dots p} \int_{\alpha}^{x} (x-z)^p f(z)\, dz$$

$\alpha$ étant une constante. Nous allons prouver que cette fonction de $x$ satisfait à l'équation (1). Différentions $p$ fois par rapport à $x$, nous aurons successivement:

$$\frac{du_p}{dx} = \frac{1}{1.2\dots(p-1)} \int_{\alpha}^{x} (x-z)^{p-1} f(z)\, dz \qquad \frac{d^{p-1}u_p}{dx^{p-1}} = u_1$$

$$\frac{du_p}{dx} = u_{p-1} \qquad \frac{d^p u_p}{dx^p} = u_0 = \int_{\alpha}^{x} f(z)\, dz$$

$$\frac{d^2 u_p}{dx^2} = u_{p-2} \qquad \frac{d^{p+1} u_p}{dx^{p+1}} = f(x).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On retrouve l'équation (1) si on fait $p+1=n$.

Donc, une solution particulière de l'équation (1) est:

$$\frac{1}{1.2.3\dots(n-1)}\int_{\alpha}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)\,dz.$$

On n'aura plus qu'à ajouter un polynome de degré $n-1$, à coefficients arbitraires, pour avoir l'intégrale générale.

III. Supposons que la variable $x$ n'entre pas dans l'équation (A) et posons:

$$\frac{dy}{dx}=p$$

Donc:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\,\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dp}{dx}\,\frac{dp}{dy}+p^2\frac{d^2p}{dy^2}=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2},\ \text{etc}\dots$$

L'équation proposée prend alors la forme:

$$F\left(y,p,\frac{dp}{dy},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0\ .$$

On a de cette façon abaissé l'ordre de l'équation différentielle d'une unité. On arrive au même résultat et par la même substitution quand l'équation ne contient pas la fonction $y$. Ce résultat est d'accord avec ce que nous avons dit (page 62).

Si l'équation ne contient, outre la variable, que deux dérivées consécutives de la fonction, elle est de la forme.

$$f\left(x,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

Posons $$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=p\ .$$

L'équation devient: $$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$$

Si on peut intégrer cette équation du premier ordre, $p$ sera donné par une quadrature et il sera facile alors de déterminer $y$ par une équation de la forme (1).

Enfin supposons qu'on ait :

$$f\left(x, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

En posant : $$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p,$$

on est ramené à intégrer l'équation du second ordre :

$$f\left(x, p, \frac{d^2p}{dx^2}\right) = 0 .$$

Remarque — Si $x$ ne figure pas dans cette équation et si l'on peut en tirer $\frac{d^2p}{dx^2}$ en fonction de $p$, on a :

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p) .$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{dp}{dx}$, il vient :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \varphi(p)\,dp.$$

Une fois connue la dérivée $\frac{dp}{dx}$, on en déduit $p$ par une quadrature.

II — Exemples — 1° — Soit à intégrer l'équation :

$$1 + y'^2 + x y' y'' = a y'' \sqrt{1+y'^2}$$

$y$ ne figure ici que par ses dérivées, nous poserons donc :

$$y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$1 + p^2 + xp\,\frac{dp}{dx} = a\frac{dp}{dx}\sqrt{1+p^2}$$

équation linéaire :

$$\frac{dx}{dp}(1+p^2) + px = a\sqrt{1+p^2}$$

On aperçoit immédiatement le facteur intégrant $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, et on obtient l'intégrale :

$$x\sqrt{1+p^2} = ap + c$$

On en tire :

$$p = \frac{ac+\sqrt{a^2+c^2-x^2}}{x^2-a^2} \qquad y = ac\int\frac{dx}{x^2-a^2}+\int\frac{x\sqrt{a^2+c^2-x^2}\,dx}{x^2-a^2}$$

et enfin :

$$y = C\,\mathrm{Log}\,\frac{ax}{c+\sqrt{a^2+c^2-x^2}}+\sqrt{a^2+c^2-x^2}+C'.$$

2°_ Soit encore l'équation du 3e ordre :

$$(1) \qquad y'y'''+ay''^2+by'^2y''=0$$

$y$ n'y figurant encore que par ses dérivées, prenons pour inconnue $y'$, l'équation (1) devient :

$$(2) \qquad y'\frac{d^2y'}{dx^2}+a\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+by'^2\frac{dy'}{dx}=0$$

$x$ n'y figure que par sa différentielle. Nous poserons donc :

$$(3) \qquad \frac{dy'}{dx}=q \qquad y'\frac{dq}{dx}+aq^2+by'^2q=0.$$

Si nous y remplaçons $dx$ par $\frac{dy'}{q}$, il vient :

$$(4) \qquad qy'\frac{dq}{dy'}+aq^2+bqy'^2=0.$$

Laissons de côté la solution $q=0$ qui d'ailleurs convient évidemment à l'équation (2) et donne pour $y$ une fonction linéaire quelconque de $x$ ; il nous reste à intégrer l'équation linéaire :

$$(4') \qquad y'\frac{dq}{dy'}+aq+by'^2=0,$$

dont l'intégrale générale est :

$$(5) \qquad q=Cy'^{-a}-\frac{b}{a+2}y'^2 \qquad\qquad q=\frac{dy'}{dx}=\frac{y'dy'}{dy}$$

On en conclut.

$$y = \int \frac{dy'}{Cy'^{-(a+1)} - \frac{b}{a+2} y'} = -\frac{1}{b} \log \left(C - \frac{b}{a+2} y'^{a+2}\right) + C' ,$$

Résolvant par rapport à $y'$ on aura $x$ par un quadrature de la forme.

$$x = \int (m + n e^{by})^{-\frac{1}{a+2}} dy . \qquad m, n \text{ étant des constantes.}$$

**Remarques** — 1° — Celle solution tombe en défaut si $a = -2$ ; dans ce cas il faut revenir à l'équation (5) ; l'intégration s'achève sans difficulté et fournit pour $x$ une valeur de la forme :

$$x = m \int e^{n e^{-by}} dy \quad .$$

2° — On peut arriver autrement aux résultats précédents ; l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{y'''}{y''} + a \frac{y''}{y'} + b y' = 0 \ ;$$

elle s'intègre une première fois et donne :

$$y'' y'^{a} = C e^{-by} \quad ,$$

relation équivalente à l'équation (5). L'intégration s'achève comme plus haut.

3° — Trouver les courbes planes dans lesquelles le rayon de courbure R est proportionnel à une puissance donnée de la normale N.

Supposons $R = KN^n$ ; si nous comptons la normale positivement dans le sens du rayon de courbure on aura :

$$N = -y \ (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad .$$

Si donc on pose $a = (-1)^n . K$, l'équation sera :

$$(1) \qquad y^n y'' = (1+y'^2) . a^{\frac{3-n}{2}} .$$

Elle ne contient pas $y$. — Posons $y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{p\,dp}{dy}$.

$$(2) \qquad \frac{dy}{y^n} = \alpha \cdot p\,(1+p^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dp$$

D'où en intégrant et supposant $n-1 \neq 0$ :

$$-\frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}} = \frac{a}{n-1}\,(1+p^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{c}{n-1}.$$

On en tire, en résolvant par rapport à $p$ :

$$p = \frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a\,y^{n-1}}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'où :

$$x = \int\left[\left(\frac{c}{a} - \frac{1}{a\,y^{n-1}}\right)^{\frac{2}{n-1}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

C'est l'équation générale des courbes qui répondent à la question. — Il y a lieu de passer en revue un certain nombre de cas particuliers.

1° — $n = 0$

$$x = \int \frac{(c-y)\,dy}{\sqrt{a^2-c^2-y^2+2cy}} \qquad x - c' = \sqrt{a^2-(c-y)^2}$$

$$(x-c')^2 + (y-c)^2 = a^2.$$

c'est l'équation générale des cercles de rayon $a$.

2° — $n = -1$

$$x = \int \frac{dy\,\sqrt{c-y^2}}{\sqrt{a-c+y^2}}$$

$y$ est une fonction elliptique de $\underline{x}$. Ces courbes comprennent pour $C = 0$ l'ensemble des cercles $(x-c)^2 + y^2 + a = 0$ qui répondent évidemment à la question.

3°— $n = 3$

$$x \int \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{(c-a)^2 y^2 - 1}}\, dy$$

$$\frac{(c-a)\,x}{\sqrt{a}} = \int \frac{(c-a)\, y\, dy}{\sqrt{(c-a) y^2 - 1}} = \sqrt{(c-a) y^2 - 1} + \frac{c'(c-a)}{\sqrt{a}}$$

$$(c-a)\, y^2 - 1 = \frac{(c-a)^2}{a}(x-c')^2$$

Ce sont des coniques ayant un axe dirigé suivant $Ox$. On vérifie sans difficulté que le paramètre $p$ est donné par la relation :

$$p^2 = -\frac{1}{a}.$$

4°— $n = 2$

$$x = \int \frac{a y\, dy}{\sqrt{(c^2-a^2) y^2 - 2cy + 1}}.$$

Le radical s'annule pour $y = \frac{1}{c+a} = \alpha$ $\qquad y = \frac{1}{c-a} = \beta$.
On a alors :

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \int \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - (\alpha+\beta) y + \alpha\beta}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)} + \frac{a(\alpha+\beta)}{2\sqrt{c^2-a^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)}}$$

et enfin :

$$x = \frac{a}{\sqrt{c^2-a^2}} \sqrt{(y-\beta)(y-\alpha)} + \frac{a(\alpha+\beta)}{2\sqrt{c^2-a^2}} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{y-\alpha} + \sqrt{y-\beta}}{\sqrt{y-\alpha} - \sqrt{y-\beta}} + c'.$$

Remarque — Dans toutes les questions où le rayon de courbure doit être une fonction donnée de la normale, si on connaît une solution contenant une constante arbitraire, il suffit d'y remplacer $x$ par $x + c'$ pour avoir la solution générale, l'introduction de cette constante nouvelle $c'$ ayant seulement pour effet de déplacer la courbe le long de l'axe des $x$.

Cas où n = 1 — Si n = 1, les calculs précédents deviennent illusoires; il faut remonter alors à l'équation (2) qui devient :

$$\frac{dy}{y} = \frac{ap\,dp}{1+p^2}.$$

Intégrons :

$$y = c\,(1+p^2)^{\frac{a}{2}} \qquad p = \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$(3) \qquad x = \int\left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{a}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Pour que cette différentielle binôme soit intégrable il faut et il suffit que $\underline{a}$ soit un nombre entier. En donnant à $\underline{a}$ des valeurs simples, on obtient un certain nombre de courbes intéressantes.

1° — $a = 1$. Rayon de courbure égal et de signe contraire à la normale :

$$x = \int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}} \qquad x - c' = c\,\log\left(\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}\right)$$

On en conclut :

$$\frac{y}{c} + \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{\frac{x-c'}{c}} \qquad \frac{y}{c} - \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1} = e^{-\frac{(x-c')}{c}}$$

et en ajoutant :

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}\right)$$

c'est une chaînette.

2° — $a = -1$ — Rayon de courbure égal à la normale :

$$x = \int\frac{dy}{\sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1}} = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} \qquad x - c' = -\sqrt{c^2 - y^2}$$

$$(x - c')^2 + y^2 = c^2.$$

Ce sont des cercles ayant leurs centres sur $ox$.

3° — $a = 2$ — Rayon de courbure double de la normale et

de sens contraire.

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{c}} - 1} \qquad x - c' = 2\sqrt{c}\sqrt{y-c}$$

$$y - c = \frac{(x-c')^2}{4c}$$

Paraboles dont la normale est limitée à la directrice.
4° $a = -2$ — Rayon de courbure double de la normale:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{c}{y}} - 1}$$

Si on pose $y = c\cos^2 t$, l'équation devient:

$$x = \int \frac{-2c\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} - 1} = \int -2\cos^2 t\,dt$$

$$x - c' = -c\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

On retrouve les équations qui définissent la cycloïde.

---

# Dixième Leçon.

## Equations linéaires sans second membre.

1. On appelle équation linéaire une équation de la forme:

$$(1) \qquad A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots \qquad + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = A.$$

où les $A$ sont des fonctions de $x$. Cette équation peut se mettre sous la forme $F(y) = A$, le symbole $F$ indiquant une opération qui est bien définie quand on connait l'ensemble des coefficients $A_0\ A_1 \ldots A_n$. On voit immédiatement que l'expression $F$ présente les propriétés suivantes:

1°. — On a, en substituant les fonctions $u, v, u+v$

$$(2) \qquad F(u+v) = F(u) + F(v)$$

2°. — Si $a$ désigne une quantité indépendante de $x$ :

$$(3) \qquad F(au) = a\,F(u)$$

3°. — Si la fonction $u$ dépend à la fois de $x$ et d'un paramètre $\alpha$ on a, pour une dérivée d'ordre quelconque :

$$(4) \qquad \frac{\partial^p F(u)}{\partial \alpha^p} = F\left(\frac{\partial^p u}{\partial \alpha^p}\right)$$

Ces propriétés sont évidentes et se généraliseraient sans difficulté.

4°. — Si on change la variable indépendante, la forme linéaire se conserve. Soit en effet $x = \varphi(t)$ la formule de transformation ; si on passe d'une dérivée à la suivante on a :

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^p y}{dx^p}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Si donc $\frac{d^p y}{dx^p}$ s'exprime linéairement en fonction des dérivées de $y$ par rapport à $t$, il en sera de même de $\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}$ ; or cela a lieu évidemment pour $\frac{dy}{dx}$ et par suite pour une dérivée d'ordre quelconque.

5°. — La forme linéaire se conserve également si on change de fonction en posant :

$$y = u\,\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée de $x$. Cela résulte évidemment de la formule qui donne les dérivées successives d'un produit de deux fonctions.

6°. — Soient deux formes linéaires $F$, $\Phi$ d'ordres $m$, $n$,

définies, la première par un ensemble de coefficients $A_0 A_1 \ldots A_m$, la seconde par des coefficients $B_0 B_1 \ldots B_n$ ; si $y$ est une fonction quelconque de $x$ et qu'on pose :

$$y_1 = F(y) \qquad y_2 = \Phi(y_1) \qquad y_2 = \Phi(y_1)$$

il est clair qu'on pourra poser $y_2 = \Psi(y)$, en désignant par $\Psi$ une troisième forme linéaire définie par un ensemble de coefficients : $C_0 C_1 \ldots C_{m+n}$ faciles à exprimer en fonction des coefficients $A_i$ et $B_j$. En d'autres termes le produit des deux opérations $F$ et $\Phi$ est une opération de la même forme ; si donc on considère le symbole $F$ dans sa généralité, l'ensemble des opérations qu'il représente forme un groupe.

II — Équation sans second membre — Nous étudierons d'abord le cas où le second membre $A$ est nul. L'équation prend alors la forme $F(y) = 0$ ; dans ce cas l'identité (2) donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — Si $y_1, y_2, \ldots y_p$ sont des solutions particulières de l'équation, on obtient une intégrale contenant $p$ constantes arbitraires en posant :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_p y_p$$

D'après cela, si on connaît $\underline{n}$ solutions particulières, la combinaison linéaire précédente fournit une solution contenant $n$ constantes arbitraires et on doit supposer qu'on aura ainsi la solution générale de l'équation :

$$F(y) = 0$$

Nous allons chercher à quelles conditions cela aura lieu. Pour que l'équation :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

fournisse l'intégrale générale, on sait qu'on doit pouvoir disposer des constantes $C$ de telle sorte que cette fonction $y$ et ses $n-1$ premières dérivées prennent, pour une valeur quelconque $x = \alpha$, des valeurs choisies arbitrairement $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$. En d'autres termes on doit pouvoir vérifier pour :

$$x = \alpha,$$

les équations suivantes :

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = b$$

$$C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + C_n \frac{dy_n}{dx} = b_1$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \dots\dots\dots + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} = b_{n-1}$$

Il faut donc et il suffit que, pour cette valeur de $x$, qui est une quelconque des valeurs appartenant au domaine dans lequel les intégrales sont définies on ait :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots\dots & y_x \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \dots\dots & \frac{dy_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nous désignerons par $R(x)$ ce déterminant. Si on connaît $n$ intégrales particulières de l'équation $F(y) = 0$ satisfaisant à l'inégalité précédente, on aura l'intégrale générale en posant :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

III. Propriétés de $R(x)$ — On dit que $n$ fonctions $y_1 y_2 \dots y_x$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe aucun système de constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; non toutes nulles, tel que l'on ait identiquement :

$$(1) \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

Théorème — Pour que $n$ fonctions $y_1, y_2 \dots y_n$ ne soient pas linéairement indépendantes, il faut et il suffit que leur déterminant $R(x)$ soit nul.

D'abord, si ces fonctions ne sont pas linéairement indépendantes il existe un système de constantes $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ satisfaisant à l'identité :

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

Si nous différentions $n-1$ fois et si nous écrivons que les équations obtenues sont compatibles pour des valeurs des $\alpha$ non toutes nulles, nous obtenons la condition :

$$R(x) = 0$$

Réciproquement, si le déterminant $R$ est nul, il existe un système de constantes $\alpha$ satisfaisant à l'identité (1). En effet, le déterminant $R$ étant nul il existe entre les éléments d'une même ligne, une même relation linéaire et identique, c'est à dire qu'on a, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ certaines fonctions de $x$, non toutes identiquement nulles.

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots\dots + \lambda_n y_n = 0 \\ \lambda_1 \dfrac{dy_1}{dx} + \lambda_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \dots\dots + \lambda_n \dfrac{dy_n}{dx} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \lambda_2 \dfrac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots + \lambda_n \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

Nous allons prouver que ces fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont proportionnelles à des constantes. Différentions les équations (6) ; il vient :

$$(7) \quad \begin{cases} y_1 \dfrac{d\lambda_1}{dx} + y_2 \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \dots\dots + y_n \dfrac{d\lambda_n}{dx} = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} \cdot \dfrac{d\lambda_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} \cdot \dfrac{d\lambda_2}{dx} + \dots + \dfrac{dy_n}{dx} \dfrac{d\lambda_n}{dx} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d\lambda_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d\lambda_2}{dx} + \dots\dots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d\lambda_n}{dx} + \left(\lambda_1 \frac{d^n y_1}{dx_n} + \lambda_2 \frac{d^n y_2}{dx_n} + \dots\dots + \lambda_n \frac{d^n y_n}{dx_n}\right)$$

**Lemme** — La dérivée du déterminant $R(x)$ s'obtient en remplaçant chacun des éléments de la dernière ligne horizontale par sa dérivée.

Le théorème est évident dans le cas où le nombre $n$ des fonctions est égal à l'unité. Il suffit donc de prouver que, s'il est vrai pour $n$ fonctions il l'est pour $n+1$. Soient en effet $y_1 y_2 \cdots y_n$, $y_{n+1}$, les $n+1$ fonctions considérées, et désignons par $S(x)$ leur déterminant. Si on ordonne $S(x)$ par rapport aux éléments de la dernière ligne, on a en appelant $A_1$, $A_2 \dots, A_n, A_{n}$

les mineurs correspondants :

$$S(x) = A_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + A_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + A_n \frac{d^n y_n}{dx_n} + A_{n+1} \frac{d^n y_{n+1}}{dx^{n+1}}$$

D'où, en différentiant :

$$\frac{dS}{dx} = A_1 \frac{d^{n+1} y_1}{dx^{n+1}} + A_2 \frac{d^{n+1} y_2}{dx^{n+1}} + \dots + A_n \frac{d^{n+1} y_n}{dx^{n+1}} + A_{n+1} \frac{d^{n+1} y_{n+1}}{dx^{n+1}} +$$

$$(8) \qquad + A'_1 \cdot \frac{d^n y_1}{dx^n} + A'_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + A'_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + A'_{n+1} \cdot \frac{d y_{n+1}}{dx^{n+1}}$$

La première ligne est le résultat obtenu en remplaçant dans le déterminant $S$, chaque élément de la dernière ligne par sa dérivée ; il suffit donc de prouver que la deuxième ligne est identiquement nulle.

Or, considérons, par exemple, $A'_1$ : c'est la dérivée d'un mineur de $S$, c'est-à-dire d'un déterminant concernant $n$ fonctions ; par suite $A'_1$ peut s'écrire sous forme d'un déterminant en remplaçant dans ce mineur chaque élément de la dernière ligne par sa dérivée. D'où il résulte que la deuxième ligne de l'égalité (8) s'obtient en remplaçant dans $S$, sans faire aucun autre changement, les éléments de l'avant dernière ligne par ceux de la dernière ; le déterminant acquiert ainsi deux lignes identiques, donc il est nul.

Revenons aux équations (7). Dans la dernière de ces équations la parenthèse est égale à $R'(x)$. Or si on a $R(x) = 0$, on a aussi $R'(x) = 0$. Dès lors, les équations (7) sont identiques aux équations (6) dans lesquelles les $\lambda$ seraient remplacés par leurs dérivées $\lambda'$. On a donc :

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda'_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \varphi(x)$$

$\varphi$ étant une fonction connue de $x$. On en conclut en intégrant :

$$\lambda_i = C_i e^{\varphi(x)}$$

$C_i$ étant une constante ; d'ailleurs la fonction $\varphi(x)$ est la même pour tous les $\lambda$.

Si on revient à la première des équations (6) et qu'on divise son premier membre par $e^{\varphi(x)}$ on a immédiatement.

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0,$$ ce qu'il fallait prouver

Si maintenant on rapproche les résultats qui précèdent de ceux déjà obtenus, on arrive à la conclusion suivante:

Pour que $n$ intégrales particulières de l'équation $F(y)=0$ fournissent, par une combinaison linéaire à coefficients arbitraires, l'intégrale générale, il faut et il suffit que ces fonctions soient linéairement indépendantes.

IV — **Points critiques des intégrales** — Si on se reporte au théorème de Cauchy après avoir transformé l'équation en un système du 1er ordre, on voit immédiatement que les seconds membres des équations de ce système seront holomorphes tant que la variable $x$ restera dans une portion fermée du plan ne contenant aucun point singulier de l'une des fonctions $\frac{A_0}{A_0}, \frac{A_1}{A_0} \dots \frac{A_n}{A_0}$. Il suit de là que les intégrales n'ont que des points critiques fixes, qui sont les points singuliers en question. D'autre part nous savons, par ce qui précède, comment les const. ntes arbitraires figurent dans l'intégrale générale. Il est alors facile de voir comment les intégrales se comportent dans les environs d'un point singulier.

Supposons que les coefficients $A$ soient uniformes et n'aient que des points singuliers isolés. Soit $\underline{a}$ l'un d'eux; partons d'une valeur quelconque de $\underline{x}$ et revenons à cette valeur après avoir entouré le seul point singulier $\underline{a}$; chacun des coefficients $A_i$ étant uniforme se reproduira finalement avec sa valeur initiale; si on considère un système d'intégrales indépendantes $y_1, y_2, \dots y_n$, ces fonctions prendront des valeurs successives qui vérifieront constamment l'équation donnée comme celle-ci aura finalement repris sa forme première, les valeurs finales $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ seront des intégrales de l'équation primitive; ce seront donc des fonctions linéaires, à coefficients constants, de:

$$y_1, y_2 \dots y_n ;$$

On aura donc:

$$Y_1 = C_1^1 y_1 + C_1^2 y_2 \dots + C_1^n y_n$$

$$Y_2 = C_2^1 y_1 + C_2^2 y_2 \dots + C_2^n y_n \quad ,$$

$$\vdots$$

$$Y_n = C_n^1 y_1 + C_n^2 y_2 + \dots + C_n^n y_n$$

Les coefficients C étant déterminés pour chaque point singulier (a).

Ainsi lorsqu'on tourne autour d'un point critique les fonctions $y_1 y_2 \dots y_n$ subissent une substitution linéaire ; ce genre de singularité est analogue à ce qu'on rencontre dans l'étude de la fonction algébrique.

La réciproque est vraie : Si $n$ fonctions $y, y_2, \dots y_n$, linéairement indépendantes, n'ont d'autres singularités que des points analogues à ceux que nous venons de définir, c'est à dire tels qu'une rotation autour de l'un d'eux ait pour effet de faire subir à ces fonctions une substitution linéaire, ces fonctions sont les intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes.

Cherchons en effet à déterminer les coefficients $A_0 A_1 \dots A_n$ de telle sorte que l'équation admette chacune des solutions $y = y_1$, $y = y_2 \dots\dots y = y_n$. Si nous désignons toujours par $R$ le déterminant :

$$R(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & & \frac{dy_n}{dx} \\ & & & \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

et par $R_i$ ce qu'il devient quand on y remplace les dérivées d'ordre $n-i$ par celles d'ordre $n$, on a :

$$\frac{Ai}{A_0} = \frac{R_i(x)}{R(x)}$$

Il reste seulement à prouver que la fonction $\frac{R_i}{R}$ est uniforme. Or elle ne peut avoir que deux sortes de points singuliers ; d'abord les points singuliers de $y, y_2 \dots y_n$ ; or si on contourne l'un deux et qu'on désigne par $C_i^j$ l'ensemble des coefficients de la substitution linéaire correspondante, les déterminants $R$, $R_i$ se reproduisent, l'un et l'autre, après un tour, multipliés par le déterminant de ces coefficients ; leur rapport reste donc uniforme dans les environs du point considéré.

Restent les zéros de $R(x)$; soit $\alpha$ l'un d'eux ; ce point étant régulier pour les fonctions $y, y_2 \dots y_n$, l'est également pour $R$ et pour $R_i$ ; ce ne peut donc être qu'un pôle ou un point ordinaire pour

le rapport $\frac{R_1(x)}{R(x)}$ ; donc ce rapport sera encore uniforme dans les environs du point (α); le théorème est donc démontré.

Remarque — Pour chaque point singulier il existe un système d'intégrales indépendantes pour lequel la substitution linéaire a une forme particulièrement simple ; pour ce qui concerne la recherche de ces systèmes fondamentaux, et l'expression analytique des intégrales correspondantes nous renverrons au mémoire de Mr Tannery sur les équations différentielles linéaires (Annales de l'Ecole normale 1874). Nous nous contenterons de considérer quelques cas très simples où l'équation s'intègre à l'aide de fonctions connues.

---

# Onzième Leçon

## Équations linéaires sans second membre à coefficients constants.

---

I — L'intégration de l'équation linéaire sans second membre se ramène à une question d'algèbre quand les coefficients sont des constantes. Soit :

$$(1) \qquad F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

l'équation donnée, $a_1 a_2 \dots a_n$ étant des constantes. Si on y fait $y = e^{rx}$, $r$ étant aussi une constante, on a :

$$F(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} \quad + a_{n-1} r + a_n)$$

Nous désignerons par $f(r)$ le polynôme entre parenthèses ; il est clair qu'on aura une solution de l'équation (1) si on prend pour $r$ une racine de l'équation caractéristique :

$$(2) \qquad f(r) = 0.$$

Ceci posé, il pourra se présenter deux cas :

1° — L'équation caractéristique n'a que des racines simples. Si $r_1 r_2 \dots r_n$

sont les racines, chacune fournira une solution; on aura donc un système d'intégrales:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}, \qquad y_3 = e^{r_3 x}, \qquad y_n = e^{r_n x}$$

Elles sont d'ailleurs linéairement indépendantes car leur déterminant est:

$$R(x) = e^{(r_1 + r_2 \cdots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & & r_n^2 \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde qui, dans le cas actuel est différent de zéro.

2°.– L'équation caractéristique a des racines multiples – Si $p$ est un entier quelconque, on a:

$$\frac{\partial^p e^{rx}}{\partial r^p} = x^p e^{rx}$$

Donc, d'après une remarque faite au début de la dernière leçon:

$$F(x^p e^{rx}) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} F(e^{rx}) = \frac{\partial^p}{\partial r^p}\left[x^{rx} f(r)\right]$$

ou, en développant:

$$F(x^p x^{rx}) = e^{rx}\left[x^p f(r) + \frac{p}{1} x^{p-1} f'(r) + \cdots + f^{(p)}(r)\right]$$

Si donc on prend pour $r$ une racine d'ordre $\alpha$ de multiplicité, tous les termes de la parenthèse s'annuleront pourvu que $p$ soit l'un des nombres $0, 1, 2 \ldots (\alpha - 1)$; la racine en question fournira donc $\alpha$ intégrales distinctes:

$$y_1 = e^{rx} \qquad y_2 = x e^{rx} \qquad y_3 = x^2 e^{rx} \qquad y_\alpha = x^{\alpha-1} e^{rx}$$

Soient alors $r_1\, r_2 \ldots r_q$ les racines de $f(r) = 0$, $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_q$ leurs ordres de multiplicité; on aura une intégrale en posant:

$$(3) \qquad y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} \qquad + P_q e^{r_q x}$$

$P_i$ étant un polynôme de degré $\alpha_i - 1$ à coefficients arbitraires; ces polynômes se réduisent à des constantes dans le cas où les racines sont simples ; on a alors l'intégrale générale :

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \quad + C_n e^{r_n x}$$

Il resterait à établir que, dans le cas des racines multiples, l'expression (3) donne encore l'intégrale générale, ou en d'autres termes, que les solutions obtenues en annulant tous les coefficients, sauf un seul, sont linéairement indépendantes. — Nous donnerons cette démonstration dans le § suivant.

**II — Deuxième méthode** — On peut sans changer la forme linéaire, faire la substitution : $y = z e^{rx}$, $r$ étant une constante et $z$ une fonction de $x$. On a successivement :

$$\frac{dy}{dx} = r \cdot z e^{rx} + e^{rx} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r^2 z e^{rx} + 2r e^{rx} \frac{dz}{dx} + e^{rx} \frac{d^2z}{dx^2},$$

D'où l'on déduit : . . . . . . . . . . . . . .

$$(3) \qquad F(z e^{rx}) = e^{rx} \left[ z f(r) + \frac{dz}{dx} f'(r) + \frac{1}{1.2} \frac{d^2z}{dx^2} \cdot f''(r) + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \frac{d^n z}{dx^n} \cdot f^{(n)}(r) \right]$$

Pour annuler la parenthèse, on peut disposer à la fois de $r$ et de $z$. Supposons que l'on prenne pour $r$, une racine $r_1$ de l'équation caractéristique, d'ordre $q$ de multiplicité ; $f(r_1)$ et ses $q-1$ premières dérivées s'annuleront ; par conséquent, les $q$ premiers termes de la parenthèse (3) disparaîtront. Si maintenant, on prend pour $z$ un polynôme entier à coefficients arbitraires, de degré $q-1$, toutes ses dérivées d'ordre supérieur à $q$ s'annuleront ; donc l'équation sera satisfaite.

Ainsi, une racine $r_1$ d'ordre $q$ de multiplicité fournit encore une solution à $q$ constantes arbitraires qui est :

$$y = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_{q-1} x^{q-1}) \, e^{r_1 x}$$

Donc l'ensemble des racines de l'équation $f(r) = 0$ fournit une solution contenant $n$ constantes arbitraires. Il resterait à démontrer, comme nous l'avons dit, que les solutions particulières ainsi trouvées sont linéairement indépendantes. Au lieu de cela, nous allons prouver, ce qui est équivalent, que la solution la plus générale est précisément de la forme :

$$y = P_1 e^{r_1 x} + P_2 e^{r_2 x} + \dots + P_p e^{r_p x}$$

$r_1, r_2, \dots r_p$ étant les racines distinctes de l'équation caractéristique, et $P_1, P_2 \dots P_p$ étant des polynômes entiers, à coefficients arbitraires, dont le degré est inférieur d'une unité au degré de multiplicité de la racine $r$ correspondante.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique ait toutes ses racines égales à $r_1$. Dans ce cas, si on remplace $r$ par $r_1$ dans la formule (3) il vient, en supprimant $e^{rx}$ :

$$\frac{d^n z}{dx^n} = 0,$$

d'où :

$$y = P_n \;;$$

$P_n$ étant un polynôme entier à coefficients arbitraires, de degré $n-1$. On a donc :

$$y = P_n \cdot e^{r_1 x}$$

et, le théorème est démontré dans ce cas particulier. Prouvons que s'il est vrai dans le cas de $p$ racines distinctes de l'équation caractéristique, il est vrai dans le cas de $p+1$. Soient $r_1, r_2, \dots r_p$, les racines de l'équation $f(r)=0$, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$ leurs degrés de multiplicité, et posons :

$$y = z \cdot e^{r_1 x}$$

L'équation donnant $z$ est :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots \alpha_1} \frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}} f^{(\alpha_1)}(r_1) + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots \alpha_1 (\alpha_1+1)} \frac{d^{\alpha_1+1} z}{dx^{\alpha_1+1}} f^{(\alpha_1+1)}(r_1) + \dots = 0$$

Nous abaisserons l'ordre de cette équation de $\alpha_1$ unités en prenant pour nouvelle fonction :

$$u = \frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}}$$

Il vient alors :

$$(5) \quad \frac{u}{1 \cdot 2 \dots \alpha_1} f^{(\alpha_1)}(r_1) + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots \alpha_1 (\alpha_1+1)} \frac{du}{dx} \cdot f^{(\alpha_1+1)}(r_1) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^{n-\alpha_1} u}{dx^{n-\alpha_1}} f^{(n)}(r_1) = 0$$

$u$ est donc déterminé par une équation homogène dont il est facile d'obtenir l'équation caractéristique ; on a en effet :

$$f(x+s) = f(r) + \frac{s}{1} f(r) + \dots + \frac{s^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(r) \,.$$

Si nous remplaçons $t$ par $t_1$:

$$f(t_1+s) = \frac{s^{\alpha_1}}{1.2\ldots\alpha_1} f^{(\alpha_1)}(t_1) + \ldots\ldots + \frac{s^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(t_1).$$

Rapprochons ce résultat de l'équation (5); on voit que si $s$ est la variable de l'équation caractéristique $\varphi(s)$ cherchée, on a:

$$\varphi(s) = \frac{f(t_1+s)}{\frac{s^{\alpha_1}}{1.2\ldots\alpha_1}}$$

et par suite, pour résoudre l'équation $\varphi(s)=0$, il suffit de résoudre

$$f(t_1+s)=0$$

Cette équation admet donc pour racines les différences:

$$t_2-t_1, \quad t_3-t_1 \quad \ldots\ldots \quad t_p-t_1,$$

les degrés de multiplicité de ces racines étant respectivement:

$$\alpha_2 \quad , \quad \alpha_3 \quad , \qquad \alpha_p .$$

D'après l'hypothèse faite, la forme la plus générale de $u$ est:

$$u = P_{\alpha_2} e^{(t_2-t_1)x} + P_{\alpha_3} e^{(t_3-t_1)x} + \ldots\ldots + P_{\alpha_p} e^{(t_p-t_1)x}$$

Il s'agit maintenant d'intégrer l'équation:

$$\frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}} = u$$

ou:

$$\frac{d^{\alpha_1} z}{dx^{\alpha_1}} = P_{\alpha_2} e^{s_2 x} + P_{\alpha_3} e^{s_3 x} + \ldots + P_{\alpha_p} e^{s_p x}$$

On est ramené à un problème déjà résolu: on obtient comme résultat:

$$z = Q_{\alpha_1} + Q_{\alpha_2} e^{(t_2-t_1)x} + Q_{\alpha_3} e^{(t_3-t_1)x} + \ldots\ldots + Q_{\alpha_p} e^{(t_p-t_1)x}$$

les polynômes $Q$ étant à coefficients arbitraires et de mêmes degrés que les polynômes $P$ correspondants. D'autre part, la valeur la plus

générale de $y$ est $z e^{r_1 x}$; donc l'intégrale générale est bien :

$$y = Q_{\alpha_1} e^{r_1 x} + Q_{\alpha_2}{}^{r_2 x} + \dots + Q_{\alpha_p} e^{r_p x}$$

et le théorème se trouve démontré complètement.

**III. Méthode de Cauchy** — Reprenons l'équation générale :

$$F(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

l'intégrale

$$I = \int_{(c)} e^{zx} \varphi(z)\, dz$$

$\underline{c}$ étant un contour fermé, est une fonction de $\underline{x}$. Cherchons à quelle condition cette fonction satisfera à l'équation proposée. En différentiant, on a :

$$\frac{dI}{dx} = \int_{(c)} z \cdot e^{zx} \varphi(z)\, dz, \dots\dots \frac{d^n I}{dx^n} = \int_{(c)} z^n \cdot e^{zx} \varphi(z)\, dz$$

de sorte que le résultat de la substitution de $I$ à $y$ dans l'équation donnée est :

$$F(I) = \int_{(c)} e^{zx} (a_n + a_{n-1} z + \dots + z^n) \varphi(z)\, dz$$

Si on dispose de la fonction $\varphi(z)$ de façon que la fonction sous le signe soit holomorphe dans le contour $c$, $F(I)$ sera nul et l'intégrale $I$ sera solution de l'équation proposée. Les coefficients $\underline{a}$ étant constants, le polynôme entre parenthèses est $f(z)$; il suffira donc de disposer de $\varphi$ de telle sorte que :

$$\varphi(z) = \frac{G(z)}{f(z)}.$$

$G(z)$ étant holomorphe dans le contour $C$ ; on peut d'ailleurs mettre le second membre sous la forme $\frac{G_1(z)}{f(z)} + \psi(z)$ $\psi$ étant holomorphe et donnant toujours une intégrale nulle; donc on n'altèrera pas la généralité du résultat en supposant que la fonction $G(z)$ se réduise à un polynôme entier de degré $n-1$, à coefficients arbitraires; on obtient donc :

$$I = \int_{(c)} e^{zx} \frac{G(z)}{f(z)}\, dz$$

fonction qui contient linéairement $n$ constantes arbitraires, et qui, par conséquent répond à la question.

Les pôles de la fonction sous le signe sont les quantités que l'on a représentées par $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_q$ ; l'intégrale $I$ se réduit donc à la somme des résidus correspondants, et en les calculant, on retombe aisément sur la forme générale :

$$y = P_{\alpha_1} \cdot e^{r_1 x} + P_{\alpha_2} e^{r_2 x} + \cdots\cdots + P_{\alpha_q} e^{r_q x}$$

Remarque – Il peut arriver, l'équation donnée étant à coefficients réels, qu'on désire n'introduire dans les intégrales que des quantités réelles ; on remarquera que si une racine est imaginaire de la forme $\alpha + i\beta$, l'équation caractéristique admet la racine conjuguée $\alpha - i\beta$ un même nombre de fois ; l'ensemble de ces deux racines donnera lieu à la somme suivante :

$$P_K e^{(\alpha+i\beta)x} + P'_K e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[(P_K + P'_K)\,\mathrm{Cos}\,\beta + i\,(P_K - P'_K)\,\mathrm{Sin}\,\beta x\right]$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$e^{\alpha x}\,(H\,\mathrm{Cos}\,\beta x + L\,\mathrm{Sin}\,\beta x)$$

$H$ et $L$ étant deux polynômes entiers à coefficients arbitraires, de degré $K-1$.

IV – Exemples – Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

On a ici :

$$f(r) = r^3 + 3r^2 - r - 3 = (r+3)(r^2-1)$$

Les racines sont :

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = -1 \qquad r_3 = -3$$

l'intégrale générale est donc :

$$y = Ce^{x} + C'e^{-x} + C''e^{-3x}$$

2° – Soit encore l'équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^2} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

On a:

$$f(r) = r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2 = (r=1)\,r^3 - 3r(r+1) - 2(r+1) = (r+1)$$

$$f(r) = (r+1)^2\,(r^2+r-2) = (r+1)^3\,(r-2)$$

D'où l'on conclut, pour l'intégrale générale:

$$y = Ce^{2x} + (C' + C''x + C'''x^2)e^{-x}$$

3°. Soit enfin:

$$\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 6\frac{d^3y}{dx^3} - 42\frac{d^2y}{dx^2} + 9\frac{dy}{dx} - 63y = 0$$

L'équation caractéristique est ici:

$$f(r) = r^5 - 7$$

Il y a une racine simple $r_1 = 7$, deux racines doubles $r_2 = 3i$ $r_2 = -3i$ et l'intégrale générale est:

$$y = Ce^{x} + (M+Nx)\cos 3x + (P+Qx)\sin 3x.$$

V. Coefficients variables. — Les procédés d'intégration que nous avons donnés s'appliquent, dans des cas particuliers à de certaines équations à coefficients variables.

Reprenons l'équation générale:

$$F(y) = \frac{d^ny}{dy} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \qquad + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

où les $A$ sont des fonctions de $x$. Si on y fait la substitution $y = e^{rx}$, en supposant toujours $x$ constant on aura:

$$F(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + A_1 r^{n-1} + \qquad \cdots \qquad + A_{n-1}r + A_n)$$

La parenthèse est ici une fonction de $r$ et de $x$; s'il arrive qu'elle admette pour $r$ une racine indépendante de $x$, on aura une intégrale particulière de l'équation donnée.

Par exemple l'équation:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + (6x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + (6x - x^2)\frac{dy}{dx} - x^2y = 0,$$

donnera comme équation caractéristique :

$$r^3+(6x+1)r^2+(6x-x^2)r-x^2=0$$

elle est vérifiée pour $r=-1$ et donne une intégrale particulière $y=e^{-x}$ dont la connaissance permet comme nous le verrons, d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation proposée.

Remarque — Il peut arriver qu'un changement de variable qui conserve, comme nous l'avons vu, la forme linéaire, transforme une équation à coefficients variables en une autre à coefficients constants ; c'est le cas de l'équation :

$$a_0(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\qquad +a_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

si on y fait la substitution :

$$a+bx=e^t,$$

on a :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{b}{a+bx}=be^{-t}\frac{dy}{dt}.$$

et en général :

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}=\frac{d}{dt}\frac{d^p}{dx^p}be^{-t}$$

Il suit de là que de proche en proche on pourra exprimer toutes les dérivées par rapport à $x$ sous la forme :

$$\frac{d^py}{dx^p}=e^{-t}\left(\alpha y+\alpha_1\frac{dy}{dt}+\dots\dots+\alpha_p\frac{d^py}{dt^p}\right).$$

$\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_p$ étant des constantes ; on sera donc ramené à une équation linéaire, toujours sans second membre et à coefficients constants.

## VI — Equation de Laplace — l'équation :

$$(1)\qquad F(y)=(ax+b)\frac{d^ny}{dx^n}+(a_1x+b_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\qquad +(a_{n-1}x+b_{n-1})\frac{dy}{dx}+(a_nx+b_n)y=0$$

où les $\underline{a}$ et les $\underline{b}$ sont des constantes, a été intégrée par Laplace à l'aide d'une transformation très analogue à la méthode donnée par Cauchy pour le cas d'une équation à coefficients constants et qui s'étend sans difficulté, dans un grand nombre de cas, aux coefficients variables.

Cherchons une solution de la forme :

$$(2) \qquad y = \int_{(c)} \varphi(z) e^{zx} dz$$

le contour (C) d'intégration étant pour le moment indéterminé ainsi que la fonction $\varphi(z)$. On a immédiatement :

$$(3) \qquad F(y) = \int_{(c)} (Px+Q)\varphi(z) e^{zx} dz.$$

en désignant par $P$ et $Q$ les deux polynomes

$$P = a z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$
$$Q = b z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$$

Si nous considérons la fonction

$$(4) \qquad V = P e^{zx} \varphi(z),$$

nous pourrons écrire la relation (3) sous la forme :

$$F(y) = \int_{(C)} dV + (\varphi Q - P\varphi' - \varphi P') e^{zx} dz$$

et elle se réduira à

$$F(y) = \int_{(c)} dV.$$

Si on prend pour la fonction $\varphi$ une solution de l'équation :

$$(5) \qquad P\varphi' + \varphi P' = \varphi Q,$$

qui est linéaire et du premier ordre et qui par suite s'intègre sans difficulté ; on a ainsi :

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{1}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dz} \qquad F(y) = V_1 - V_0$$

$V_1, V_0$ étant les valeurs que prend, à l'origine et à l'extrémité du contour (C) la fonction :

$$(7) \qquad V = e^{zx + \int \frac{Q}{P} dz}$$

l'intégrale représentant une fonction primitive quelconque, choisie une fois pour toutes, de la fonction rationnelle $\frac{R}{P}$.

Si maintenant on veut que la formule (2) fournisse une solution de

l'équation (1). il suffira évidemment de prendre pour ligne (C) d'intégration une ligne telle que $V_1 = V_0$.

Nous allons voir qu'on peut déterminer $n$ contours de cette nature.

Décomposons en effet la fraction $\frac{P}{Q}$ en fractions simples et soit :

$$\frac{P}{Q} = gx^p + g_1 x^{p+1} + \dots + g_p + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} \quad + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

$$+ \dots \dots$$

$$+ \frac{L_1}{x-l} \quad \frac{L_2}{(x-l)^2} \quad \dots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}$$

la somme des exposants $p, \alpha, \lambda$ étant égale à $n$ ; nous trouverons de trois manières des contours répondant à la question.

1° Dans le voisinage de $z = a$, on peut écrire :

$$V = W(z-a)^{A_1} e^{-\frac{A_2}{(z-a)} - \frac{A_3}{2(z-a)^2} - \frac{A_\alpha}{(\alpha-1)(z-a)^{\alpha-1}}}$$

$W$ étant finie et uniforme ; lorsque $z$ tend vers $a$ l'exposant devient infini ; le module de l'exponentielle devient alors nul ou infini suivant la partie réelle de cet exposant est négative ou positive, pour $z$ infiniment voisin de $a$. Il suffit alors de considérer le terme du degré le plus élevé ; l'argument de ce terme est égal à $\theta - (\alpha-1)\varphi$. si on pose :

$$-\frac{A_\alpha}{\alpha-1} = re^{\theta i} \qquad z - a = \rho e^{i\varphi}$$

la partie réelle changera de signe quand cet argument deviendra égal à un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\varphi = \frac{\theta}{\alpha-1} + \frac{2K+1}{\alpha-1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Menons par le point $a$ les $2\alpha - 2$ droites définies par cette relation elles décomposent le plan en $2\alpha - 2$ secteurs ; si on imagine le point $z$ se déplaçant à une petite distance de $a$ la partie réelle de l'exposant sera par exemple, négative dans les secteurs de rang impair, positive dans ceux de rang pair ; $V$ s'annulera donc toutes les fois qu'on viendra aboutir à $a$ par un chemin situé dans un secteur impair.

Donc on aura $V_1 = V_0 = 0$, si on prend un chemin fermé $C$ partant du point $a$ suivant une direction appartenant au premier secteur et revenant aboutir au même point, soit dans le 3e soit dans le 5e ... ; Le nombre des chemins différents ainsi obtenus sera égal à $\alpha - 1$.

2° La partie entière de $\frac{P}{Q}$ peut être considérée comme correspondant à un pôle d'ordre $\mu$ rejeté à l'infini ; on en déduit, par analogie, un nouveau système répondant à la question ; on pourrait en effet mener d'un point quelconque du plan $2p+2$ directions partageant le plan

secteurs tels que $(z)$ étant suffisamment grand, $V$ ait un module infiniment grand dans les secteurs de rang pair, infiniment petit dans les secteurs de rang impair. On prendra alors pour contour $C'$ une branche infinie ayant sa direction asymptotique initiale dans le 1er secteur, et sa direction finale dans l'un quelconque des autres secteurs impairs. On aurait ainsi $p+1$ contours répondant à la question.

3° Nous avons obtenu un nombre d'intégrales particulières égal à :

$$(\alpha-1)+(\beta-1)+\cdots+(\lambda-1)+p+1=n-K+1$$

$K$ étant le nombre des racines distinctes de $\varphi=0$. Il reste donc à trouver $K-1$ autres chemins fournissant des intégrales. — Pour cela il suffit de construire un système de lacets ayant pour origine commune un point quelconque $O$ et entourant les différents points $a, b, c \ldots l$, désignons par $(a)$, $(a)^{-1}$ le même lacet parcouru, d'abord dans le sens direct, puis en sens contraire.

On voit immédiatement que le lacet $(a)$ multiplie $V$ par $e^{2i\pi A}$.

Cette fonction $V$ se reproduira donc avec sa valeur initiale, si on prend l'un quelconque des $(K-1)$ chemins suivants :

$$(a)(b)(a)^{-1}(b)^{-1}, \quad (a)(c)(a)^{-1}(c)^{-1}, \quad \ldots\ldots \quad (a)(l)(a)^{-1}(l)^{-1}$$

En résumé si $C, C_2 \ldots\ldots C_n$ désignent les contours que nous venons de définir on a les $\underline{n}$ intégrales

$$y_1=\int_{(C_1)}\frac{V}{P}dz \qquad y_2=\int_{(C_2)}\frac{V}{P}dz \qquad y_n=\int_{(C_n)}\frac{V}{P}dz$$

Elles seront, en général indépendantes et donneront par suite la solution générale de l'équation de Laplace.

---

# Onzième Leçon.

## Intégration des équations linéaires non homogènes.

1 — En dehors des cas très simples que nous avons considérés, il est rare que l'on puisse intégrer les équations linéaires, homogènes ou non, à coefficients variables ; mais la connaissance d'une ou plusieurs intégrales particulières permet ou de faire disparaître le second membre, ou d'abaisser l'ordre de l'équation, tout en lui conservant la forme linéaire.

Soit une équation linéaire complète :

$$(1) \qquad F(y)=\varphi(x).$$

Posons : $$y = y_1 z$$
$y_1$ étant une solution particulière de l'équation sans second membre. L'équation devient :

$$(2) \quad B_{n-1} \frac{dz}{dx} + B_{n-2} \frac{d^2 z}{dx^2} + \dots + B_0 \frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x)$$

Si l'on pose $\frac{dz}{dx} = u$, on sera ramené à intégrer une équation de la forme
$$G(u) = \varphi(x)$$
$G$ ne contenant que des dérivées d'ordre $n-1$ au plus. Donc, quand on connaît une solution particulière de l'équation sans second membre, on peut toujours abaisser d'une unité l'ordre de l'équation donnée.

Supposons au contraire que $y_1$ soit une solution particulière de l'équation complète ; dans ce cas, en faisant
$$y = y_1 + z$$
on est ramené à chercher l'intégrale de l'équation.
$$F(z) = 0$$

**Théorème** — Quand on connaît une solution quelconque de l'équation complète, on a l'intégrale générale en ajoutant cette solution particulière à l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

Dans certains cas on peut apercevoir aisément une solution particulière de l'équation. Supposons, par exemple, que les coefficients soient constants et que le second membre $\varphi(x)$ soit un polynome entier en $x$, il est évident qu'on pourra satisfaire à l'équation proposée en prenant pour $y_1$ un polynome à coefficients convenables. La méthode des coefficients indéterminés fournira sans peine cette intégrale.

**Exemple.** — Soit l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x - 3x^2$$

Cherchons une solution de la forme :
$$y = Ax^2 + Bx + C$$
On a :
$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A.$$

Substituons et écrivons que les polynomes des deux membres sont identiques.

$$2A + 3B + 2C = 0$$
$$6A + 2B = 1$$
$$2A = -3$$

D'où $\quad A = -\frac{3}{2}$, $\quad B = 5$, $\quad C = -6$.

Une solution particulière de l'équation est donc :

$$y_1 = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - 6$$

Cherchons maintenant l'intégrale générale de l'équation sans second membre ; l'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

et a pour racines : $\quad r_1 = -1 \quad , \quad r_2 = -2$

L'intégrale est donc : $\quad \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux constantes arbitraires, et par suite on a l'équation donnée :

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x} - \frac{3}{2}x^2 + 5x - 6.$$

Le même procédé s'applique dans le cas où le second membre est de la forme $A \cos mx + B \sin mx$, le premier membre étant toujours à coefficients constants.

**Exemple.** — Proposons-nous d'intégrer l'équation :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$$

Posons : $\quad y = \alpha \sin x + \beta \cos x$

$\alpha$, $\beta$ étant des constantes que nous voulons déterminer ; on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha \sin x - \beta \cos x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

Si nous écrivons que l'équation est satisfaite, on a comme conditions :

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad , \quad \beta = 0$$

Donc une solution particulière de l'équation est :

$$y_1 = \frac{\sin x}{4}$$

Intégrons maintenant l'équation sans second membre, les racines de l'équation caractéristique sont doubles et égales à 1 et −1, donc l'intégrale générale est : $\quad e^{x}(A + Bx) + e^{-x}(C + Dx)$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires ; et par suite

$$y = e^{x}(A + Bx) + e^{-x}(C + Dx) + \frac{\sin x}{4}.$$

Cette méthode s'applique de la même façon quand le second membre est de la forme $Ae^{mx}+Be^{-mx}$.

II – Abaissement de l'ordre de l'équation. – Faisons la substitution:

$$y = y_1 z$$

L'équation générale $F(y) = \varphi(x)$, deviendra:

$$z\,F(y_1) + G(z) = \varphi(x).$$

$G(z)$ étant une forme linéaire dans laquelle $z$ ne figurera que par ses dérivées;

Si donc $y_1$ est solution de l'équation sans second membre $F(y)=0$, en posant $\frac{dz}{dx} = u$, on sera ramené à une équation linéaire, non homogène, mais de l'ordre $n-1$.

Plus généralement supposons que l'on connaisse $p$ intégrales particulières de l'équation sans second membre, linéairement indépendantes on peut alors abaisser de $p$ unités, l'ordre de l'équation.

Soient en effet $p$ solutions $y_1, y_2 \ldots\ldots y_p$ de l'équation $F(y)=0$. En faisant la substitution: $y = y_1 z$.
et en posant: $\frac{dz}{dx} = u$,
on est ramené à un résultat de la forme:

$$(3) \qquad B_0 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1} = 0$$

Cette équation admet les $p-1$ solutions suivantes:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad \left(\frac{y_3}{y_1}\right)' \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{y_p}{y_1}\right)'$$

Ces $p-1$ solutions sont distinctes, sinon on aurait identiquement

$$C_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + C_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \cdots + C_p\left(\frac{y_p}{y_1}\right)' = 0$$

d'où:

$$C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots C_p y_p = -C_1 y_1$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse. De même les solutions particulières de l'équation déduite de (3) en posant $u = u_1 v$ seront distinctes et au nombre de $p-2$. On voit donc bien ainsi qu'on arrivera à abaisser l'ordre de l'équation proposée de $p$ unités.

**Conséquence**. Il suit de là que si l'on connaît l'intégrale générale ou, ce qui revient au même $n$ intégrales distinctes de l'équation

$$F(y) = 0,$$

On pourra de proche en proche abaisser l'ordre des intégrations de $n$ unités ; on sera ainsi ramené à une équation telle que :

$$\psi(x) \cdot \frac{dw}{dx} = \varphi(x)$$

et l'intégrale s'obtient par une quadrature. Donc :

**Théorème.** — Quand on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre, on peut toujours trouver l'intégrale de l'équation complète.

Ce qui précède fournit, en même temps, un procédé pour arriver définitivement à l'intégrale, mais le même théorème peut s'établir autrement et on peut, par différents procédés passer de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, à l'intégrale générale ou, ce qui revient au même, à une intégrale particulière de l'équation complète.

**Méthode de Cauchy.** — Soit :

$$(1) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \dots + C_n y_n$$

l'intégrale générale de l'équation sans second membre ; $\alpha$ étant un nombre quelconque, on sait qu'on pourra disposer des constantes $C$ de telle sorte que $y$ et ses $n-1$ premières dérivées prennent, pour $n = \alpha$, des valeurs données arbitrairement, nous choisirons pour ces valeurs initiales les suivantes :

$$(2) \qquad y = 0 \quad y' = 0 \quad y'' = 0 \quad . \quad y^{(n-2)} = 0 \quad y^{(n)} = \varphi(\alpha)$$

Si nous portons les valeurs de $C_1, C_2 - C_n$, déterminées par les équations (2) dans l'équation (1) nous aurons pour $y$ une valeur qui sera fonction de $x$ et du paramètre $\alpha$. Soit :

$$y = \psi(x, \alpha)$$

Puisqu'on a $\psi(\alpha, \alpha) = 0$ et que $\alpha$ est arbitraire, cela revient à dire que la fonction $\psi$ s'annule lorsque les deux variables indépendantes $\alpha$, $x$, deviennent égales, on a donc $\psi(x, x) = 0$. Le même raisonnement s'applique aux dérivées partielles de $\psi$ prises par rapport à <u>$x$</u> et on a, pour $\alpha = x$

$$(3) \qquad \psi(x,x) = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,x) = 0 \qquad \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} = 0 \quad \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial x^{n-1}}(x,x) = \varphi(x)$$

Ceci posé si nous considérons l'intégrale :

$$I = \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha$$

et différentions la n-1 fois par rapport à $x$ en tenant compte des égalités (3) nous aurons :

$$\frac{dI}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{dx}\, d\alpha \qquad \frac{d^2 I}{dx^2} = \int_{x_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} d\alpha \qquad \frac{d^{(n-1)} I}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}} d\alpha.$$

$$\frac{d^n I}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} d\alpha + \varphi(x).$$

Si nous substituons dans l'équation différentielle donnée nous aurons :

$$F(I) = \int_{x_0}^{x} F(\psi)\, d\alpha + \varphi(x)$$

En supposant le premier coefficient A égal à l'unité. – Comme d'ailleurs $\psi$ est une solution de l'équation sans second membre, l'égalité précédente se réduit à :

$$F(I) = \varphi(x)$$

donc l'intégrale $I$ est une solution de l'équation complète, et celle-ci a pour intégrale générale :

$$y_0 = C_1 y_1\ C_2 y_2 \cdots\cdots + C_n y_n + \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha.$$

IV — **Variation des arbitraires**. – Reprenons l'intégrale de l'équation sans second membre :

$$(4) \qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \cdots + C_n y_n$$

et imaginons qu'on y remplace les $C$ par des fonctions de $x$ ; on pourra faire représenter au second membre telle fonction qu'on voudra, tout en imposant à ces fonctions $C_1, C_2, C_n$, n-1 conditions arbitrairement choisies ; nous déterminerons ces fonctions de telle sorte que :
1° la formule (4) donne une solution de l'équation complète,
2° les n-1 premières dérivées de $y$ aient la même forme que si les $C$ étaient des constantes.
On obtient alors pour les dérivées successives :

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} \qquad + C_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} \qquad + C_n \frac{d^2 y_n}{dx^2}$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \qquad\qquad + C_n \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = C_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + \cdots + C_n \frac{d^n y_n}{dx^n} + \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \frac{dC_1}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_n}{dx}.$$

a la condition de poser :

$$(5) \quad \begin{cases} y_1 \dfrac{dC_1}{dx} + y_2 \dfrac{dC_2}{dx} \qquad\qquad + y_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx}\dfrac{dC_2}{dx} \qquad\qquad + \dfrac{dy_n}{dx}\dfrac{dC_n}{dx} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\dfrac{dC_1}{dx} + \dfrac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\dfrac{dC_2}{dx} \qquad\qquad + \dfrac{d^{n-1}y_n}{dx^{n}}\dfrac{dC_n}{dx} = 0 \end{cases}$$

si on exprime que $y$ vérifie l'équation donnée, on aura simplement :

$$(6) \qquad \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \frac{dC_n}{dx} = \varphi(x)$$

Les équations (5) et (6) dont le déterminant n'est pas nul admettent une solution :

$$\frac{dC_1}{dx} = \psi_1(x) \quad \frac{dC_2}{dx} = \psi_2(x) \qquad \frac{dC_n}{dx} = \psi_n(x)$$

d'où l'on déduit les $C$ par des quadratures. — Si on effectue chacune de ces quadratures à partir d'une limite inférieure fixe on aura une intégrale particulière de l'équation complète ; si on prend au contraire les intégrales indéfinies on introduira $n$ constantes arbitraires et la formule (4) donnera directement l'intégrale générale de l'équation complète.

## V — Exemples

— Nous donnerons pour terminer, quelques exemples d'intégration, d'équations linéaires, avec ou sans second membre.

1° Équation de Bessel. — Nous avons rencontré dans l'études des intégrales définies, la fonction :

$$I_n = \int_0^1 (1-z^2)^{n-1} \cos z . x \, dz.$$

Elle donne lieu, par un calcul immédiat, aux deux relations :

$$\frac{dI_n}{dx} = -\frac{x}{2n} I_{n+1} \qquad\qquad \frac{d^2 I_n}{dx^2} = I_{n+1} - I_n$$

d'où l'on conclut, en éliminant $I_{n+1}$ que $I_n$ est solution de l'équation du 2e ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Cette équation connue sous le nom d'équation de Bessel, - c'est un cas particulier de l'équation de Laplace que nous avons appris à intégrer. La fonction rationnelle $\frac{\Gamma}{Q}$ se réduirait ici à $\frac{2nz}{z^2+1}$, les points singuliers étant $z = \pm i$ on formerait aisément deux intégrales indépendantes. - On peut aussi se servir de la solution connue $y = I_n$ pour abaisser l'équation au 1er ordre. Si on pose en effet :

$$y = u\, I_n \qquad \frac{du}{dx} = v$$

il vient :

$$I_n \frac{dv}{dx} = 2v \times \left( \frac{x}{2n} I_{n+1} - \frac{n}{x} I_n \right)$$

d'où l'on déduit, par deux quadratures, la valeur générale de $y$ ; les calculs sont les mêmes que ceux auxquels conduirait la transformation de Laplace.

2° Le polynome $X_n$ de Legendre satisfait également à une équation du 2e ordre, sans second membre ; nous nous arrêterons un instant aux propriétés fondamentales de ces polynômes.

Par définition $X_n$ est le coefficient de $\alpha^n$ dans le développement de :

$$(1) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 \; \dots + \alpha^n X_n + \dots$$

Si on différentie par rapport à $\alpha$ :

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)\left( X_1 + 2\alpha X_2 + 3\alpha^2 X_3 + \dots + n\alpha^{n-1} X_n \right.$$

d'où, en identifiant les deux valeurs du radical :

$$(2) \qquad (n+1)\, X_{n+1} - (2n+1)\, x\, X_n + n\, X_{n-1} = 0.$$

En développant la relation (1) par la série de Lagrange, on obtient

pour $X_n$ la forme réduite

$$(3) \qquad X_n = \frac{1}{1.2\cdots n} \cdot \frac{d^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^n}.$$

Si on veut d'ailleurs vérifier cette relation on peut procéder de la manière suivante ; posant :

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\;\frac{d^n\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n}{dx^n} \qquad A_0 = 1$$

Calculant par la formule du binôme les coefficients $g_{n+1}$ et $g_{n-1}$ de $x^p$ dans $A_{n+1}$, $A_{n-1}$ et le coefficient $h_n$ de $x^{p-1}$ dans $A_n$ on vérifiera l'égalité

$$(n+1)\,g_{n+1} - (2n+1)h_n + n\,g_{n-1} = 0$$

Donc les $A_n$ vérifient la relation recurrente (2) et comme on a évidemment $X_0 = 1$, $X_1 = A_1 = x$ on en conclut $X_n = A_n$.

La forme (3) est celle sous laquelle nous avons envisagé $X_n$ à propos du calcul numérique des intégrales définies.

Si on dérive deux fois l'équation (1) d'abord par rapport à $\alpha$, puis par rapport à $x$, on obtient la relation débarrassée de radicaux :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$$

Si on y remplace $u$ par son développement et qu'on égale les termes en $\alpha^n$ on a :

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0$$

Nous sommes donc amenés à l'équation du second ordre :

$$(5) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0$$

où $n$ est entier et positif.. et que nous pouvons intégrer complètement $X_n$ étant une solution nous poserons :

$$y = v X_n\,;\quad \frac{dy}{dx} = v\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dv}{dx}\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{d^2v}{dx^2}$$

et $v$ sera déterminé par les deux équations

$$\frac{dv}{dx} = w \qquad (1-x^2)\frac{dw}{dx} + w\left[(1-x^2)\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n} - x\right] = 0$$

La dernière peut s'écrire

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{2}{X_n}\cdot\frac{dX_n}{dx} - \frac{2x}{1-x^2} = 0$$

et admet l'intégrale évidente :

$$w\, X_n^2\,(1-x^2) = Const.$$

Prenons la constante égale à 1 nous aurons une seconde solution de l'équation (5).

$$w = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)X_n^2} \qquad y = -X_n\int\frac{dx}{(1-x^2)X_n^2}$$

La quadrature s'achève aisément. Toutes les racines du dénominateur sauf +1 et -1 sont doubles (elles sont d'ailleurs réelles ; les résidus correspondants sont nuls ; ceux qui correspondent à +1 et -1 sont respectivement $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ ; on a donc

$$y = X_n\left[\operatorname{Log}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} \cdots\cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right]$$

$\alpha_i$ étant l'une des racines de $X_n = 0$ et $A_i$ le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha_i}$ dans le développement en fractions simples.

3° Nous donnerons enfin un exemple d'intégration d'équation avec second membre. Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{a}{x^2-1}$$

L'équation sans second membre s'intègre en posant $x = e^t$ on a pour son intégrale générale :

$$y = Ax + \frac{B}{x}.$$

Suivant la méthode de Cauchy disposons de A.B, de telle sorte que l'on ait, pour $x = \alpha$ :

$$A\alpha + \frac{B}{\alpha} = 0 \qquad A - \frac{B}{\alpha^2} = \frac{a}{\alpha^2-1}$$

ces conditions déterminent A, B

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\alpha^2 - 1} \qquad B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a\alpha^2}{\alpha^2-1}$$

On aura donc une solution particulière en posant

$$y = \frac{a}{2}\int_{x_0}^{x}\left[\frac{x}{\alpha^2-1} - \frac{\alpha^2}{x(\alpha^2-1)}\right]d\alpha = \frac{a}{2x}\int_{x_0}^{x}\frac{x^2-\alpha^2}{\alpha^2-1}d\alpha$$

et enfin pour l'intégrale générale

$$y = Ax + \frac{B}{x} + \frac{a}{2x}\left[(x^2-1)\, lg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - x\right]$$

---

# Douzième Leçon.

## Systèmes d'équations linéaires.

1 — Un système d'équations d'ordre quelconque peut toujours être ramené, soit à une équation unique, soit à un système du premier ordre ; si les équations primitives sont toutes linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées des divers ordres, cette formule linéaire subsistera à travers toutes les opérations effectuées pour obtenir cette réduction. L'étude du système linéaire le plus général est donc contenue dans l'étude d'une équation linéaire unique d'ordre $n$. Cependant il y a intérêt à considérer directement le cas d'un système du 1er ordre.

Supposons les équations résolues par rapport aux dérivées et mises sous la forme :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} + a_1 u + b_1 v + c_1 w &= g_1 \\ \frac{dv}{dx} + a_2 u + b_2 v + c_2 w &= g_2 \\ \frac{dw}{dx} + a_3 u + b_3 v + c_3 w &= g_3 \end{aligned}$$

Les $a$. $b$. $c$, - $g$ étant des fonctions de $x$, représentons symboliquement par $F_1$, $F_2$, $F_3$ ce que deviennent les premiers membres quand on y remplace $u, v, w$ par des fonctions données contenant la variable

$x$, et au besoin, de certains paramètres $\alpha$, $\beta$. – Les fonctions $F$ jouissent évidemment des propriétés très simples exprimées par les identités suivan[tes]

$$F(u_1+u_2,\ v_1+v_2,\ w_1+w_2) = F(u_1, v_1, w_1) + F(u_2 v_2 w_2)$$

(2) $$F(cu\ cv\ cw) = CF(u, v, w) \qquad C \text{ étant une constan[te]}$$

$$\frac{\partial^p F[\varphi(x,\alpha), \psi(x,\alpha), \chi(x,\alpha)]}{\partial\alpha^p} = F\left[\frac{\partial^p\varphi}{\partial\alpha^p}, \frac{\partial^p\psi}{\partial\alpha^p}, \frac{\partial^p\chi}{\partial\alpha^p}\right]$$

Ces relations seraient d'ailleurs encore vraies si les $F$ contenaien[t] linéairement des dérivées d'ordre quelconque.

## II – Équations sans seconds membres.

– Nous envisagerons d'abo[rd] le cas où $g_1\, g_2\, g_3$ sont nuls. Soient alors :

$$u_1\ v_1\ w_1 \qquad u_2\ v_2\ w_2 \qquad u_3\ v_3\ w_3.$$

trois solutions du système proposé ; d'après les relations (2) on aura une nouvelle solution en posant :

$$\begin{aligned} u &= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 \\ v &= C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 \\ w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 \end{aligned}$$

$C_1, C_2, C_3$ étant des constantes quelconques. – Ces expressions (3) contenan[t] trois constantes arbitraires, il y a lieu de penser qu'on aura ainsi la solution générale ; cherchons sous quelles conditions il en sera ainsi.

Soit $x_0$ une valeur déterminée quelconque attribuée à $x$ ; pour q[ue] la solution (3) soit l'intégrale générale, il faut que l'on puisse dispose[r] de $C_1, C_2\, C_3$ de telle sorte que $u, v, w$ prennent des valeurs arbitraires $a, b, c$ pour $x = x_0$, il faut pour cela que le déterminant

(4) $$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

soit différent de 0 pour $x = x_0$ et comme $x_0$ est l'une quelconque des vale[urs] pour lesquelles les intégrales sont supposées exister il faut qu'on ait pour toutes ces valeurs :

(5) $$D \neq 0$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Supposons la en effet re[m]plie et considérons les équations

$$(6)\qquad \begin{aligned} u_1\lambda(x)+u_2\mu(x)+u_3\theta(x)&=U\\ v_1\lambda(x)+v_2\mu(x)+v_3\theta(x)&=V\\ w_1\lambda(x)+w_2\mu(x)+w_3\theta(x)&=W \end{aligned}$$

elles seront, dans le champ considéré, resolubles par rapport à $\lambda, \mu, \theta$ ; supposons que $U, V, W$ soit une solution quelconque du système proposé si nous faisons la substitution dans l'une quelconque de nos équations ; par exemple dans la première, nous aurons :

$$\lambda\ F_1(u_1 v_1 w_1)+\mu F_1(u_2 v_2 w_2)+\theta F_1(u_3 v_3 w_3)+u_1\frac{d\lambda}{dx}+u_2\frac{d\mu}{dx}+u_3\frac{d\theta}{dx}=0$$

Donc les fonctions $\lambda, \mu, \theta$ seront déterminées par les conditions

$$\begin{aligned} u_1\lambda'+u_2\mu'+u_3\theta'&=0\\ v_1\lambda'+v_2\mu'+v_3\theta'&=0\\ w_1\lambda'+w_2\mu'+w_3\theta'&=0 \end{aligned}$$

et comme le déterminant de ces équations n'est pas nul, elles n'admettent d'autre solution que $\lambda'=\mu'=\theta'=0$. Donc $\lambda \mu \nu$ doivent être constants et les formules (6) ne sont qu'un cas particulier des formules (3) qui par suite donnent bien l'intégrale générale.

– D'après cela l'intégration se trouve ramenée à la recherche de trois solutions dont le déterminant ne soit pas nul, nous dirons plus rapidement que ces solutions sont distinctes.

**III – Coéfficients constants** – L'intégration peut être conduite jusqu'au bout quand les coefficients sont constants. Considérons le système

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx}+a_1 u+b_1 v+c_1 w&=0\\ \frac{dv}{dx}+a_2 u+b_2 v+c_2 w&=0\\ \frac{dw}{dx}+a_3 u+b_3 v+c_3 w&=0 \end{aligned}$$

où les coefficients sont constants, cherchons à le vérifier par une solution de la forme :

$$(8)\qquad u=\alpha e^{rx}\qquad v=\beta e^{rx}\qquad w=\gamma e^{rx}$$

$\alpha, \beta, \gamma, r$ étant des constantes, on aura en supprimant le facteur $e^{rx}$ :

$$(9)\qquad \begin{aligned} &(a_1+r)\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0\\ &a_2\alpha + (b_2+r)\beta + c_2\gamma = 0\\ &a_3\alpha + b_3\beta + (c_3+r)\gamma = 0 \end{aligned}$$

Si on laisse de côté la solution évidente et inutile $u = v = w = 0$, on doit supposer que $\alpha, \beta, \gamma$ ne sont pas nuls ensemble ; dès lors $r$ doit être une racine de l'équation :

$$(10)\qquad f(r) = \begin{vmatrix} a_1+r & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_1+r & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+r \end{vmatrix} = 0$$

Si cette condition est vérifiée les équations (9) se réduiront à deux et fourniront des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma$, proportionnels à un système de mineurs du déterminant $f(r)$, chaque racine de l'équation conduira donc à une solution du système (7)

Désignons par $A_1 B_1 C_1$ $A_2 \dots C_3$ les mineurs de $f(r)$, une au moins des lignes est formée trois mineurs qui ne sont pas tous nuls, supposons que ce soit la première et faisons la substitution

$$(11)\qquad u = A_1 e^{rx} \qquad v = B_1 e^{rx} \qquad w = C_1 e^{rx}$$

on voit immédiatement que les deux dernières des équations (7) seront vérifiées quelque soit $r$, quant à la première elle ne le sera que si $r$ est racine de l'équation (10) car on a :

$$F_1\,(A_1 e^{rx}, B_1 e^{rx}, C_1 e^{rx}) = e^{rx}\, f(r)$$

Si $r$ est racine simple de $f(r) = 0$, on aura une solution (11) du système proposé.. Supposons $r$ racine double de $f(r) = 0$. Si nous différentions l'identité précédente, nous aurons, d'après la dernière des relations (9) le même résultat qu'en substituant les dérivés des valeurs (11) prises par rapport à $r$ et ce résultat sera :

$$e^{rx}\,[\,f(r) + x\,f'(r)]$$

Il sera nul puisque $r$ est une racine double. De même si $r$ était racine triple, on aurait une nouvelle solution en différentiant une seconde fois la solution (11) par rapport à $r$ et ainsi de suite, s'il s'agissait d'un nombre quelconque d'équations.

D'après cela chaque racine de l'équation (10) fournira autant

de systèmes de solutions qu'il y aura d'unités dans son degré de multiplicité.

Il resterait à démontrer que les trois solutions obtenues sont distinctes; on peut éviter cette démonstration en reprenant la question par une autre méthode.

IV. Méthode de Cauchy.. Cherchons à vérifier les équations (7) par une solution de la forme

$$(12)\qquad \begin{aligned} u &= \int_{(c)} \frac{A_1\varphi(z)+A_2\psi(z)+A_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \\ v &= \int_{(c)} \frac{B_1\varphi(z)+B_2\psi(z)+B_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \\ w &= \int_{(c)} \frac{C_1\varphi(z)+C_2\psi(z)+C_3\chi(z)}{f(z)}\, e^{zx}dz \end{aligned}$$

le contour $C$ étant un contour fermé quelconque, et $\varphi, \psi, \chi$ des fonctions convenablement choisies. Nous aurons en substituant ces valeurs:

$$F_1 = \int \frac{e^{zx}}{f(z)}\left[\varphi(A_1(a_1+z)+B_1b_1+b_1c_1]+\psi[A_2(a_1+z)+B_2b_1+C_2c_1]+\cdots\right]dz = \int e^{zx}\varphi(z)\,dz$$

$$F_2 = \int e^{zx}\,\psi(z)\,dz$$

$$F_3 = \int e^{zx}\,\chi(z)\,dz$$

Ces intégrales seront nulles si $\varphi, \chi, \psi$ sont des fonctions entières quelconques; le plus simple est de les prendre égales à trois constantes arbitraires et les formules (12) fourniront alors une solution des équations proposées.

Les fonctions sous le signe auront pour pôles les racines de l'équation (10) et si l'on suppose que $(C)$ entoure toutes ces racines, les intégrales se calculeront comme étant la somme des résidus correspondants, on retrouve ainsi sans difficulté la solution que nous avons donnée plus haut, mais l'avantage de la méthode actuelle est de nous permettre de démontrer que l'on a ainsi la solution la plus générale.

Il suffit en effet de faire voir que pour $x=0$ les seconds membres des équations (12 peuvent prendre des valeurs arbitraires. Or la première, par exemple, se réduit à:

$$\int \frac{A_1\varphi + A_2\psi + A_3\chi}{f(z)}\, dz$$

On a d'ailleurs:

$$A_1\varphi + A_2\psi + A_3\chi = \begin{vmatrix} \varphi & b_1 & c_1 \\ \psi & b_2+z & c_2 \\ \chi & b_3 & c_3+z \end{vmatrix} = \varphi.z^2+mz+n \qquad f(z)=z^3+\cdots$$

d'où:

$$\int_{(C)} \frac{A_1\varphi+A_2\psi+A_3\chi}{f(z)}\, dz = 2i\pi.\varphi.$$

On aurait de même $2i\pi\psi$, $2i\pi\chi$ pour les autres valeurs initiales ; pour qu'elles aient des valeurs données $u_0$ $v_0$ $w_0$ il suffira donc de prendre.

$$\varphi = \frac{u_0}{2i\pi} \quad \psi = \frac{v_0}{2i\pi} \quad \chi = \frac{w_0}{2i\pi}$$

V. Exemples. Soit d'abord le système :

$$\frac{du}{dx} - 3u + 8v - 4w = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + u - 5v + 2w = 0$$

$$\frac{dw}{dx} + 3u + 14v + 6w = 0$$

On a ici

$$f(r) = \begin{vmatrix} r-3 & 8 & -4 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & -14 & r+6 \end{vmatrix} = (r-1)(r+1)(r-2)$$

$$A_1 = r^2 + r - 2 \qquad B_1 = -r \qquad C_1 = 1 - 3r$$

On peut former le tableau suivant :

| $r$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 | -2 | $u_1 = 0$ | $v_1 = e^{x}$ | $w_1 = 2e^{x}$ |
| -1 | -2 | +1 | 4 | $u_2 = -2e^{-x}$ | $v_2 = e^{-x}$ | $w_2 = 4e^{-x}$ |
| 2 | 4 | -2 | -5 | $u_3 = 4e^{2x}$ | $v_3 = -2e^{2x}$ | $w_3 = -5e^{2x}$ |

et les intégrales générales sont :

$$u = -2C_2 e^{-x} + 4C_3 e^{2x}$$

$$v = -C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{2x}$$

$$w = -2C_1 e^{x} + 4C_2 e^{-x} - 5C_3 e^{2x}$$

Soit encore à intégrer

$$\frac{du}{dx} - 4u + 18v - 9w = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + u - 5v + 2w = 0$$

$$\frac{du}{dx} + 3u - 14v + 6w = 0$$

On a ici

$$f(r) = \begin{vmatrix} r-4 & 18 & -9 \\ 1 & r-5 & 2 \\ 3 & -14 & r+6 \end{vmatrix} = (r-1)^3 \qquad \begin{matrix} A = r^2 + r - 2 \\ B_1 = -r \\ C_1 = -3r + 1 \end{matrix}$$

On a donc à considérer ces 3 fonctions.

$$e^{rx}(r^2 + 2 - 2) \quad - re^{rx} \quad (1-3r)e^{rx}$$

et leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport à $r$, ce qui donne :

$$e^{rx}[2r+1+x(r^2+r-2)] \qquad e^{rx}(-1-rx) \qquad e^{rx}[-3+x(1-3r)]$$

$$e^{rx}[2+r(2r+1)x+x^2(r^2+r-2)] \qquad e^{rx}(-2x-rx^2) \qquad e^{rx}[-6x+x^2(1-3r)]\ ;$$

en y faisant $r=1$ on a trois intégrales particulières :

$$u_1 = 0 \qquad v_1 = e^x \qquad w_1 = -2e^x$$
$$u_2 = 3e^x \qquad v_2 = -(1+x)e^x \qquad w_2 = -(3+2x)e^x$$
$$u_3 = (2+6x)e^x \qquad v_3 = -(2x+x^2)e^x \qquad w_3 = -(6x+2x^2)e^x$$

et on en déduit pour la solution générale :

$$u = 3C_2 e^x + 2C_3(1+3x)e^x$$
$$v = -C_1 e^x - C_2(1+x)e^x - C_3 x(x+2)e^x$$
$$w = -2C_1 e^x - C_2(3+2x)e^x - 2C_3(3x+x^2)e^x .$$

**VI - Cas où il y a des seconds membres** - Revenons au cas général où les coefficients sont des fonctions de $x$ et où les seconds membres $g_1, g_2, g_3$ ne sont pas nuls. Supposons qu'on connaisse une intégrale particulière $u_1, v_1, w_1$ du système donné et faisons la substitution :

$$u = u_1 + U \qquad v = v_1 + V \qquad w = w_1 + W ;$$

l'une quelconque des équations (1) prendra la forme :

$$F(U, V, W) + F(u_1, v_1, w_1) = g$$

et le système se réduira par suite à

$$F_1(U,V,W) = 0 \qquad F_2(U,V,W) = 0 \qquad F_3(U,V,W) = 0$$

d'où le théorème suivant :

**Théorème** - Quand on connait une solution particulière, il suffit, pour avoir la solution générale, de l'ajouter à l'intégrale générale du système sans seconds membres

On sera ainsi ramené à intégrer le système sans seconds membres ; je dis maintenant que, si on peut en obtenir l'intégrale générale, on en pourra déduire une intégrale particulière du système complet et par suite achever l'intégration.

En effet la solution générale du système sans seconds membres est de la forme :

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3$$
$$v = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3$$
$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3$$

avec la condition.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & w_3 \\ w_1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Essayons alors de vérifier les équations proposées en posant :

$$u = u_1\varphi(x) + u_2\Psi(x) + u_3\chi(x)$$
$$v = v_1\varphi(x + v_2\Psi(x) + v_3\chi(x)$$
$$w = w_1\varphi(x + w_2\Psi(x) + w_3\chi(x)$$

$\varphi, \Psi, X$ étant des fonctions convenablement choisies ; nous obtenons ainsi directement les équations de condition :

$$u_1\varphi' + u_2\Psi' + u_3X' + \varphi F(u_1 v_1 w_1) + \Psi F(u_2 . v_2 . w_2) + X F(u_3 . v_3 . w_3) = g_1$$

qui se réduisent

$$u_1\varphi' + u_2\Psi' + u_3X' = g_1$$
$$v_1\varphi' + v_2\Psi' + v_3X' = g_2$$
$$w_1\varphi' + w_2\Psi' + w_3X' = g_3$$

Ces équations dont le déterminant n'est pas nul, sont résolubles par rapport à $\varphi', \Psi', X'$ et donnent trois valeurs de la forme :

$$\varphi' = \Phi(x) \qquad \Psi' = \Psi(x) \qquad X' = X(x)$$

D'où l'on tire

$$\varphi = \int \Phi(x)\,dx \qquad \Psi = \int \Psi(x)\,dx \qquad X = \int X(x)\,dx$$

en substituant ces valeurs dans les formules (13) on aura une solution particulière des équations données, et même la solution la plus générale, si on ne fixe pas les limites inférieures des intégrales précédentes.

# Treizième Leçon.

## Équations aux dérivées partielles.

I – Réduction à un système d'équations linéaires du 1er ordre. – Tout système d'équations où figurent des variables indépendantes, des fonctions de ces variables et les dérivées partielles d'ordre quelconque de ces fonctions peut être ramené, en introduisant de nouvelles fonctions et de nouvelles équations, à un système où ne figurent que des dérivées du 1er ordre, exactement comme cela a lieu pour des équations différentielles ordinaires

Si les équations données, comme cela a lieu en général, sont complétées par certaines conditions initiales imposées aux fonctions inconnues et à certaines de leurs dérivées, il est clair que le système du 1er ordre auquel on aboutira, sera lui-même complété par des conditions initiales auxquelles devront satisfaire non seulement les fonctions qui figuraient dans le système primitif, mais encore les fonctions auxiliaires introduites par la transformation.

On peut même, comme nous allons le voir, donner au système du 1er ordre une forme très particulière. – Soient en effet $x, y, z, t$, les variables indépendantes, $u, v, w$, les fonctions inconnues et

$$(1) \qquad H\left(x, y, z, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0$$

l'une des équations données. Introduisons les fonctions $p, q, r$ définies par les équations

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = p \quad \frac{\partial v}{\partial t} = q \quad \frac{\partial w}{\partial t} = r.$$

Les équations (1) deviendront:

$$H\left(x.y.z.t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, p, \ldots \frac{\partial w}{\partial z}, r\right) = 0.$$

Or, si nous les différentions, sous cette forme, par rapport à $t$, nous obtiendrons un système qui ne sera pas plus général que le précédent, pourvu que nous assujettissions ses solutions à coïncider avec $u, v, w, p, q, r$, pour une valeur particulière $t_0$ de la variable de $t$. On aura alors substitué aux équations (1) les suivantes:

$$(3) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \qquad = 0$$

Le système proposé est donc remplacé par celui que forment les équations (1) et (3) ce dernier est du 1[er] ordre et linéaire par rapport aux dérivées partielles.

II - Intégrales du système linéaire. — Supposons les équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et résolues par rapport aux dérivées partielles relatives à une même variable, soit en d'autres termes, un système de la forme suivante:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z} + D \frac{\partial v}{\partial x} + E \frac{\partial v}{\partial y} + \qquad + G \frac{\partial w}{\partial z} + K \\ \frac{\partial v}{\partial t} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \qquad + G_1 \frac{\partial w}{\partial z} + K_1 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \qquad + G_2 \frac{\partial w}{\partial z} + K_2 \end{cases}$$

Pour simplifier le langage nous supposons nulles toutes les valeurs initiales des variables et des fonctions. Les fonctions $A B C \ldots K_2$ sont supposées holomorphes par rapport à toutes les variables qui y figurent tant que le module de chacune d'elles est inférieur à un nombre fixe $R$.

Pour compléter le système (4) nous nous donnerons trois fonctions $\lambda, \mu, \theta$, dépendant des seules variables $x, y, z$, s'annulant pour $x = y = z = 0$, et holomorphes tant que ces variables ont un module inférieur à un nombre fixe $r$, au plus égal à $R$; nous assujettirons les fonctions $u, v, w$ à se réduire pour $t = 0$ à $\lambda, \mu, \theta$, respectivement: en d'autres termes nous donnerons comme conditions initiales.

$$(5) \qquad u_0 = \lambda(x,y,z) \quad v_0 = \mu(x,y,z) \quad w_0 = \theta(x,y,z).$$

Ceci posé, l'existence des intégrales du système (4),(5) résulte du théorème suivant, dû à Cauchy.

Théorème: Il existe trois fonctions de $x, y, z, t$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° Elles se réduisent pour $t=0$ à $\lambda, \mu, \theta$, respectivement.

2° Elles s'annulent en même temps que les variables et sont holomorphes tant que les 4 variables conservent un module inférieur à un nombre fixe $r$.

3° Pour ces mêmes valeurs de $x. y. z. t$ elles vérifient identiquement les équations (4)

**Remarques.** — Il est facile de faire en sorte que le système donné soit, non seulement linéaire mais homogène ; il suffit d'ajouter au système donné les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad f_0 = x$$

et de multiplier $u$, $k$, $k_2$ par $\frac{\partial u}{\partial x}$ ; car la fonction auxiliaire $f$. se réduit évidemment à $x$.
On peut aussi faire disparaître les variables indépendantes des fonctions $A$, $B$, ...
Par exemple on fera disparaître $x$ en introduisant les équations :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \varphi_0 = x.$$

On ferait disparaître $t$ en introduisant une fonction $\psi$ définie par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 1 \qquad \psi_0 = 0$$

En résumé on peut faire en sorte que le système à intégrer soit du 1^er^ ordre, linéaire et homogène, et que les coefficients dépendent seulement des fonctions inconnues et nullement des variables indépendantes.

**III. — Démonstration du Théorème de Cauchy.** — La démonstration, analogue à celle de Briot et Bouquet pour les équations différentielles, est due à M^me^ Kowaleski ; nous l'exposerons rapidement en laissant de côté les détails de calcul qui sont identiques dans les deux démonstrations.

Considérons donc le système (4). $A. B. C. — G, k_2$ étant supposés dépendre seulement de fonctions inconnues $u. v. w$.

1° S'il existe une solution holomorphe répondant à la question, cette solution est unique et les développements en séries entières des fonctions inconnues peuvent être formés à priori ; il suffit en effet, pour cela, de savoir calculer pour $x=y=z=t=0$ les dérivées partielles des divers ordres de $u. v. w$. Or soit $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta}$ ;

Si $\delta = 0$, cette dérivée se réduira, pour des valeurs nulles des variables, à $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \lambda}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0$ ;

elle est donc connue à priori. Si $\delta \neq 0$, il suffira de différentier toutes les équations données $\alpha$ fois par rapport à $x$, $\beta$ fois par rapport à $y$, $\gamma$ fois par rapport à $z$, $\delta-1$ fois par rapport à $t$ et on pourra de proche en proche avoir toutes les dérivées pour $t=0$ jusqu'à l'ordre $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ inclusivement. — Nous désignerons par (S) les séries ainsi obtenues.

2° — Pour que le théorème de Cauchy soit exact il faut que dans des cercles de rayons $\rho$ non nul, les séries (S) soient convergentes ; cette condition est d'ailleurs suffisante, on le voit exactement comme pour les

équations différentielles.

3°. Les fonctions $A_i$. $B_j$. $C_k$. conservent, quand $u$. $v$, $w$, ont un module moindre que $R$, un module inférieur à un nombre fixe $M$ ; de même $\lambda, \mu, \theta$, sont inférieurs en module, à un nombre fixe $N$, quand $x$. $y$. $z$ sont inférieurs à $\tau$ ; si on forme les deux fonctions :

$$H = \frac{M}{1 - \frac{u+v+w}{R}} \qquad L = \frac{N}{1 - \frac{x+y+z}{\tau}} - N$$

dont la seconde est composée de manière à s'annuler avec $x$. $y$. $z$, ces deux fonctions seront majorantes la première par rapport aux coefficients $A$, $B$..., la seconde par rapport à $\lambda, \mu, \theta$. — Nous disons qu'une fonction $F$ est majorante par rapport à une autre $\Phi$ dépendant de mêmes variables, lorsque l'on a, quels que soient les indices.

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta+\delta} \Phi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \dots} \right|_0 < \left( \frac{\partial^{\alpha+\beta+\delta} F}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\delta \dots} \right)_0$$

4°. Remplaçons dans (4) (5) toutes les fonctions $A$ $B$ $C$.. par $H, \lambda, \mu, \theta$ par $L$ ; nous formerons un système :

$$(4') \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = H \left[ \frac{\partial (u+v+w)}{\partial x} + \frac{\partial (u+v+w)}{\partial y} + \frac{\partial (u+v+w)}{\partial z} \right]$$

$$(5') \qquad u_0 = v_0 = w_0 = L$$

De ce système on pourra déduire trois séries $S'$ et on voit immédiatement que si ces séries sont convergentes dans des cercles de rayon $\rho$, il en sera de même à fortiori, des Series $S$. Tout revient donc à établir l'existence de ce rayon $\rho$ pour les séries ($S'$). — Pour cela nous allons intégrer le système (4') (5').

On a d'abord $u = v$, car la différence $u - v$ ne dépend pas de $t$ et comme elle doit être nulle pour $t = 0$, elle est identiquement nulle, on a de même $u = w$ ; en d'autres termes les trois fonctions inconnues se réduisent à une seule $\omega$ donnée par les conditions.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{3M}{1 - \frac{3\omega}{R}} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right),$$

$$\omega_0 = \frac{N \cdot s}{\tau \cdot s} \qquad (x + y + z = s)$$

Essayons une solution de la forme $\omega = P(s.t)$, $P$ devra satisfaire aux équations :

$$(6) \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{9M}{1 - \frac{3P}{R}} \cdot \frac{\partial P}{\partial s}. \qquad P(s,o) = \frac{Ns}{\tau - s}$$

Or si nous posons :

$$Q = 9Mt + \left(1 - \frac{3P}{R}\right) s,$$

on voit immédiatement que la première des équations (6) peut s'écrire :

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

Il faut donc que $Q$ soit une fonction de $P$ et l'on aura :

$$9Mt + \left(1 - \frac{3P}{R}\right)s = F'(P)$$

Si on fait $t = 0$, on doit avoir simultanément :

$$P_0 = \frac{NS}{\tau - s} \qquad \left(1 - \frac{3P_0}{R}\right)s = F(P_0)$$

Eliminant $s$

$$F'(P_0) = \left(1 - \frac{3P_0}{R}\right)\frac{\tau P_0}{N + P_0}$$

On aura donc en définitive pour déterminer $P$ :

$$\left(1 - \frac{3P}{R}\right)\frac{\tau P}{N+P} = 9Mt + s\left(1 - \frac{3P}{R}\right)$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{3P}{R}\right)\left[(\tau - s)P - Ns\right] - 9Mt(N+P) = 0$$

Cette équation du 2e degré a une racine qui se réduit à $\frac{NS}{\tau - s}$ pour $t = 0$; cette racine s'annule d'ailleurs pour $t = 0$, $x = y = z = 0$; puisqu'alors $s = 0$ et que les deux racines de l'équation précédente sont distinctes, $0$ et $\frac{R}{3}$ cette racine est holomorphe dans les environs des valeurs 0. – Elle est donc développable en série entière pour toutes les valeurs de $s$, $t$ inférieures en module à un nombre déterminé $4\rho$; donc enfin le système (4')(5') admet une intégrale satisfaisant aux conditions de l'énoncé et holomorphe quand chacune des variables a un module $< \rho$.

Dès lors la série $\underline{S'}$ est convergente pour les valeurs considérées de $x, y, z, t$, il en est de même a fortiori des séries $\underline{S}$ et le théorème de Cauchy est complètement démontré.

IV – Sur les équations différentielles du 1er ordre. – De la proposition générale que nous venons d'établir, Mr Picard a déduit une démonstration très simple et très élégante d'un théorème fondamental concernant les équations différentielles du 1er ordre; voici cette démonstration que nous avons dû ajourner jusqu'à présent.

Soit le système :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{du_1}{dz} &= f_1(z, u, u_2 \ldots u_n) \\ \frac{du_2}{dz} &= f_2(z, u, u_2 \ldots u_n) \\ \frac{du_n}{dz} &= f_n(z, u, u_1 \ldots u_n) \end{aligned}$$

Les $f$ sont supposés holomorphes pour des valeurs de petit module de $z, u_1, u_2 \ldots u_n$. Supposons qu'on en connaisse une solution <u>quelconque</u>.

$$(8) \qquad u_1 = \lambda_1(z) \qquad u_2 = \lambda_2(z) \qquad u_n = \lambda_n(z) \qquad [\lambda_i(0) = 0]$$

c'est-à-dire que les fonctions $\lambda$ sont supposées définies, continues et dérivables le long d'une ligne C aboutissant au point 0 dans le plan des $z$. Il s'agit d'établir que ces fonctions se raccordent le long de cette ligne (C) avec un système de fonctions holomorphes, système qui coïncidera ~~nécessairement~~ avec l'intégrale fournie par le théorème de Cauchy. (IIIe Partie, page 13.)

Pour le faire voir, considérons l'équation :

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + f_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial u_2} \qquad\qquad + f_n \frac{\partial F}{\partial u_n} = 0 \;;$$

elle est exactement de la forme de celle que nous venons d'étudier. — Donnons-nous un système de fonctions

$$H_1 (u_1 u_2 \dots u_n), \qquad H_2 (u_1 u_2 \dots u_n), \dots\dots\dots H_n (u_1 u_2 \dots u_n)$$

holomorphes, s'annulant avec les $u$ et satisfaisant à la condition :

$$\left[\frac{\partial (H_1 H_2 \dots H_n)}{\partial (u_1 u_2 \dots u_n)}\right]_0 \neq 0 .$$

Il existera $n$ solutions de l'équation (9), holomorphes et se réduisant à $H_1, H_2, \dots H_n$ respectivement, pour $z = 0$. Soient :

$$F_1 (z, u_1 u_2 \dots u_n), \quad F_2 (z, u_1 u_2 \dots u_n) \dots\dots F_n (z, u_1 u_2 \dots u_n),$$

ces solutions. Si nous substituons dans $F_i$ les $\lambda$ aux $\underline{u}$, nous aurons des fonctions $\varphi_i$ de $z$ et l'on aura le long de (C) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = \frac{\partial F_i}{\partial z} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} + \dots\dots + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{dz}$$

ou, encore, puisque les $\lambda$ vérifient le système (7) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = \frac{\partial F_i}{\partial z} + f_1 \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_1} + \dots\dots + f_n \frac{\partial F_i}{\partial \lambda_n} .$$

ou enfin, puisque $F_i$ vérifie l'équation (9) :

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = 0 \qquad \varphi_i = \text{const.}$$

Mais $\varphi_i$ s'annule pour $z = 0$ d'après la construction des fonctions $F_i$. — Donc on a le long de (C)

$$(10) \quad F_1 (z, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = 0, \quad F_2 (z, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = 0, \qquad F_n (z, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = 0$$

Ces équations (10) ont leurs premiers membres holomorphes pour de petites valeurs de $z, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, et satisfont pour $z=0$ aux conditions :

$$F_i\ (0, 0 \qquad 0) = 0 \qquad \left|\frac{D(F_1, F_2 \dots F_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)}\right| \neq 0$$

Donc elles définissent bien un système de fonctions holomorphes se raccordant avec les $\lambda$ le long de la courbe $(C)$. ( Voir IIIe Partie - Page 7 ).

# Quatorzième Leçon

## Intégration des Équations du 1er ordre.

**I_ Équation linéaire** — Une équation du premier ordre est de la forme :

$$f\ (z, x_1\, x_2 \dots x_n, p_1\, p_2 \dots p_n) = 0$$

$x_1\, x_2 \dots x_n$ étant des variables indépendantes, $z$ une fonction de ces variables et $p_i$ désignant la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ; intégrer une telle équation c'est ramener la recherche de ses solutions à un système d'équations différentielles ordinaires. Nous considérerons d'abord le cas où l'équation est linéaire par rapport aux dérivées, c'est à dire de la forme :

$$(1) \qquad P_1 p_1 + P_2 p_2 \ \dots\dots + P_n p_n = P$$

Dans ce cas, la réduction dont nous venons de parler résulte immédiatement de ce que nous avons vu dans la 8e Leçon (page 59).

En effet si nous désignons par :

$$F\ (z, x_1\, x_2 \dots x_n) = 0$$

une intégrale et que nous prenions pour inconnue la fonction $F$, qui dépend alors de $n+1$ variables nous aurons :

$$p_i = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

et l'équation (1) deviendra :

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots\dots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + P \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

elle est de la même forme mais sans second membre ; or nous avons vu que si

l'on intègre le système:

$$(3) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P}.$$

et qu'on résolve les intégrales par rapport aux $\underline{n}$ constantes arbitraires de sorte qu'on ait:

$$\lambda_1(x_1 x_2 \dots x_n z) = C_1, \qquad \lambda_2(x_1 x_2 \dots x_n z) = C_2, \quad \dots \quad \lambda_n(x_1 x_2 \;\; x_n z) = C_n$$

l'intégrale générale de l'équation (2) sera une relation arbitraire entre $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

Ainsi, pour avoir l'intégrale générale de l'équation (1), on formera l'intégrale générale du système (3); on établira une relation arbitraire entre les $\underline{n}$ constantes que contient cette intégrale et on éliminera toutes les constantes entre les $n+1$ équations dans lesquelles elles figureront.

Nous pouvons prendre pour constantes arbitraires les valeurs $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \gamma$ que prennent $x_2 x_3 \dots x_n, z$ pour une valeur donnée $\alpha_1$ de $x_1$. Les intégrales sont alors de la forme:

$$(4) \quad x_2 = \xi_2(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \gamma), \quad x_3 = \xi_3(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \gamma) \qquad x_n = \xi_n(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \quad z = \xi(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \gamma)$$

Supposons que $z$ doive se réduire pour $x_1 = \alpha_1$, à une fonction donnée $\varphi(x_2 x_3 \dots x_n)$ des autres variables, la relation à établir entre les constantes sera alors:

$$(5) \qquad \gamma = \varphi(x_2 x_3 \dots x_n)$$

L'élimination de $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \gamma$ entre les relations (4) et (5) fournirait une intégrale de l'équation (1) et cette intégrale est précisément celle qui correspond au théorème général de Cauchy.

**II _ Applications** _ 1°_ Surfaces cylindriques _ Si on définit une surface cylindrique comme celle dont la normale est parallèle à un plan fixe, l'équation aux dérivées partielles de cette surface est:

$$ap + bq = c$$

$a, b, c$ étant trois constantes, $p, q$ les dérivées de $z$ par rapport à $x$ et à $y$.

Cette équation est linéaire; le système:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$$

a pour intégrale générale:

$$cx - az = \text{const.} \qquad cy - bz = \text{const.}$$

l'équation générale des surfaces cylindriques est donc:

$$F(cx - az,\ cy - bz) = 0$$

2°. — Surfaces coniques — Cherchons les surfaces dont le plan tangent passe par un point fixe $x_0\, y_0\, z_0$ ; leur équation aux dérivées partielles sera :

$$z_0 - z = p(x_0 - x) + q\,(y_0 - y)$$

on est donc conduit à intégrer le système :

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = \frac{dz}{z - z_0} ;$$

il a pour intégrales :

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \text{const.} \qquad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \text{const.},$$

l'intégrale générale s'obtiendra donc en écrivant une relation homogène quelconque entre les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

3°. — Surfaces de révolution. — Cherchons encore les surfaces dont la normale rencontre une droite fixe. Si la droite fixe a pour équations :

$$\frac{X - x_0}{a} = \frac{Y - y_0}{b} = \frac{Z - z_0}{c}$$

l'équation des surfaces considérées est :

$$p\left[b(z - z_0) - c\,(y - y_0)\right] + q\left[c(x - x_0) - a(z - z_0)\right] = a(y - y_0) - b(x - x_0)$$

Le système à intégrer est alors :

$$\frac{dx}{b(z - z_0) - c(y - y_0)} = \frac{dy}{c(x - x_0) - a\,(z - z_0)} = \frac{dz}{a\,(y - y_0) - b\,(x - x_0)} .$$

On en déduit les deux équations :

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0$$

$$(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy + (z - z_0)\,dz = 0$$

qui s'intègrent immédiatement et donnent :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c\,(z - z_0) = \beta ,$$

$\alpha$, $\beta$ étant deux constantes arbitraires. On retrouve ainsi l'équation connue

des surfaces de révolution.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=F(ax+by+cz).$$

Remarque — Observons que ce procédé d'intégration fournit dans chaque cas un mode de génération de la surface trouvée ; les intégrales du système différentiel font connaître les équations de la génératrice.

4° — Théorème des fonctions homogènes — D'après le théorème d'Euler si $z$ est homogène et de degré $\underline{m}$ par rapport aux variables $x_1, x_2 \dots x_n$ on a la relation :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = mz$$

en intégrant cette équation, nous reconnaîtrons sans peine que les fonctions homogènes jouissent seules de cette propriété. Le système à intégrer est en effet :

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}= \qquad =\frac{dx_n}{x_n}=\frac{dz}{mz}$$

il admet évidemment pour intégrale générale :

$$\frac{x_2}{x_1}=\alpha_2 \quad \frac{x_3}{x_1}=\alpha_3 \qquad \frac{x_n}{x_1}=\alpha_n \quad \frac{z}{x_1^m}=\alpha_1$$

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ étant des constantes arbitraires. On a donc pour la fonction $z$ la plus générale répondant à la question :

$$z = x_1^m \; F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \dots \frac{x_n}{x_1}\right)$$

## III — Équations non linéaires du premier ordre

— Soit maintenant l'équation générale :

$$(1) \qquad f(z, x_1, x_2 \dots x_n, p_1 p_2 \dots p_n)=0$$

où $p_i$ désigne toujours la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ; nous représenterons par $X_i$ les dérivées du premier membre $\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial f}{\partial p_j}$.

Une intégrale quelconque est une équation de la forme :

$$(2) \qquad z = F\,(x_1 x_2 \dots x_n)$$

telle que l'on ait identiquement :

$$f\left(F, x_1 x_2 \dots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=0$$

Mais on peut envisager la question à un point de vue plus large. Supposons qu'on se donne, sur une intégrale particulière, les valeurs de $x_1, x_2 \dots x_n$ ; on en

déduira les valeurs correspondantes de $z, p_1 p_2 \dots p_n$ ; l'ensemble de ces $(2n+1)$ quantités $x_i, z, p_j$ forme ce qu'on appelle un élément de l'intégrale ; l'intégrale est alors constituée par l'ensemble de $n+1$ fonctions simultanées $z, p_1 p_2 \dots p_n$ des variables $x_1 x_2 \dots x_n$, satisfaisant identiquement, d'abord à l'équation (1), et en outre aux $n$ équations de conditions :

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1 \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2 \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

Si maintenant nous faisons un changement de variables, nous pourrons définir l'intégrale de la manière suivante : une intégrale sera formée de $2n+1$ fonctions $x_i, z, p_j$ de $n$ variables indépendantes $t, t_1, t_2 \dots t_{n-1}$ vérifiant identiquement l'équation (1) et en outre l'équation aux différentielles totales :

$$(4) \qquad \delta z = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \dots + p_n \delta x_n$$

Cette définition est, comme nous le verrons plus loin plus générale que la première. Elle est due à M.r Sophus Lie.

Ceci posé, partons d'un élément de l'intégrale, en cet élément, les valeurs de $x_i, z, p_j$ sont connues et il en est de même pour toute fonction donnée de ces quantités ; si on donne aux $x$ des accroissements $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, la nécessité de rester sur l'intégrale imposera des accroissements déterminés à $z, p_1 p_2 \dots p_n$ ; la méthode que nous allons suivre (méthode des caractéristiques ou méthode de Monge) consiste à choisir les accroissements arbitraires $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ de telle sorte que les $n+1$ autres accroissements puissent s'en déduire par un calcul indépendant de l'intégrale considérée.

Il suffit pour cela, comme nous allons le voir, de donner aux $x$ des accroissements proportionnels aux valeurs des fonctions $P_1 P_2 \dots P_n$ ; c'est à dire tels qu'on ait :

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \qquad = \frac{dx_n}{P_n}.$$

En effet, sur toute intégrale on a identiquement :

$$X_i + Zp_i + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + P_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} \qquad + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$X_i + Zp_i + P_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial p_i}{\partial x_2} \qquad + P_n \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0$$

Si nous considérons en particulier le déplacement (5) cette identité donnera, $dt$ étant la valeur commune des rapports (5)

$$(X_i + Zp_i)\, dt + \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial p_i}{\partial x_2} dx_2 \qquad + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx = 0$$

ou simplement :

$$(6) \qquad dp_i = -(X_i + Z p_i)\, dt$$

équation qui détermine $dp_1, dp_2 \quad dp_n$ ; d'autre part on a évidemment :

$$(7) \qquad dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 \quad + p_n\, dx_n = (P_1 p_1 + P_2 p_2 \quad + P_n p_n)\, dt,$$

ce qui détermine $dz$. – En résumé, un système de variations simultanées de $x_i, z, p_i$, sera donné par les équations :

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \quad = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \frac{-dp_2}{X_2 + p_2 Z} \quad = \frac{dz}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n} = dt$$

La suite d'éléments définie par ces relations est ce qu'on appelle une caractéristique. De ce que les équations (8) peuvent être obtenues à l'aide de la seule équation (1) et indépendamment de telle ou telle intégrale particulière, on conclut que deux intégrales qui ont en commun un élément, ont en commun tous les éléments dont la succession forme la caractéristique correspondante.

Comme d'ailleurs, par tout élément d'intégrale passe une caractéristique on voit qu'on est amené à la solution suivante : On cherchera la solution générale des équations (8) c'est à dire l'expression analytique de toutes les caractéristiques, cette expression contiendra, outre la variable $t$, $2n+1$ paramètres qui seront les valeurs de $x_i, z, p_j$ pour $t = 0$. Il suffira pour avoir une intégrale, d'associer convenablement ces caractéristiques, c'est à dire d'établir, entre les paramètres, des relations telles que les deux conditions imposées à toute intégrale soient vérifiées. Pour plus de simplicité, nous considérerons d'abord le cas de deux variables indépendantes.

## IV – Cas de deux variables indépendantes – Intégration –

Soit l'équation :

$$(9) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0$$

et posons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z \quad \frac{\partial f}{\partial p} = P \quad \frac{\partial f}{\partial q} = Q$$

Les équations (8) sont alors :

$$(10) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} = dt$$

Toute intégrale est représentée par une surface, si nous admettons, comme nous l'avons fait, que $x\, y\, z, p, q$ doivent dépendre en dernier lieu de deux variables indépendantes ; un élément est ici l'ensemble formé par un point de

la surface intégrale et le plan tangent en ce point; l'égalité des deux premiers rapports (10) définit les caractéristiques comme une famille de courbes tracées sur la surface intégrale; dire que les variations de $z, p, q$ sont déterminées par celles de $x, y$, indépendamment de toute intégrale particulière, c'est dire que deux surfaces intégrales qui se touchent en un point se raccordent tout le long de la caractéristique passant par ce point.

Toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques; la solution la plus générale du système (10) est de la forme:

$$(11) \qquad x = \varphi(x_0 y_0 z_0 p_0 q_0 t) \qquad y = \psi(x_0 y_0 z_0 p_0 q_0 t) \qquad q = \lambda(x_0 y_0 z_0 p_0 q_0 t)$$

l'indice 0 indiquant la valeur prise pour $t = 0$; si nous prenons pour $x_0, y_0, \ldots q_0$ cinq fonctions d'une autre variable $\underline{u}$; $x, y, z$ seront des fonctions de 2 variables et les caractéristiques se trouveront associées de manière à former une surface; reste à chercher comment doivent être choisies ces fonctions $x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0$ pour que cette surface soit une intégrale. Il y a pour cela deux conditions à remplir.

En premier lieu, les valeurs (11) doivent annuler identiquement $f$; or on a:

$$df = X dx + Y dy + Z dz + P dp + Q dq.$$

Si on suppose le déplacement effectué suivant la caractéristique, il vient, à cause des équations 10:

$$df = dt \left[ PX + Q + QY + Z(Pp + Qq) - (X + pZ)P - (Y + qZ)Q \right] = 0$$

Donc $f$ ne dépend pas de $t$; pour qu'il soit nul, quel que soit $t$, il faut et il suffit qu'on ait:

$$(12) \qquad f(x_0\, y_0\, z_0, p_0\, q_0) = 0$$

et moyennant cette condition, $f$ sera identiquement nul sur toute la surface, puisqu'il sera nul le long de chacune des caractéristiques.

En second lieu, on doit avoir:

$$\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$$

cette relation est évidente si on se déplace suivant la caractéristique; désignons alors par $\delta$ un déplacement quelconque, en dehors de cette courbe, $d$ représentant le déplacement suivant la caractéristique; si nous posons:

$$V = \delta z - p\,\delta x - q\,\delta y$$

nous aurons, en observant qu'on peut intervertir $d$ et $\delta$:

$$dV = \delta dz - p\,\delta dx - q\,\delta . dy - \delta x\, dp - \delta y\, dq,$$

ou :
$$dV = dt\left[\delta(Pp+Qq)-p\delta P-q\delta Q+\delta x(X+pZ)+\delta y(Y+qZ)\right]$$
$$dV = dt\left[P\delta p+Q\delta q+X\delta x+Y\delta y+Z(p\delta x+q\delta y)\right]=dt\left[\delta f-ZV\right]$$
Mais $\delta f=0$, $f$ étant identiquement nul; on aura donc :
$$dV=-ZV\,dt \qquad V=V_0 e^{-\int_0^t Z dt}$$

L'intégrale ayant évidemment une valeur finie cette condition revient à:

(13) $$\delta z_0 - p_0\,\delta x_0 - q_0\,\delta y_0 = 0.$$

En résumé, on devra remplacer dans les équations (11) $x_0\; y_0\; z_0\; p_0\; q_0$ par des fonctions de $u$ vérifiant identiquement les équations (12) et (13); si les équations (11) donnent alors, par élimination de $t, u, p, q$ une seule relation entre $x, y, z$, elles définiront une intégrale au sens ordinaire du mot; si l'élimination conduisait à deux relations entre $x, y, z$, elles définiraient une courbe qui serait une intégrale dans le sens de Lie.

Solution de Cauchy. — Si on désigne par $\varphi$ une fonction arbitraire on satisfera à la condition (13) en posant $\alpha$ étant une constante:

$$x_0=\alpha \qquad y_0=u \qquad z_0=\varphi(u) \qquad q_0=\varphi'(u)$$

$z$ se réduira alors à $\varphi(y)$ pour $x=\alpha$.

Remarque. Nous avons admis que, pour les valeurs initiales $x_0\, y_0\, z_0\, p_0\, q_0$, les dénominateurs des équations (10) étaient finis ; c'est la condition nécessaire pour que ces équations admettent une solution holomorphe dans le voisinage des valeurs initiales ; d'autre part nous devons supposer aussi que ces valeurs $x_0\, y_0 - q_0$ n'annulent pas en même temps les quatre fonctions,

$$P, \quad Q, \quad X+pZ, \quad Y+qZ,$$

Car s'il en était ainsi la seule solution de ces équations, serait :

$$x=x_0 \quad y=y_0 \quad z=z_0 \quad p=p_0 \quad q=q_0,$$

elle ne dépendrait plus de la variable $t$, contrairement à ce que nous avons supposé. On voit qu'en somme nous avons laissé de côté les intégrales qui satisferaient à la fois aux équations :

(14) $$f=0 \quad X=0 \quad Y=0 \quad Z=0 \quad P=0 \quad Q=0.$$

Il peut exister de telles solutions, qu'on appelle singulières ; on pourra toujours s'assurer, par une simple vérification, si elles existent ou non.

Par exemple dans le cas de l'équation $pq=z$, les équations (14) se réduisent

à trois : $z = pq \qquad p = 0 \qquad q = 0$

elles sont compatibles et donnent la solution singulière $z = 0$.

Prenons encore l'équation des surfaces dont la normale est constante

$$z\,(1+p^2+q^2) = l^2$$

Les équations (14) sont alors :

$$z^2\,(1+p^2+q^2) = l^2 \qquad pz^2 = 0 \qquad qz^2 = 0 \qquad pz(1+p^2+q^2) = 0 \qquad qz(1+p^2+q^2) = 0$$

elles admettent la solution :

$$p = 0 \qquad q = 0 \qquad z = \pm l$$

c'est bien une solution ; les autres solutions sont données par des surfaces canaux qui toutes sont tangentes aux deux plans qui forment la solution singulière.

V. Exemples. 1° — Prenons d'abord l'équation simple :

$$pq - z = 0$$

Équation des caractéristiques :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

On obtient aisément les intégrales :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0} = \sqrt{\frac{z}{z_0}} \qquad x - x_0 = q - q_0 \qquad y - y_0 = p - p_0$$

On aurait ici :

$$p = p_0\, e^t.$$

Si on fait :

$$x = \alpha \qquad y_0 = u \qquad z_0 = \varphi(u) \qquad q_0 = \varphi'(u) \qquad p_0 = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}.$$

l'intégrale cherchée s'obtiendra en éliminant $\underline{u}$ entre les équations :

$$x - \alpha = \left[\sqrt{\frac{z}{\varphi(u)}} - 1\right] \varphi'(u)$$

$$y = u = \left[\sqrt{\frac{z}{\varphi(u)}} - 1\right] \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}$$

Ainsi que nous l'avons vu plus haut il y a une solution singulière $z = 0$.

2° — L'équation des surfaces dont le plan tangent satisfait à une condition donnée ne dépendant pas du point de contact, est :

$$z - px - qy = f(p, q).$$

Elle correspond à l'équation de Clairaut. Les équations des caractéristiques sont ici :

$$\frac{dx}{x+\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{y+\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{px+qy+p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

On a d'abord les deux intégrales $p=p_0$, $q=q_0$ ; si on pose :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 = A \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 = B \qquad F(p_0 q_0) = C$$

on aura les autres intégrales sous la forme :

$$(15) \qquad \frac{x+A}{x_0+A} = \frac{y+B}{y_0+B} = \frac{z-C+p_0A+q_0B}{z_0-C+p_0A+qB} = e^t$$

On devra d'abord écrire :

$$(16) \qquad z-p_0x-q_0y = F(p_0q_0)$$

On peut d'abord éliminer $t$, $z_0$ ce qui donne :

$$(17) \qquad z-p_0x-q_0y = F(p_0q_0),$$

équation à laquelle nous joindrons :

$$(18) \qquad xy_0-yx_0+Bx-Ay = 0$$

D'ailleurs la condition d'integrabilité peut s'écrire :

$$(19) \qquad (x_0+A)\,\delta p_0+(y_0+B)\,\partial q_0 = 0.$$

Nous la vérifierons en posant :

$$\delta p_0 = 0 \qquad \delta q_0 = 0$$

Si donc $\alpha$, $\beta$ sont deux constantes, nous aurons une classe d'intégrales donnée par les plans :

$$z = \alpha x+\beta y+F(\alpha,\beta).$$

En second lieu on peut encore poser :

$$p_0 = u \qquad q_0 = \varphi(u) \qquad x_0+A = -\varphi'(u)(y_0+B),$$

l'Intégrale sera donnée par les deux équations simultanées :

$$z = ux+y\varphi(u)+F(u,\varphi)$$

$$x+y\varphi'(u)+\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}=\varphi'(u)=0$$

c'est l'enveloppe d'une famille de plans.

En dehors de ces solutions, il reste à voir, si l'on a une solution singulière. Elle sera alors définie par les trois équations simultanées

$$x + \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad y + \frac{\partial F}{\partial q} = 0 \qquad z = px + qy + F(p, q).$$

C'est d'ailleurs bien une solution, car si on différentie totalement la dernière en tenant compte des deux premières on a :

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

En résumé la solution comprend :

1° — L'ensemble de tous les plans P satisfaisant à la condition donnée.

2° — L'enveloppe du plan mobile obtenu en établissant une relation arbitraire entre les deux paramètres dont dépendent les plans P.

3° — L'enveloppe de toutes les solutions précédentes ; c'est la solution singulière.

3° — Comme dernier exemple, soit encore :

$$pq = xy$$

$$P = q \qquad Q = p \qquad X = -y \qquad Y = -x \qquad Z = 0$$

Ici il n'y a évidemment pas de solution singulière. Les caractéristiques ont pour équations :

$$p\,dx = q\,dy = \frac{dz}{2} = x\,dp = y\,dq = dt.$$

On en déduit en intégrant et éliminant $t$ :

$$p^2 - p_0^2 = (z - z_0)\,\frac{p_0}{x_0}$$

$$q^2 - q_0^2 = (z - z_0)\,\frac{q_0}{y_0}$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \frac{y}{y_0} = \frac{q}{q_0}$$

Si on pose :

$$x_0 = \alpha \qquad y_0 = u, \qquad q_0 = \varphi'(u) \qquad z_0 = \varphi(u) \qquad p = \frac{\alpha u}{\varphi'(u)}.$$

On obtient la solution par l'ensemble des deux équations simultanées :

$$z - \varphi = \frac{\alpha^2 u}{\varphi'(u)}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right) = u\,\varphi'(u)\left(\frac{y^2}{u^2} - 1\right)$$

On peut écrire ces deux équations sous la forme :

$$(z-\varphi)^2 = (x^2-\alpha^2)\ (y^2-u^2)$$

$$\varphi'(z-\varphi) = u\ (x^2-\alpha^2)$$

on voit qu'alors la seconde est la dérivée de la première par rapport à $u$ ; chaque intégrale particulière est donc l'enveloppe d'une famille de surfaces du 4ᵉ ordre.

VI_ Cas de plusieurs variables_ Revenons à l'équation :

$$(1)\qquad f(z\ x_1\ x_2 \ldots x_n\quad p_1\ p_2 \ldots p_n) = 0$$

Supposons qu'on ait intégré les équations des caractéristiques :

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n} = \frac{-dp_j}{X_j + p_j Z} = dt$$

Soient $\alpha_i$, $\gamma$, $\beta_j$ les valeurs de $x_i$, $z$, $p_j$ pour $t=0$ ; nous supposons que pour ces valeurs initiales, aucun des dénominateurs n'est infini et qu'ils ne sont pas tous nuls ; les intégrales sont alors de la forme :

$$(20)\qquad x_i = \varphi_i\ (t,\alpha,\beta,\gamma) \qquad z = \psi(t,\alpha,\beta,\gamma) \qquad p_j = \omega_j\ (t,\alpha,\beta,\gamma)$$

les fonctions $\varphi$, $\psi$, $\varpi$ étant holomorphes.

Les calculs et les raisonnements étant exactement les mêmes que dans le cas de deux variables, nous nous contenterons d'énoncer les résultats. Pour avoir la solution générale de l'équation (1), on devra dans les formules (20) substituer à $\alpha, \beta, \gamma$, $2n+1$ fonctions de $n-1$ variables $t,\ t_2\ t_3 \ldots t_{n-1}$, ces fonctions étant choisies de telle sorte qu'on ait identiquement :

$$(21)\qquad \begin{cases} f\ (\gamma, \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n\ ,\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n) = 0 \\ \delta\gamma = \beta_1\ \delta\alpha_1 + \beta_2\,\delta\alpha_2 + \cdots + \beta_n\,\delta\alpha_n \end{cases}$$

Les $\alpha, \gamma, \beta$ étant choisies de cette manière les formules (20) donneront $x_i$, $z$, $p_j$ en fonction des $n$ variables $t, t_1, t_2 \ldots t_{n-1}$ ; ce sera la solution cherchée, si l'élimination des $t$ conduit à une relation unique entre $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ on aura une intégrale dans le sens ordinaire du mot ; si on a plusieurs relations distinctes entre $z$ et les $x$, ce sera une intégrale, au sens plus étendu de Mr Lie.

Il y aura plusieurs manières de satisfaire à la seconde des conditions (21) ; on le pourra en particulier en faisant :

$$\alpha_1 = \text{const.} \qquad \gamma = \varphi(\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n) \qquad \beta_j = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j}$$

Cette solution est celle à laquelle conduit une autre méthode d'intégration.

due à Cauchy (pour l'exposé de la méthode de Cauchy, voir le cours autographié de M.r Picard, page 393.)

On peut d'ailleurs, voir aisément quelle est la manière générale de vérifier la seconde des équations (21) [Voir Darboux - Solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, page 140], les $n+1$ fonctions $z, \alpha_i$ devant dépendre de $n+1$ variables seulement, on devra établir entre elles, un nombre au moins égal à deux, de relations d'ailleurs arbitraires. Supposons par exemple qu'on introduise cinq relations de cette nature, et que ces relations puissent se résoudre par rapport à $z$, $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$, on aura alors:

(22) $z = \zeta(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n) \qquad \alpha_1 = \lambda_1(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n) \cdots \qquad \alpha_4 = \lambda_4(\alpha_5 \alpha_6 \cdots \alpha_n)$.

Si on transporte ces valeurs dans la seconde des relations (26) elle deviendra linéaire et homogène par rapport à $\delta\alpha_5, \delta\alpha_6 \cdots \delta\alpha_n$, égalant à 0 chacun des coefficients de ces variations, on aura $n-4$ nouvelles relations, qui jointes aux équations (22) détermineront les $n+1$ fonctions $z$, $\alpha_i$; la solution donnée plus haut correspond au cas où on prend deux relations arbitraires dont l'une est $\alpha_1 =$ const.

---

# Seizième Leçon.

## Intégrales des équations aux dérivées partielles du 1.er ordre. Equations Canoniques.

**1 - Intégrale complète** — On nomme intégrale complète de l'équation:

(1) $$f\,(z, x_1\, x_2 \cdots x_n, p_1 p_2 \cdots p_n) = 0$$

une intégrale de la forme:

(2) $$F\,(z, x_1\, x_2 \cdots x_n, a_1\, a_2 \cdots a_n) = 0$$

où $a_1\, a_2 \cdots a_n$ sont des constantes distinctes, c'est à dire telles qu'on en puisse disposer de manière à donner à $p_1$, $p_2 \cdots p_n$ des valeurs arbitraires pour des valeurs données des variables indépendantes $x_1\, x_2 \cdots x_n$; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'exprime évidemment par l'inégalité:

(3) $$\left|\frac{D\,(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_n)}{D\,(a_1\, a_2 \cdots a_n)}\right| \neq 0 \qquad \left[\varphi_i = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right]$$

Le théorème général de Cauchy met en évidence l'existence d'une infinité d'intégrales complètes. Si $\alpha, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ sont les valeurs initiales attribuées aux $x$, on peut toujours en effet trouver une intégrale qui pour $x_1 = \alpha_1$, se réduise à une fonction $\varphi(x, x_2 \cdots x_n)$ et rien n'empêche d'introduire dans cette fonction $\varphi$ qui est quelconque, $n$ constantes arbitraires, telles que la condition (3) soit vérifiée pour $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$ $\cdots$ $x_n = \alpha_n$.

On peut obtenir une intégrale complète par l'intégration des caractéristiques. Supposons en effet qu'on ait intégré les équations des caractéristiques en prenant pour valeurs initiales des $x$, les constantes données $\alpha, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, pour $z$ et $p_j$, $n+1$ constantes liées par la seule relation:

$$f(\gamma, \alpha, \alpha_2 \cdots \alpha_n \;\; \beta, \beta_2 \cdots \beta_n) = 0$$

en sorte que $n$ de ces constantes soient arbitraires; il est évident que la condition:

$$\delta z = p\delta x_1 + p_1 \delta x_1 \; \cdots\cdots + p_n \delta x_n$$

sera vérifiée d'elle-même, pour les valeurs initiales; on aura donc bien une intégrale de l'équation (1), contenant $n$ constantes arbitraires qui seront précisement si l'on veut, les valeurs initiales des $p$. Ce sera donc bien une intégrale complète.

I — Intégrales générales — Intégrale singulière. — Lagrange a montré que lorsqu'on connaît une intégrale complète on peut en déduire toutes les autres intégrales de l'équation (1) en appliquant la méthode de la variation des arbitraires.

En effet dire que (2) définit une intégrale c'est dire que si on élimine les $a$ entre cette relation (2) et les suivantes

$$(4) \qquad \frac{\partial t}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots n)$$

on obtient comme résultat l'identité (1). Or cette élimination se fera exactement de même et donnera ce même résultat si au lieu des $a$ on met des fonctions de $x, x_2 \cdots x_n$ telles que les équations (4) conservent la même forme.

Il suffira, pour cela que les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ tirées de l'équation

$$(5) \qquad F\;(z, x, x_2 \cdots x_n, \lambda, \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0$$

où $\lambda, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ sont les fonctions en question, aient la même forme que si ces $\lambda$ étaient constantes, c'est à dire que l'on ait:

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3 \cdots n)$$

L'équation (5) donnera donc, une intégrale, pourvu que les $\lambda$ vérifient les relations (6). Or il y a plusieurs manières de les vérifier; on peut poser d'abord:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} = 0$$

On obtient ainsi une intégrale que Lagrange a nommée intégrale singulière; elle résulte de l'élimination des constantes entre l'intégrale complète et ses n dérivées par rapport à ces constantes.

Si on laisse de côté cette intégrale, les équations (5) ne pourront avoir lieu que si le déterminant :
$$\frac{D \cdot (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n)}{D \ (x_1 x_2 \cdots x_n)}$$

est égal à 0. Cela exige qu'il y ait entre les $\lambda$ une ou plusieurs relations identiques, ou en d'autres termes que quelques uns d'entre eux soient des fonctions, d'ailleurs arbitraires, de tous les autres.. Supposons, pour envisager immédiatement le cas le plus général que l'on pose:

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \psi_1 \ (\lambda_{K+1} \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \\ \lambda_2 = \psi_2 \ (\lambda_{K+1} \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \\ \vdots \\ \lambda_K = \psi_K \ (\lambda_{K+1} \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n) \end{cases}$$

Si nous substituons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_K$ dans les équations (5) elles deviennent, en posant:
$$F\,(z\, x_1 x_2 \ x_n, \psi_1 \psi_2 \ \psi_K, \lambda_{K+1} \cdots \lambda_n) = \mathcal{F}(z\, x_1 x_2 \cdots x_n \ \lambda_{K+1} \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n),$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+1}} \ \frac{\partial \lambda_{K+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+2}} \ \frac{\partial \lambda_{K+2}}{\partial x_i} \qquad + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_n} \ \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0$$

et comme il n'y a plus aucune relation identique entre $\lambda_{K+1}, \lambda_{K+2} \cdots \lambda_n$, elles ne peuvent avoir lieu que si l'on a :

$$(8) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+1}} = 0, \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_{K+2}} = 0, \ldots\ldots \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_n} = 0.$$

Les équations (7) et (8) définissent un système de $\lambda$ répondant à la question; en les substituant dans l'équation (6) on obtient une intégrale appelée par Lagrange intégrale générale.

En résumé, partant de l'intégrale complète, on y considérera les constantes comme des paramètres indépendants; l'enveloppe de l'intégrale complète fournira la solution singulière.. On supposera ensuite que K de ces paramètres soient des fonctions arbitraires des autres; l'enveloppe de

l'intégrale complète qui ne dépendra plus que de $n-k$ paramètres fournira l'intégrale générale.

III — Le procédé que nous venons d'indiquer permet d'obtenir à l'aide d'une intégrale complète, une infinité d'autres intégrales. Il est facile de faire voir qu'il les donne toutes. Supposons en effet, pour plus de simplicité, l'intégrale complète mise sous la forme :

$$z = F(x_1 x_2 \cdots x_n, a_1 a_2 \cdots a_n)$$

on aura identiquement :

$$f\left(F, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

et les $\underline{a}$ disparaîtront d'eux-mêmes de cette expression ; elle sera donc identiquement nulle si on y remplace les $\underline{a}$ par des fonctions quelconques des $x$. Soit, d'autre part, une intégrale quelconque de l'équation (1)

$$z = \varphi(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Si nous écrivons les équations :

$$(9) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdots \qquad \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

elles définissent les $a$ comme fonctions implicites des $x$, et cela en raison de l'inégalité (3). Soient $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ les fonctions ainsi définies. Si nous les substituons dans $f$, nous aurons identiquement, d'après ce que nous avons dit plus haut :

$$(10) \qquad f\left(\mathcal{F}, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \equiv 0$$

$\mathcal{F}$ étant égal à :

$$\mathcal{F} = F(x_1 x_2 \cdots x_n, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

Mais d'autre part, $\varphi$ étant une intégrale, on a aussi :

$$(11) \qquad f\left(\varphi, x_1 x_2 \cdots x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

D'où l'on conclut, en comparant les identités (10) et (11) :

$$(12) \qquad \mathcal{F} = \varphi = F(x_1 x_2 \cdots x_n, \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n).$$

Ainsi l'on reproduit $\varphi$ en substituant aux constantes, dans $F$, les $\lambda$ définis par les équations (9). Tout revient alors à faire voir que ces $\lambda$ satisfont aux équations (6) du paragraphe précédent. Or, si nous dérivons l'identité (12) par rapport à $x_i$, en tenant compte des équations (9), nous

avons immédiatement, en supprimant $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ dans les deux membres :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_i} + \cdots\cdots + \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \cdot \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} = 0$$

le théorème est donc démontré.

IV_ Intégrale singulière déduite de l'équation donnée_ Reprenons l'intégrale complète, dans laquelle nous supposons qu'on ait remplacé les $a$ par les fonctions $\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Si nous éliminons ces $\lambda$ entre les équations :

$$(13) \qquad F\ (z, x_1 x_2 \cdots x_n, \lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n) = 0$$

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \ ,$$

nous devons retrouver l'équation donnée $f=0$. Celle-ci est donc identique à (13) pourvu que dans cette dernière on considère les $\lambda$ comme des fonctions de $x_i$, $z$, $p_j$, données par les relations (14). On aura donc, en désignant par $\mu$ un facteur de proportionnalité :

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu p_i \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} + \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_K} \left( \frac{\partial \lambda_K}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \lambda_K}{\partial z} \right)$$

$$\mu \frac{\partial f}{\partial p_i} = \sum_{K=1}^{K=n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_K} \cdot \frac{\partial \lambda_K}{\partial p_i}$$

Si l'on tient compte des équations (14) et qu'on se place en outre dans le cas de la solution singulière où les $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ sont nuls, on voit qu'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

La solution de Lagrange ne diffère donc pas de celle que nous avions définie dans la dernière leçon. Cette solution n'existe donc pas toujours, et si elle existe, elle se distingue essentiellement des intégrales complètes ou générales.

Dans le cas des trois variables $x, y, z$, cela est bien évident : l'intégrale singulière étant l'enveloppe de toutes les autres ne coïncide avec aucune d'elles; d'autre part son existence est soumise aux restrictions qui interviennent dans la théorie des enveloppes.

V_ Applications_ Certaines méthodes d'intégration consistent à chercher une intégrale complète, d'où l'on puisse déduire ensuite toutes les autres. Dans toutes ces méthodes on est toujours amené à intégrer, complètement ou en partie, le système

des caractéristiques .. Nous ne donnerons pas ces méthodes d'intégration .. Mais nous remarquerons que, dans bien des cas, en géométrie surtout, on peut apercevoir, sans calcul, a priori une intégrale complète. _ 1° _ Soit à chercher (page 122) les surfaces dont la normale a une longueur constante $R$ .. Il est visible que toutes les sphères dont le rayon est $R$ et dont le centre est dans le plan des $xy$, répondent à la question : l'équation

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2$$

admet donc comme intégrale complète :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$$

On aura l'intégrale singulière en adjoignant à cette équation les deux suivantes :

$$x-a=0 \qquad y-b=0 \;..$$

Cette intégrale singulière sera donc le système de plans $z=\pm R$ ; quant à l'intégrale générale, ce sera une surface canal de rayon $R$ ayant pour axe une courbe arbitraire tracée dans le plan $XoY$.

2° _ L'équation analogue à celle de Clairaut :

$$z=p_1x_1+p_2x_2,\cdots+p_nx_n+\varphi(p_1p_2\cdots p_n)$$

admet l'intégrale complète évidente :

$$z=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\cdots+\alpha_nx_n+\varphi(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$$

Toutes les autres intégrales s'en déduisent par des différentiations.

3° _ L'équation :

$$z^{n-1}=p_1p_2\cdots p_n$$

admet l'intégrale évidente :

$$z=(x-a_1)\quad(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

on obtient toutes les autres par des différentiations .. L'intégrale singulière est ici $z=0$.

**VI _ Équations canoniques _ Théorème de Jacobi _** Les caractéristiques de l'équation du premier ordre sont données par le système d'équations différentielles :

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt}=P_i \qquad \frac{dp_i}{dt}=-X_i-p_iZ \qquad \frac{dz}{dt}=P_1p_1+P_2p_2+\cdots+P_np_n \quad (i=1,2,3\ldots n)$$

Ce sont des équations différentielles d'une nature toute particulière,

puisque leurs seconds membres sont formés à l'aide des dérivées partielles d'une seule fonction. On peut leur donner une forme plus élégante.

Prenons pour inconnue, non pas la fonction $z$, mais une fonction $V(z, x_1 x_2 \dots x_n)$ qui, égalée à une constante, donnerait une intégrale de l'équation aux dérivées partielles. La substitution s'opère immédiatement à l'aide des formules :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Supposons faite cette substitution et résolvons par rapport à $\frac{\partial V}{\partial z}$, nous aurons alors:

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} + H\left(z, x_1, x_2, \dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

équation qui contiendra $n+1$ variables indépendantes, mais dans laquelle la fonction inconnue ne figure plus que par ses dérivées.

Formons les équations des caractéristiques, en représentant toujours par $p_i$ la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, nous aurons:

$$\frac{\partial z}{dt} = 1 \qquad \frac{d\frac{\partial V}{\partial z}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z} \qquad \frac{\partial x_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

La première de ces équations montre que la variable $z$ et la variable auxiliaire $t$ ne diffèrent que par une constante; on peut donc prendre $z = t$, la seconde équation peut être supprimée, la valeur de la fonction $\frac{\partial V}{\partial z}$ étant donnée par l'équation (2) elle-même.

En résumé l'équation:

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x_1 x_2 \dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

a pour caractéristiques:

$$(4) \qquad \frac{\partial x_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$

Sous cette forme les équations (4) où figurent $n$ couples de variables $x, p$ se correspondent deux à deux, constituant un système d'équations canoniques.

**Théorème de Jacobi.** — Quand on connaît l'intégrale générale du système (4) on peut en déduire toutes les solutions de l'équation (3). — Réciproquement, si on connaît une intégrale complète de l'équation (3) on peut obtenir, pour ainsi dire sans calcul, l'intégrale générale du système (4).

Cela résulte du théorème suivant.

Théorème. — Soit

$$(5) \qquad V = F\,(t, x_1 x_2 \cdots x_n, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

une intégrale complète de l'équation (3); l'intégrale générale du système (4) sera donnée par les équations:

$$(6) \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = b_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

$b_1, b_2 \ldots b_n$ étant de nouvelles constantes arbitraires.

Les équations (6) contiennent en effet $2n$ constantes arbitraires; on peut disposer de $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ de telle sorte que les $p_i$ prennent pour $t = 0$ telles valeurs que l'on voudra; cela fait on pourra évidemment disposer des $b_i$ de manière à donner aux $x_i$ des valeurs initiales quelconques. D'après cela, il suffira pour établir le théorème de Jacobi, de vérifier que les valeurs de $x_i, p_i$, tirées de ces équations (6) satisfont aux équations (4).

Or la fonction $F$ satisfait identiquement, et quels que soient les $\alpha$, à l'équation (3); on a donc:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + H\left(t, x_1 x_2 \cdots x_n \frac{\partial F}{\partial x_1} \; \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \equiv 0$$

Différentions par rapport à l'un quelconque des $x$ et à l'un quelconque des $\alpha$, nous aurons $2n$ identités de la forme:

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_1}} \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_2}} \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x} + \quad + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_n}} \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x} \equiv 0$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_2}} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial \alpha} + \quad + \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_n}} \; \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial \alpha} \equiv 0$$

Différentions alors par rapport à $t$; les équations (6) en y remplaçant dans le second membre, les $p$ par leurs valeurs tirées de ces mêmes équations (6) nous aurons:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_2} \cdot \frac{dx^2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{dt} = 0$$

$$(10) \qquad \frac{dp_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_2} \; \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Le déterminant des équations (9) n'est pas nul, puisque $F$ est une intégrale complète; mais alors si l'on compare ce système (9) au système (8) on a immédiatement:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial . \frac{\partial F}{\partial x_i}}$$

ou, en tenant compte de la première équation (6):

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (11)$$

La première moitié du système d'équations canoniques est donc vérifiée; Les autres équations se vérifient également sans difficulté. En effet l'une des identités (7) peut maintenant s'écrire:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_2} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_2} + \qquad + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} = 0 .$$

et comme l'équation (10) peut aussi s'écrire, à cause des relations (11):

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_1} \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} = 0$$

on en déduit immédiatement:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Le théorème est donc complètement démontré.

Nous ne développerons pas les conséquences de cette proposition qui trouve surtout son application dans les questions de dynamique. Nous rencontrerons les systèmes canoniques, dans une question importante du calcul des variations.

---

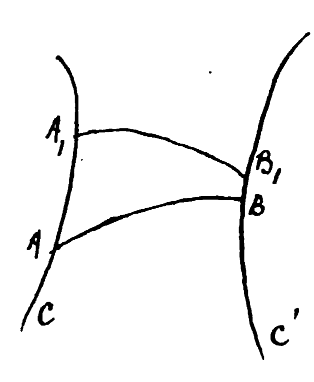
# Calcul des Variations.

## Dix-septième Leçon.

### Variation d'une fonction. – Variation d'une intégrale définie.

---

I – Dans l'analyse des fonctions continues on étudie comment varient les fonctions quand on attribue aux variables des accroissements infiniment petits. Dans le calcul des variations, on cherche ce que deviennent certaines fonctions quand d'autres fonctions, dont elles dépendent, subissent des altérations de forme infiniment petites. Supposons par exemple, deux courbes fixes C, C'; on peut aller de l'une de ces courbes à l'autre par une infinité de chemins; soit AB l'un de ces chemins; un second chemin $A_1B_1$ sera dit infiniment voisin du premier, si chacun des points qui composent $A_1B_1$ est infiniment voisin de l'un des points qui composent AB, et réciproquement. –




Remplacer $AB$, par $A_1B_1$, c'est faire subir à $AB$ une déformation infiniment petite ; si $y = \varphi(x)$ est l'équation de $AB$ projetée sur $XOY$, cette fonction $\varphi$ sera remplacée par une autre $\varphi_1$ de forme infiniment voisine, quand on passera de $AB$ à $A_1B_1$.

Si la courbe $AB$ est assujettie à rester sur une surface donnée, le passage de $AB$ à $A_1B_1$ donnera lieu à l'altération d'une seule fonction ; si au contraire $AB$ est tout à fait libre, il y aura altération de deux fonctions.. Dans tous les cas l'accroissement d'une quantité définie par cette courbe, telle que, par exemple, la longueur de l'arc $AB$, sera une variation, puisque cet accroissement résulte de l'altération de certaines fonctions.

On peut se faire une idée plus précise des variations et ramener, de la manière suivante, leur calcul à celui de différentielles ; nous supposerons toujours dans ce qui suit, que les fonctions considérées ne dépendent que d'une seule variable.

Soit une fonction $f(x)$ qui se modifie d'une manière continue, $f_1(x)$, $f_2(x)$ deux états différents de cette fonction ; on peut construire une fonction $F(x,\alpha)$, continue par rapport aux deux variables $x$ et $\alpha$ et qui, pour $\alpha = \alpha_1$ coïncide avec $f_1(x)$, pour $\alpha = \alpha_2$ avec $f_2(x)$. Il suffit en effet de poser :

$$(1) \qquad F(x,\alpha) = \frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} f_1(x) + \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} f_2(x) + (\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)H(x.\alpha)$$

$H$ étant une fonction arbitraire de $x$, $\alpha$, continue pour $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$. L'équation (1) donne même la forme la plus générale de la fonction $F$ répondant à la question.

On voit de plus, et cette remarque nous sera utile quand nous aurons à calculer la variation d'une intégrale définie, que l'équation (1) étant résoluble par rapport à son dernier terme, on pourra toujours choisir $H$ de telle sorte que pour deux valeurs données de $x$, $x_1 x_2$, $F$ se réduise à deux fonctions de $\alpha$, $\varphi_1(\alpha)$. $\varphi_2(\alpha)$.

Ceci posé, si nous développons la différence $f_2(x) - f_1(x)$ nous aurons :

$$f_2(x) - f_1(x) = (\alpha_2-\alpha_1)\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} \cdots + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \cdots$$

Si nous supposons les deux fonctions infiniment voisines l'une de l'autre, il nous faudra supposer que $\alpha_2 - \alpha_1$ est infiniment petit ; dans ces conditions la quantité :

$$(\alpha_2-\alpha_1)^n \left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha=\alpha_1},$$

est ce que l'on appelle la variation d'ordre $n$ de la fonction $f_1(x)$ ; on la représente par $\delta^n f_1(x)$ et on a alors pour l'accroissement complet d'une fonction quelconque :

$$(2) \qquad \Delta y = \delta y + \frac{1}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\delta^3 y + \cdots + \frac{1}{1.2\cdots n}\cdot\delta^n y + \cdots$$

D'après cela la première variation, qu'on appelle simplement la variation, sera donnée par la formule : $\delta y = \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot d\alpha$

C'est comme on le voit une différentielle relative à l'accroissement $d\alpha$ de $\alpha$.

II. Interversion des caractéristiques $d, \delta$ — Si nous différentions l'équation (1) par rapport à $x$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} f_1'(x) + \frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} f_2'(x) + (\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\frac{\partial H}{\partial x}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ se réduit donc à $f_1'(x)$ pour $\alpha = \alpha_1$, et à $f_2'(x)$ pour $\alpha = \alpha_2$. Donc, par cela même que la fonction $f$ sera comprise dans $F(x,\alpha)$, sa dérivée sera comprise dans la fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$, et plus généralement $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sera comprise pour ses valeurs extrêmes dans la fonction :

$$\frac{\partial^n F(x,\alpha)}{\partial x^n}$$

Pour parler avec plus de précision, si $F(x,\alpha)$ se raccorde avec la fonction $f(x)$ pour $\alpha = \alpha_1$ et $\alpha = \alpha_2$, sa $n^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à $x$, se raccordera avec $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour les mêmes valeurs $\alpha_1$ et $\alpha_2$.

On a alors d'après ce qui précède :

$$d^n(\partial^p y) = dx^n \left[\frac{\partial^{n+1} F(x,\alpha)}{\partial x^n \partial \alpha^p}\right]_{\alpha=\alpha_1} (\alpha_2-\alpha_1)^p$$

d'où l'on déduit :

$$(3) \qquad d^n\,\delta^p y = \delta^p\, d^n\, y$$

L'égalité (3) exprime qu'on peut intervertir les caractéristiques $d$ et $\delta$.

Toutes les règles du calcul des dérivées s'appliquent naturellement ici ; en particulier, supposons une fonction de la forme :

$$V(x, y, y' y'', z\, z' z'' z''', u\, u' u'' u''' u^{IV})$$

sa variation première sera donnée par :

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\,\delta y'' + \cdots + \frac{\partial V}{\partial u^{(IV)}}\cdot\delta(u^{IV})$$

il y a avantage à ne laisser subsister, dans cette expression, que les variations $\delta y$, $\delta z$, $\delta u$ et leurs dérivées ; cela se fait sans difficulté en vertu du

théorème précédent, on a par exemple :

$$\delta y'' = \frac{\delta d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 . \delta y}{dx^2}.$$

La variation $\delta V$ pourra donc s'écrire :

$$(4) \qquad \delta V = \frac{\partial V}{\partial y} . \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \frac{d \delta y}{dx} + \frac{\partial V}{\partial y''} \frac{d^2 . \delta y}{dx^2} \cdots\cdots + \frac{\partial V}{\partial u^{(IV)}} \frac{d^4 . \delta u}{dx^4}.$$

Dans ce calcul, $x$ est supposée la variable indépendante ; c'est donc une fonction de forme invariable et sa variation $\delta x$ est nulle.

III — Changement de la variable indépendante — Supposons que dans la question proposée, figurent certaines fonctions susceptibles de variation, savoir :

$$(5) \qquad y = f(x) \qquad z = \varphi(x) \qquad u = \psi(x).$$

Si on prend au lieu de $x$, une autre variable $t$, les équations (4) se trouveront remplacées par quatre équations telles que :

$$(6) \qquad x = \lambda(t) \qquad y = \mu(t) \qquad z = \nu(t) \; . \; u = \theta(t).$$

Si les fonctions $f, \varphi, \psi$ passent d'un état $f_1, \varphi_1, \psi_1$ à un autre $f_2 . \varphi_2 . \psi_2$, les 4 fonctions $\lambda, \mu, \nu, \theta$, passeront de l'état $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \theta_1$ à un autre $\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \theta_2$. Or on peut former quatre fonctions : $L(t,\alpha)$, $M(t,\alpha)$, $N(t,\alpha)$, $P(t,\alpha)$, qui se réduisent respectivement à $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \theta_1$, pour $\alpha = \alpha_1$ à $\lambda_2 . \mu_2 . \nu_2 . \theta_2$, pour $\alpha = \alpha_2$. Si nous posons alors :

$$(7) \qquad x = L(t,\alpha) \qquad y = M(t,\alpha) \qquad z = N(t,\alpha) \qquad u = P(t,\alpha).$$

ce système (7) comprendra les deux systèmes :

$$y = f_1(x) \qquad z = \varphi_1(x) \qquad u = \psi_1(x)$$

$$y = f_2(x) \qquad z = \varphi_2(x) \qquad u = \psi_2(x)$$

D'après une remarque faite plus haut, on pourra choisir la fonction $L$ de telle sorte que pour deux valeurs données $t, t_1$ de la nouvelle variable, $L$ se réduise à deux fonctions données $\xi_1(\alpha)$ $\xi_2(\alpha)$ de la variable $\alpha$.

En supposant faite cette substitution, la variation de $x$ n'est plus nulle, on a en général :

$$\delta^n x = (\alpha_2 - \alpha_1)^n \left(\frac{\partial^n L}{\partial \alpha^n}\right)_{\alpha = \alpha_1}$$

Remarque — On n'a jamais à faire, d'une façon effective, la substitution

dont nous venons de parler ; il suffit pour les fonctions qui dépendent du calcul des variations, de savoir que ces fonctions $L, M, N, P$ existent, ainsi que nous l'avons démontré, sans qu'il soit nécessaire de les former.

**IV_ Intersection des caractéristiques $\delta . \int$** ——— Considérons maintenant l'intégrale définie :

$$J . \int_a^b V(x, y y' y'', z z' z'' z''', u u', u''' u^{IV})\, dx$$

Cette intégrale change quand on modifie les fonctions $y, z, u, \ldots$ $V$ est une fonction déterminée de $x$, des fonctions $y, z, u, \ldots$ et de leurs dérivées, nous nous proposons de calculer la variation $\delta J$.

Remarquons d'abord que les limites de l'intégrale peuvent être variables : c'est ce qui arriverait dans l'exemple que nous avons donné au début de cette leçon ; la longueur de l'arc $AB$ est donnée par :

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, . dx .$$

et si les points $AB$ décrivent les courbes $c . c'$, $a, b$ prennent l'une et l'autre des valeurs qui changent avec la courbe mobile ; dans le passage de $AB$ à $A_1B_1$, on doit donc considérer $a, b$, comme des fonctions de $\alpha$, et par suite leur attribuer des variations.

En second lieu il pourra se faire que $V$ dépende, en outre, des valeurs $a$ et $b$ et aussi des valeurs correspondantes des fonctions $y, z$, et de leurs dérivées. Cela arrive par exemple si, dans l'exemple que nous venons de rappeler, on étudie le temps employé par un mobile à parcourir la courbe $AB$ sous l'influence de la pesanteur. On aurait dans ce cas :

$$J = \sqrt{\frac{m}{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{z_0 - z}\, dx .$$

$m$ étant la masse du mobile et $z_0$ le $z$ du point de départ $A$

Nous devons donc supposer en général, que les limites sont variables et que les valeurs de $x, y, z, y', z', \ldots\ldots$, prises à ces limites, figurent dans la fonction $V$.

Les limites $a, b$ changeant avec les fonctions inconnues, passeront des valeurs $a_1 b_1$ à des valeurs $a_2 b_2$ quand $y, z, u$, passeront des valeurs $y_1 z_1 u_1$ aux valeurs $y_2 z_2 u_2$. On peut toujours effectuer le passage de $a_1$ à $a_2$ et de $b_1$ à $b_2$ en ne faisant varier qu'un seul paramètre $\alpha$. Nous considérerons $a$ comme une fonction $\varphi(\alpha)$ et $b$ comme une autre fonction $\psi(\alpha)$. Cela fait,

nous pourrons constituer les fonctions $L, M, N, P$ qui figurent dans les formules (7) de telle sorte que pour deux valeurs données $t_0, t_1$ de $t$, on ait :

$$L(t_0, \alpha) = \varphi(\alpha) \qquad\qquad L(t_1 \alpha) = \psi(\alpha).$$

La fonction $V$ deviendra une fonction

$$U\left(\alpha, t, LMNP, \frac{\partial L}{\partial t} \ldots\ldots \varphi(\alpha), \psi(\alpha) \ldots\right]$$

et l'intégrale sera :

$$J \int_{t_0}^{t_1} U \frac{\partial L}{\partial t} . dt.$$

Mais ici, les limites sont des constantes, nous pouvons différentier par rapport à $\alpha$ et nous aurons :

$$\delta J = d\alpha \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(U \frac{\partial L}{\partial t}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial.\left(U\frac{\partial L}{\partial t}\right)}{\partial \alpha} d\alpha\right] dt$$

ou encore :

$$\delta J \int_{t_0}^{t} \left[\delta \left(U \frac{\partial L}{\partial t}\right)\right] dt = \int_{t_0}^{t} . \delta \left(U \frac{\partial L}{\partial t} dt\right)$$

Si maintenant nous revenons à la variable $x$,

$$\delta J = \int_a^b \delta (V dx) .$$

On peut donc intervertir les caractéristiques $\delta, \int$.

**V — Variation d'une intégrale définie** — Il existe plusieurs procédés pour mettre la variation $\delta J$ sous la forme que nous avons en vue. Le plus commode dans la pratique est le suivant ; c'est du reste celui dont s'est servi exclusivement Lagrange, l'inventeur de la méthode des variations.

Rendons libre la variable indépendante en nous servant des identités :

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \ldots\ldots$$

$V dx$ se transformera en une fonction ne contenant plus que des différentielles, et on aura alors :

$$\delta (V dx) = X_0 \delta x + X_1 \delta\, dx + X_2 \delta. d^2x + \ldots.$$
$$Y_0 \delta y + Y_1 \delta. \delta y + Y_2 \delta. d^2 y + \ldots.$$

+ des termes contenant les variations des valeurs aux limites.

Considérons dans $\delta J$ le terme :

$$\int Y_p . \delta . d^p y = \int Y_p . d^p(\delta y)$$

Nous pourrons intégrer par parties ce qui nous donnera en dehors de l'intégrale :

$$y_p\, d^{p-1}\delta y - dy_p \,.\, d^{p-2}\delta y + d^2 y_p\; d^{p-3}\delta y \;\ldots\; \pm d^{p-1}y_p \,.\, \delta y \mp \int d^p y_p \,.\, \delta y \,.$$

La partie extraite de l'intégrale pourra s'écrire en intervertissant d et $\delta$; les termes qui la composent seront donc linéaires par rapport aux variations premières de $y$, $dy$, ..... $d^{p-1}y$.

Les termes qui dépendent dans $\delta\,(V\,dx)$, des valeurs aux limites donneront sans aucun calcul des termes de cette même forme. Si nous désignons par les indices 0, 1, la limite inférieure et la limite supérieure, nous aurons des termes de la forme :

$$\int A_q \,.\, \delta \,.\, d^q z_0 = \delta \,.\, d^q z_0 \int A_q$$

Puisque $\delta\, d^q z_0$ est indépendant de la variable d'Intégration. — En résumé désignons par $\Gamma$ l'ensemble des termes extraits au moyen de l'intégration par parties, par $\Lambda$ l'ensemble des termes qui dépendent des variations des valeurs aux limites nous arrivons à un résultat de la forme :

$$(8) \qquad \delta J = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Lambda + \int X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + U\,\delta u \,.$$

X, Y, Z, U sont des fonctions différentielles, homogènes et du premier degré par rapport aux indices de différentiation ; la partie extérieure :

$$R = \Gamma_1 - \Gamma_0 + \Lambda$$

est composée linéairement avec les variations des valeurs aux limites et de leurs différentielles.

## VI — Exemples

— Soit d'abord l'intégrale :

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,.\, dx \,.$$

qui représente, dans l'exemple que nous avons choisi, la longueur de l'arc AB. Si nous cessons de spécifier la variable indépendante,

$$V\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

d'où :

$$\delta\,(V\,dx) = \frac{dx \,.\, d\delta x + dy \,.\, d \,.\, \delta y + dz\; d \,.\, \delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Si $\alpha, \beta, \gamma$ sont des cosinus directeurs de la tangente

$$\delta\,(V\,dx) = \alpha\, d \,.\, \delta x + \beta\, d \,.\, \delta y + \gamma\, d \,.\, \delta z \,,$$

et en intégrant par parties :

$$\int \delta (V\,dx) = \alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z - \int d\alpha\,\delta x + d\beta . \delta y + d\gamma . \delta z$$

et enfin :

(10) $$\delta J = \alpha_1 \delta x_1 + \beta_1 \delta y_1 + \gamma_1 \delta z_1 - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0 - \int_{t_0}^{t_1} (d\alpha . \delta x + d\beta . \delta y + d\gamma . \delta z).$$

2°_ Soit encore l'intégrale qui figure dans l'expression du temps employé par un corps pesant à parcourir l'arc AB.

$$J = \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z_0 - z}}\, dx.$$

Nous aurons ici :

$$V\,dx = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z_0-z}}$$

$$\delta (V\,dx) = \frac{1}{\sqrt{z_0-z}} \frac{dx . d\delta x + dy\,\delta dy + dz . \delta . dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{1}{2} \frac{\delta z - \delta z_0}{(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Intégrons par parties en introduisant les cosinus $\alpha, \beta, \gamma$, comme dans l'exemple précédent :

$$\int \delta (V\,dx) = \frac{1}{\sqrt{z_0-z}} (\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z) - \frac{1}{2} \delta z_0 \int \frac{ds}{(z_0-z)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int \left[ \delta z \left( \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} - d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right)\right) - \delta x . d \left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) - \delta y\, d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right)\right]$$

et enfin:

$$\delta J = \left[\frac{1}{\sqrt{z_0-z}} (\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)\right]_0^1 - \frac{1}{2} \delta z_0 \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{(z_0-z)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta z \left( \frac{ds}{2(z-z_0)^{\frac{3}{2}}} - d\,\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right) - \delta x\, d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) - \delta y \left(d . \frac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\right)\right]$$

Il est clair qu'on eût pu simplifier le calcul en prenant, au lieu de l'axe des $z$, l'axe des $x$ suivant la verticale.

---

# Dix-huitième Leçon.

## Questions de maximum et de minimum qui dépendent du Calcul des Variations.

1. Condition de maximum ou de minimum. — Reprenons l'intégrale:

$$J = \int_a^b V\,dx.$$

Parmi les systèmes de fonctions $y, z, u$, $y_1 z_1 u_1 \ldots y_0 z_0 u_0$ (les indices 1, 0, indiquant toujours les valeurs prises aux limites supérieure et inférieure), quel est celui pour lequel cette intégrale est maxima ou minima? Euler a, le premier, donné une méthode pour résoudre les problèmes de ce genre, dans le cas où il n'y a qu'une fonction inconnue et où les limites sont fixes. En d'autres termes, le problème résolu par Euler consiste à déterminer parmi toutes les courbes planes passant par deux points donnés, celle pour laquelle une intégrale donnée est maxima ou minima. C'est Lagrange qui a donné la solution complète du problème général énoncé plus haut, en créant la méthode des variations qui trouve d'ailleurs son application dans d'autres théories importantes d'analyse et de mécanique.

Soit $S$ le système de fonctions pour lequel il y a maximum ou minimum, $S'$ un autre système quelconque infiniment voisin de $S$. On peut toujours par une interpolation du genre de celles que nous avons définies dans la dernière leçon, construire une suite de systèmes intermédiaires, dépendant d'un paramètre $\alpha$ et permettant de passer de $S$ à $S'$. Parmi tous les systèmes possibles envisageons exclusivement ceux qui forment cette suite continue. Parmi ces systèmes particuliers $S$ est celui qui donne à $J$ une valeur maxima ou minima et comme $J$ ne dépend, quand on passe de l'un à l'autre, que du paramètre $\alpha$ on doit avoir $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$.

Cette condition doit être vérifiée quelque soit le système $S'$ et par suite $\delta J$ doit être nul, pour tous les systèmes qu'on peut construire par interpolation. C'est dans ce sens que nous dirons que la variation de l'intégrale doit être nulle pour le système cherché $S$.

Ainsi pour qu'il y ait maximum ou minimum il faut que la variation de l'intégrale soit nulle.

Cette condition n'est pas suffisante; comme dans les questions

élémentaires de maximum, il faudrait examiner ce que deviennent, pour ce système S qui annule $\delta J$, la variation seconde $\delta^2 J$ et quelquefois même les variations d'ordre supérieur. Nous laisserons de côté cette discussion qui est d'ailleurs inutile dans les cas très fréquents où l'on sait d'avance, par la nature même de la question à quoi s'en tenir sur l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

## II – Conditions pour que la variation de l'Intégrale soit nulle.

Nous avons vu comment on peut mettre la variation $\delta J$ sous la forme :

$$(1) \qquad \delta J = \mathcal{R} + \int [M\delta x + N\delta y + P\delta z + Q\delta u].$$

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'on conserve $\underline{x}$ comme variable indépendante; on a alors $\delta x = 0$ et le premier terme disparaît sous le signe $\int$. Mais les limites $x_0 = a$, $x_1 = b$ continuent à être variables. Si $y$ figurait initialement dans $V$ par ses dérivées jusqu'à l'ordre $\underline{n}$ inclusivement, $z$, $\underline{u}$ par leurs dérivées d'ordre $p, q$ on voit que $R$ sera composé linéairement avec:

$$\begin{array}{llllll} \delta x_0 & \delta y_0 & \delta y'_0 & \ldots\ldots \delta y_0^{(n-1)} \ldots & & \delta u_0^{(q-1)} \\ \delta x_1 & \delta y_1 & \delta y'_1 & \quad\;\; \delta y_1^{(n-1)} \ldots & & \delta u_1^{(q-1)} \end{array}$$

D'autre part, comme, à chaque intégration par parties l'ordre différentiel sous le $\int$ croît d'une unité, $N, P, Q$ contiendront $y, z, u$ aux ordres suivants:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $N$ | $2n$ | $n+p$ | $n+q$ |
| $P$ | $n+p$ | $2p$ | $p+q$ |
| $Q$ | $q+n$ | $q+p$ | $2q$ |

Ceci posé, prenant pour point de départ le système de fonctions et de valeurs aux limites qui annule $\delta J$, laissons fixe tout ce qui se rapporte à :

$$z, u, z_0\, u_0, z_1\, u_1,$$

et à leurs dérivées. Altérons seulement ce qui se rapporte à $y, y_0, y_1$; $\alpha$ étant un paramètre variable remplaçons $y$ par

$$y + \alpha\theta^2 N$$

$\theta$ étant une fonction de $x$ qui s'annule aux deux limites ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées; dans ces conditions on aura, en différentiant par rapport à $\alpha$ et faisant $\alpha = 0$ :

$$\delta y = \alpha.\theta^2 N \qquad \delta y_0 = 0 \qquad \delta y_1 = 0 \quad \ldots \; \delta y_0^{(n-1)} = 0 \qquad \delta y_0^{(n-1)} = 0$$

D'ailleurs toutes les autres variations qui figurent dans $\delta J$ sont également nulles et l'on a alors: $\quad \delta J = d\alpha \int \theta^2 N^2 = 0$

d'où $N = 0$.

On verrait de même que les fonctions cherchées doivent annuler $P$ et $Q$, donc ces fonctions doivent satisfaire aux équations:

$$(2) \qquad N = 0 \qquad P = 0 \qquad Q = 0 \;.$$

C'est d'après ce que nous avons vu plus haut, un système d'équations différentielles d'ordre $2n + 2p + 2q = 2K$, et si on le suppose intégré sa solution générale contient $2K$ constantes arbitraires, $C_1\, C_2 \ldots C_{2K}$.

Si maintenant on revient à la condition $\delta J = 0$, en tenant compte des équations (2) elle se réduit à:

$$(3) \qquad R = 0$$

et les conditions (2), (3), que nous venons de démontrer nécessaires sont évidemment suffisantes.

III — Détermination des fonctions inconnues — Le nombre total des variations aux limites est $2K + 2$ (à cause de $\delta x_0$ et $\delta x_1$). Ceci posé, les fonctions sous le signe $\int$ étant toujours supposées indépendantes, supposons d'abord qu'il n'y ait aucune condition imposée aux limites, en sorte que les variations qui figurent dans $R$ n'aient aucune dépendance entre elles. L'identité (3) ne pourra être satisfaite que si on égale séparément à 0 le coefficient de chacune de ces variations. On obtiendra ainsi $2K+2$ équations de condition permettant de déterminer:

$$x_0 \;, x_1 \;, \quad C_1\; C_2 \;\ldots\; C_{2K} \;.$$

Mais en général les variations aux limites ne seront pas complètement arbitraires. S'il s'agit par exemple, d'une courbe à déterminer par une condition de maximum, ses extrémités pourront être ou fixes, ou bien assujetties l'une ou l'autre, ou toutes deux, à rester sur des courbes ou des surfaces données; ou bien encore on pourra imposer à la courbe, en ses extrémités certaines conditions d'orientation ou de courbure etc ... Supposons d'une manière générale que les variations qui figurent dans $R$ soit liées par $p$ relations

$$(4) \qquad H_1 = 0 \qquad H_2 = 0 \qquad H_i = 0$$

dans lesquelles il ne pourra figurer de dérivées d'ordre supérieur à:

$$n-1 \;, p-1 \;, q-1 \,.$$

Si nous différentions ces équations (2) suivant la caractéristique $\delta$, nous aurons $i$ relations linéaires entre les variations aux limites; nous pourrons exprimer

$i$ de ces variations, en fonction des autres, substituer leurs valeurs dans $R$, qui n'en contiendra plus que $2K+2-i$ d'indépendantes. Annulant les coefficients de celles-ci, nous aurons $2K+2-i$ relations qui, jointes aux conditions (4), permettront encore de déterminer $x_0$ $x_1$ $C_1$ $C_2$ .... $C_{2K}$.

**Remarque** — On peut évidemment, et cela sera souvent plus commode, annuler tous les coefficients de:

$$R+\mu_1\ \delta H_1+\mu_2\ \delta H_2 \qquad +\mu_i\ \delta H_i$$

où $\mu_1\ \mu_2 \dots \mu_i$ sont des indéterminées. On aura ainsi $2K+2$ équations, qui, jointes aux équations (4) détermineront $x_0$ $x_1$ . $C_1$ $C_2$ . $C_{2K}$ $\mu_1$ $\mu_2 \dots \mu_i$.

**V — Cas où les fonctions inconnues sont liées par des équations données** — Nous avons supposé que les fonctions inconnues $y, z, u$ sous le signe $\int$, étaient absolument indépendantes : mais cela n'a pas toujours lieu ; s'il s'agit par exemple de déterminer une courbe, cette courbe pourra être assujettie à demeurer sur une surface donnée à rencontrer normalement une suite de surfaces, ou à toute autre condition analogue.

Supposons d'une manière générale que dans $V$ figurent des fonctions $y, z, u$ .... astreintes à vérifier constamment les relations:

$$(5) \qquad \varphi_1=0 \quad \varphi_2=0 \qquad \varphi_c=0$$

Ces relations sont différentielles ; on peut même concevoir, et nous le supposerons pour plus de généralité qu'elles contiennent d'autres fonctions $\eta, \xi$. C'est ce qui arriverait par exemple, si on on voulait faire un changement de variables. Observons enfin que ces conditions (5) introduiront avec elles des conditions aux limites, puisqu'elles doivent être vérifiées jusqu'à ces limites inclusivement ; on devra même si $y, z, u$ .... $y$ figurent par des dérivées d'ordres moindres que $n-1$, $p-1$, $q-1$ les différentier un certain nombre de fois par rapport à $x$ et faire ensuite $x=x_0$, $x=x_1$ dans les résultats. Les conditions aux limites se trouveront alors complétées.

Ceci posé, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_c$ des fonctions de $x$, que nous laisserons pour le moment indéterminées, et que nous supposerons n'être pas susceptibles de variation. Considérons l'intégrale:

$$J'=\int_a^b (V+\lambda_1\ \varphi_1+\lambda_2\,\varphi_2 \qquad +\lambda_c\,\varphi_c)\,dx=\int_a^b V'dx$$

il est clair que pour tout système de fonctions satisfaisant identiquement aux équations (5) on a $\delta J=\delta J'$ ; nous devons donc chercher à annuler identiquement $\delta J'$.

Dans $V'$, figurent toutes les fonctions $y, z, u, \dots \eta\, \xi, \dots$ en nombre $h$;

d'après les relations (5) $l$ de ces fonctions peuvent être considérées comme fonctions des $h-l$ autres. Si nous calculons $\delta J$ à l'aide d'intégrations par parties en faisant nuls $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2 \dots \delta\lambda_p$, nous aurons un résultat de la forme

$$\delta J' = R' + \int N'\delta y + P'\delta z + Q'\delta u + \dots + S\delta\eta + T\delta\xi + \dots$$

Disposons des indéterminées $\lambda$ de manière à annuler sous le signe $\int$, tous les coefficients des $\delta$ qui correspondent aux $l$ fonctions que nous considérons comme dépendant des $h-l$ autres. Il ne restera plus, sous le signe, que des variations absolument indépendantes, et pour qu'on ait identiquement $\delta J'=0$, il nous faudra annuler tous les coefficients restants. En définitive nous aurons donc :

$$(6) \qquad N'=0 \qquad P'=0 \qquad Q'=0 \quad \dots \quad S=0 \quad \dots \quad T=0 \quad \dots$$

et par suite :

$$(7) \qquad R'=0$$

On opérera sur le système (6), (7), pour la détermination des constantes arbitraires, exactement comme dans le § précédent. – Il y aura ici à déterminer toutes les fonctions :

$$y\ z\ u, \dots \eta, \xi, \dots \dots \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_l$$

VI – Cas où une intégrale donnée doit rester constante. – Supposons qu'on ait à déterminer les conditions de maximum ou de minimum de :

$$J = \int_a^b V\,dx$$

une autre intégrale :

$$I = \int_a^b U\,dx$$

devant avoir une valeur donnée $C$ ; c'est ce qu'on appelle un maximum ou un minimum relatif. Ce cas se ramène très simplement au précédent ; introduisons en effet une fonction $\eta$, satisfaisant aux conditions :

$$(8) \qquad \eta' = U \qquad \eta_0 = 0 \qquad \eta_1 = C$$

qui équivalent évidemment à la condition imposée ; les équations (8) remplaceront les équations (5) de tout à l'heure, et nous aurons :

$$J' = \int_a^b \left[V + \lambda\,(\eta' - U)\right] dx$$

D'où :

$$\delta J' = \delta J + \int \lambda\,\delta\left[(\eta' - U)\,dx\right]$$

Si nous calculons seulement le coefficient de $\delta\eta$ sous le signe, nous voyons qu'il est égal à $-\lambda'$. Nous poserons donc $\lambda = \text{const}$. Mais alors $J'$ se simplifie.

$$J' = \int_a^b (V - \lambda U)\,dx + \lambda(\eta)_0^1 = \lambda c + \int_a^b (V - \lambda U)\,dx$$

et on a:

$$\delta J' = \delta \int_a^b (V - \lambda U)\,dx = \delta J$$

En résumé on voit qu'on devra traiter le problème comme une question de maximum absolu, mais en remplaçant $V$ par $V + \lambda U$, $\lambda$ étant une constante indéterminée.

VII. Forme des équations différentielles — Tous les cas se ramènent à celui où les fonctions sous le signe sont indépendantes ; nous avons vu que les équations différentielles obtenues forment alors un système d'ordre :

$$2n + 2p + 2q = 2K,$$

réductible par conséquent à un système de $2K$ équations du 1er ordre. Jacobi a démontré que ce système final peut toujours être ramené à la forme canonique; bien que la démonstration ne présente pas de difficulté dans le cas général nous le donnerons pour plus de simplicité, dans le cas seulement où $n = p$ $q = 1$.

Soit alors, pour plus de symétrie :

$$J = \int V(t, x, x_2 \ldots x_n, x'_1\; x'_2 \ldots x'_n)\,dx$$

$t$ étant la variable indépendante, $x$, $x_2 \ldots x_n$ les fonctions inconnues ; dans $\delta J$ on aura, sous le signe une somme de termes de la forme :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta x'\right) dx$$

et après l'intégration par parties ce terme sera remplacé par:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,\delta x - \frac{d\frac{\partial V}{\partial x'}}{dt}\,.\,\delta x$$

En sorte que les équations cherchées seront ici :

$$(9) \qquad \frac{d\frac{\partial V}{\partial x'_1}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \qquad \frac{d\frac{\partial V}{\partial x'_2}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_2} \qquad \frac{d\frac{\partial V}{\partial x'_n}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

Ce système est du second ordre ; nous le ramènerons au premier en faisant un changement de variables : posons :

$$\frac{\partial V}{\partial x'_i} = p_i\,,$$

substituons aux variables $x_i\; x'_i$, les variables $x_i\; p_i$ et considérons la

fonction :
$$H = \frac{\partial V}{\partial x'_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x'_2} x'_2 \, \dots + \frac{\partial V}{\partial x'_n} - V \left( x_1 x_2 \dots x'_1 x'_2 \dots x'_n \right)$$

le 1er membre étant supposé exprimé en fonction de $t$, $x_i$ $p_i$ ; nous aurons symboliquement, en différentiant sans mettre d'indices, et en laissant $t$ constant
$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p} dp = \frac{\partial V}{\partial x'} dx' + x' dp - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial x'} dx'$$

D'où :
$$\frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial x} \qquad x' \frac{\partial H}{\partial p}$$

Le système (9) se trouve ainsi remplacé par le suivant :
$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

qui est sous la forme canonique. On pourra dès lors trouver avantage à remplacer s'il y a lieu, l'intégration de ce système par la recherche d'une solution complète d'une équation aux dérivées partielles.

---

# Dix-Neuvième Leçon.
## Applications du calcul des Variations.

---

Nous appliquerons pour terminer, à quelques exemples, la méthode des variations. Nous avons vu qu'on peut toujours changer de variables de telle sorte que les limites de l'intégrale soient constantes. Il y a souvent avantage au point de vue de la symétrie, à supposer que ce changement a été fait, sans qu'il soit pour cela nécessaire de spécifier la nouvelle variable.

**1. Ligne minima entre deux points.** – Soient $M_0$ $M_1$ les deux points donnés. On a ici :
$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$t$ étant la variable indépendante. Nous avons calculé (page 140) la variation de cette intégrale.
$$\delta J = (\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z)_0^1 - \int d\alpha \, \delta x + d\beta \, \delta y + d\gamma \, \delta z.$$

La ligne cherchée n'étant assujettie à aucune condition, nous aurons en annulant tous les termes sous le signe $\int$ :
$$d\alpha = 0 \qquad d\beta = 0 \qquad d\gamma = 0$$

Ces équations sont du second ordre ; elles s'intègrent immédiatement et donnent :

$$(1) \qquad x = at + A \qquad y = bt + B \qquad z = ct + C.$$

$a, b, c, A B C$, étant six constantes arbitraires. La ligne cherchée est donc une droite. Nous déterminerons les constantes à l'aide des conditions aux limites ; aucun des deux points $M_0 M_1$ ne peut être absolument libre, le problème n'aurait aucun sens.

1° Supposons fixes les deux extrémités : $R$ est nul de lui-même en écrivant que les équations sont satisfaites pour $M_0$ et pour $M_1$, en faisant par exemple $t_0 = 0$ $t_1 = 1$. nous aurons :

$$A = x_0 \qquad B = y_0 \qquad C = z_0$$
$$a = x_1 - x_0 \qquad b = y_1 - y_0 \qquad c = z_1 - z_0$$

La solution correspond évidemment à un minimum ; on le voit à priori.

2° Si l'extrémité $M_1$ est assujettie à rester sur une surface $S$, en sorte qu'on ait :

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 = 0$$

on aura :

$$R = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \left[ \left( \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) \delta y_1 + \left( \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) \delta z_1 \right] - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0 .$$

$\delta y_1$, $\delta z_1$ étant maintenant arbitraires, on aura d'abord les conditions :

$$\frac{\alpha_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\beta_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{\gamma_1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

La droite devra donc être normale à la surface $S$. Ici et dans les cas analogues, il serait absolument nécessaire, pour savoir s'il y a réellement maximum ou minimum de recourir à $\delta^2 J$ ou de faire une discussion géométrique

3° Si $M_1$ doit rester sur une courbe donnée $C$, on aura :

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$R = \left( \alpha_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \left( \beta_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right) \delta y_1 + \left( \gamma_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right) \delta z_1 - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux indéterminées ; on devra alors écrire :

$$\alpha_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \qquad \beta_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0 \qquad \gamma_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0$$

d'où l'on conclut que la droite doit être normale à $C$.

En résumé si les extrémités sont astreintes à décrire des trajectoires données, la solution cherchée sera fournie par une normale commune à ces deux trajectoires; il y aura en général plusieurs droites, dont les unes donneront un minimum, les autres un maximum. La discussion présentera ordinairement de grandes difficultés.

II _ Lignes géodésiques d'une surface _ Nous avons supposé que la courbe était absolument libre; supposons maintenant qu'elle doive appartenir à une surface donnée :

$$F\ (x, y, z) = 0$$

Nous aurons maintenant l'intégrale :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \lambda F(x,y,z)\, dt$$

d'où on déduit facilement :

$$\delta J = (\alpha \delta x + \beta \delta y + \gamma \delta z)_0^1 - \int_{t_0}^{t_1} \left(d\alpha - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} dt\right) \delta x + \left(d\beta - \frac{\partial f}{\partial y} dt\right) \delta y + \left(d\gamma - \frac{\partial f}{\partial z} dt\right) \delta z$$

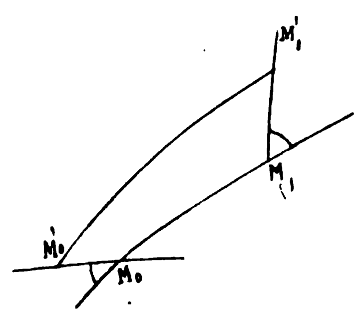
et les équations de condition sont :

$$\frac{d\alpha}{\frac{df}{\partial x}} = \frac{d\beta}{\frac{df}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{\frac{df}{\partial z}} = \lambda\, dt.$$

Donc le plan osculateur de la ligne cherchée doit être partout normal à la surface donnée. _ Cette propriété caractérise les lignes géodésiques de la surface donnée; les équations (2) sont du second ordre; leurs intégrales contiennent 6 constantes arbitraires; on les déterminerait, comme nous l'avons fait tout à l'heure, à l'aide des conditions aux limites, en ayant soin d'introduire les deux suivantes:

$$F\ (x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad F\ (x_0\ y_0\ z_0) = 0$$

On peut d'ailleurs interpréter aisément, et d'une manière très générale, la condition $R = 0$. En effet dans le cas d'une ligne géodésique, l'intégrale qui figure dans $\delta J$ s'annule et on a simplement, $l$ étant la longueur du segment $M_0 M_1$ :




$$\delta l = \alpha_1 \delta x_1 + \beta_1 \delta y_1 + \gamma \delta z_1 - \alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0$$

Si on passe du segment géodésique $M_0 M_1$ à un autre $M'_0 M'_1$ infiniment voisin, ceci peut s'écrire:

$$M'_0 M'_1 - M_0 M_1 = M_0 M'_0 \cos M_0 + M_1 M'_1 \cos M_1,$$

formule identique à celle que donne, dans un plan,

la variation d'un segment rectiligne. Il est alors très aisé d'étendre à une surface quelconque certaines théories importantes de géométrie plane : courbure géodésique, cercles géodésiques, développées, courbes parallèles, etc ...).

III. Brachystochrone. Supposons qu'un mobile soumis à la seule action de la pesanteur soit astreint à rester sur une courbe allant de $M_0$ à $M_1$ ; que doit être cette courbe pour que le temps du trajet soit un minimum.

Si nous supposons que cette courbe ne soit assujettie à aucune condition il est évident a priori qu'il y a bien un minimum. L'intégrale $J$ est ici :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z_0-z}}\, dx$$

Nous avons calculé (page ) sa variation :

$$(3) \quad \begin{cases} \delta J = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\delta x + \frac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\delta y + \frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\delta z \right)_0^1 - \frac{1}{2}\delta z_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} \\ + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} - d\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}} \right) \delta z - d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right)\delta x - d\left(\frac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\right)\delta y \end{cases}$$

Les trois équations de condition sont :

$$d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{\beta}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0 \qquad d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right) = \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}}$$

D'après les deux premières le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ ou $\frac{dy}{dx}$ est constant ; la courbe est donc située dans un plan vertical. Si nous prenons ce plan pour plan des $zx$, nous aurons à intégrer :

$$(4) \qquad d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{z_0-z}}\right) = \frac{ds}{2(z_0-z)^{\frac{3}{2}}} \qquad d\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0-z}}\right) = 0$$

ou encore :

$$(5) \qquad 2\,d\gamma\,(z_0-z) = ds - \gamma\, dz \qquad \alpha = C\sqrt{z_0-z}$$

Soient $\varphi$ l'angle de la tangente avec $OX$ ; ces équations peuvent s'écrire :

$$(6) \qquad 2\,(z_0-z)\, d\varphi = ds\, \cos\varphi \qquad c^2 dx = (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Mais si on appelle $N$ la normale limitée à l'horizontale menée par $M_0$ on a évidemment :

$$z_0 - z = N\cos\varphi,$$

et la condition précédente montre que le rayon de courbure est double de cette normale ; la courbe est donc une cycloïde ayant pour base l'horizontale du point de départ. Le plan de cette cycloïde est déterminé par le point $M_1$ et la verticale de $M_0$ ; quant à la seconde des équations (6) elle s'intègre sans difficulté avec introduction d'une nouvelle constante arbitraire. Il y a en tout quatre constantes ; si les points $M_0$, $M_1$ sont fixes, on pourra déterminer ces constantes en écrivant que la cycloïde passe par les deux points $M_0 M_1$.

La condition $R = 0$ s'interprète sans difficulté dans le cas général, on a en effet, d'après l'équation (3) :

$$R = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{z_0 - z}}\delta x + \frac{\gamma}{\sqrt{z_0 - z}}\delta z\right)_0^1 - \frac{\delta z_0}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{z_0 - z}}\,\frac{1}{(z_0 - z)}$$

ou, en tenant compte des relations (5) :

$$R = C\,(\delta x_1 - \delta x_0) + C\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\delta z_1 - C\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\delta z_0$$

Soient $\psi_1$, $\psi_0$ les inclinaisons sur ox des courbes sur lesquelles doivent rester $M_1$ $M_0$ ; soient aussi $\varphi_1$, $\varphi_0$ les angles sous lesquels cette même direction est coupée par la cycloïde aux points $M_1$, $M_0$, en sorte qu'on ait :

$$\delta x_1 = \delta s_1 \cos\psi_1 \qquad \delta x_0 = \delta s_0 \cos\psi_0 \qquad \alpha_1 = \cos\varphi_1 \qquad \alpha_0 = \cos\varphi_0$$
$$\delta z_1 = \delta s_1 \sin\psi_1 \qquad \delta z_0 = \delta s_0 \sin\psi_0 \qquad \gamma_1 = \sin\varphi_1 \qquad \gamma_0 = \sin\varphi_0$$

nous en déduirons :

$$\frac{R}{c} = \delta s_1\left(\cos\psi_1 + \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\sin\psi_1\right) - \delta s_0\left(\cos\psi + \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}\sin\psi_0\right).$$

$$= \delta s_1 \frac{\cos(\psi_1 - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \delta s_0 \frac{\cos(\varphi_0 - \psi_0)}{\cos\varphi_0}.$$

On aura donc, dans le cas où les extrémités décrivent des courbes données, les deux équations :

$$\psi_1 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \qquad \varphi_1 = \psi_0 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Donc 1° - La cycloïde vient aboutir normalement à la courbe d'arrivée ; 2° la tangente à la courbe de départ, au point de départ, est perpendiculaire à la tangente de la cycloïde au point d'arrivée.

**IV - Problème des Isopérimètres** - Cherchons parmi toutes les courbes planes fermées, ayant une longueur donnée $l$ celle qui entoure l'aire maxima.

Supposons la courbe trouvée, nous pouvons supposer l'origine à l'intérieur de cette courbe, puisque nous ne lui faisons subir que des déformations infiniment petites ; prenons alors des coordonnées polaires $\rho$, $\omega$ nous aurons à considérer l'intégrale :

$$J = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\omega$$

avec la condition qu'on ait :

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = l$$

D'après ce que nous avons vu nous devons envisager l'intégrale :

$$J' = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\omega + \lambda \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}$$

où $\lambda$ est une constante, et traiter la question comme un problème de maximum absolu. Or on a ici en faisant $\delta\omega = 0$.

$$\delta J' = \left[ \frac{\lambda \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \delta\rho \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left( 2\rho\,\delta\rho + \frac{\lambda \rho\,\delta\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} \right) d\omega - \delta\rho\, d\left( \frac{\lambda\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} \right)$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc :

$$\left( 2\rho + \frac{\lambda\rho}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}} \right) d\omega = d.\frac{\lambda\rho'}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}.$$

ou, en développant,

$$\frac{\rho\rho'' - 2\rho'^2 - \rho^2}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\lambda}.$$

Le premier membre est l'expression connue de la courbure en coordonnées polaires. La courbe cherchée est donc un cercle de rayon $\frac{\lambda}{2}$. Donc le cercle est de toutes les courbes de périmètre donné celle qui enveloppe l'aire maxima. Il est évident ici encore a priori qu'on a bien un maximum.

**V — Surface de révolution d'aire minima** — Trouver, parmi toutes les courbes passant par deux points donnés, celle qui, en tournant autour d'une droite $Ox$, engendre une surface de révolution dont l'aire, comprise entre les parallèles extrêmes, soit minima.

Il n'y a pas évidemment de maximum : il y a au contraire au moins un minimum.

Nous supposerons que les deux points donnés $M_1\,M_0$ soient dans

un même plan avec l'axe de révolution, et nous prendrons ce plan pour plan des $x\,y$.. Nous chercherons la ligne plane qui répond à la question, c'est à dire le méridien. L'aire de la zône considérée est proportionnelle à l'intégrale :

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int y\,ds$$

On a ici :

$$\delta(y\,ds) = \delta y\,ds + y\left(\frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy\right) = \delta y\,ds + y\cos\alpha\,\delta dx + y\sin\alpha\,\delta dy$$

$\alpha$ étant l'inclinaison de la tangente sur l'axe des $x$.. En intégrant :

$$\delta J = (y\cos\alpha\,\delta x + y\sin\alpha\,\delta y)_0^1 + \int \delta y\,ds - \delta x\,d(y\cos\alpha) - \delta y\,d(y\sin\alpha).$$

Les équations de condition sont :

$$d(y\cos\alpha) = 0 \qquad d(y\sin\alpha) = ds$$

Ces deux équations sont identiques, comme on s'en assure en développant et peuvent s'écrire :

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{y}{\cos\alpha}$$

Or la normale au méridien, limitée à $OX$ est égale à $\frac{-y}{\cos\alpha}$. Donc le méridien est caractérisé par cette propriété que le rayon de courbure, est égal et de signe contraire à cette normale.. Ce méridien est donc une chaînette ayant pour base l'axe $OX$. L'équation de cette chaînette est :

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$$

Elle contient deux arbitraires $a, b$, dont on disposera de manière à vérifier les conditions aux limites. Dans le cas actuel, comme dans ceux qui précèdent, il y aura lieu de discuter ces conditions aux limites, car elles doivent conduire à des valeurs réelles de $a$ et $b$.

Si les deux extrémités doivent se mouvoir sur deux courbes données en appelant $\varphi_0\ \varphi_1$ les angles que font avec $OX$ les tangentes à ces deux courbes aux extrémités de la chaînette, par $\alpha_1, \alpha_0$ les angles directeurs de la tangente à cette dernière aux mêmes points on aura :

$$R = y_1\,\delta s_1 \cos(\varphi_1 - \alpha_1) - y_0\,\delta s_0 \cos(\varphi_0 - \alpha_0)$$

On en conclut que la chaînette devra être normale aux deux courbes données, à ses deux extrémités.

**VI – Question d'analyse** — Nous donnerons pour terminer un exemple d'application de la méthode des variations à une question étrangère à la théorie des maxima et des minima.

Considérons des fonctions inconnues $x_1, x_2 \ldots x_n$ d'une même variable $t$, assujetties seulement à prendre chacune deux valeurs données pour $t = t_0$ et $t = t_1$, et soient $P_1, P_2 \ldots P_n$ des fonctions données de $x_1, x_2 \ldots x_n$, cherchons comment doivent être choisies ces fonctions $P_i$ pour que l'intégrale :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} P_1\, dx_1 + P_2 dx_2 \quad + P_n\, dx_n$$

ait une valeur constante, c'est-à-dire, indépendante des fonctions $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Calculons $\delta J$, en remarquant que les termes aux limites sont nuls :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\delta P_1\, dx_1 - \delta x_1\, dP_1) + (\delta P_2\, dx_2 - \delta x_2\, dP_2) + \ldots + (\delta P_n\, dx_n - \delta P_n\, dx_n)$$

Comme les fonctions $x_1, x_2 \ldots x_n$ sont absolument arbitraires, il faut évidemment annuler les coefficients de tous les $\delta x$ ; ce qui donne $\underline{n}$ équations de condition telle que :

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_i} dx_1 \quad + \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\, dx_2 \; \ldots \quad + \frac{\partial P_n}{\partial x_i}\, dx_n - dP_i = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ou encore :

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots \quad + \left(\frac{\partial P_n}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

On a ainsi $n$ équations linéaires par rapport aux $dx$, et chacune d'elles doit se réduire à une identité, puisque ces différentielles sont absolument arbitraires ; on a donc, quels que soient $i, j$ :

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

On en conclut que l'expression :

$$P_1\, dx_1 \;\; + P_2\;\, dx_2 \;\; \ldots + P_n\; dx_n$$

doit être une différentielle exacte. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car si nous la supposons remplie, il existera une fonction $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ ayant l'expression précédente pour différentielle ; si on y remplace $x_1, x_2 \ldots x_n$ par des fonctions quelconques de $t$ assujetties à prendre pour $t = t_0$, $t = t_1$ des valeurs données, telles que :

$$x_i\,(t_0) = \alpha_i \qquad\qquad x_i\,(t_1) = \beta_i\;,$$

nous aurons :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} d\varphi\ (x, x_1 x_2 \ldots x_n) = \varphi(\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n) - \varphi(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

$J$ sera donc bien une constante. En résumé : Pour que l'Intégrale $J$ ait une valeur constante : il faut et il suffit que l'expression :

$$P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 \ldots \qquad + P_n\, dx_n$$

soit une différentielle exacte.

---

Fin.

Tours. — Imprimerie DESLIS FRÈRES


DEC 11 1896
DUE OCT 17 98
OCT 16 1897
JUL 11 1898
OCT 15 1898
JAN 6 1899
OCT 19 1908



OCT 16 1897
JUL 11 1898
OCT 15 1898
JAN 6 1899
OCT 19 1908